15/11/2012 1^o teste	9503O7 - Complementos de Análise Matemática EE - MIEBIOL

Nome .... **N^o** ....

1. *(4 valores)* Considere a equação diferencial
$$\dot{x} = x\,(1-x)\,.$$
Determine as soluções estacionárias e a solução com condição inicial $x(0) = 1/2$.

   As solução estacionárias são $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$. A solução com condição inicial $x(0) = 1/2$ é
$$x(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}\,.$$
.

2. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\dot{x} + x = e^{-t}$$
com condição inicial $x(0) = 3$.

   Uma solução não trivial da homogénea $\dot{y} + y = 0$ é $y(t) = e^{-t}$. O produto $x(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{x} + x = e^{-t}$ se
$$\dot{\lambda}e^{-t} = e^{-t} \qquad \text{ou seja, se} \qquad \dot{\lambda} = 1\,, \qquad \text{donde} \qquad \lambda(t) = \lambda(0) + t\,.$$
   Portanto, a solução con condição inicial $x(0) = \lambda(0) = 3$ é
$$x(t) = (3+t)\,e^{-t}\,.$$

3. *(4 valores)* Determine a solução de
$$y\,dx + x\,dy = 0$$
passando pelo ponto $(x, y) = (1, 1)$.

   O diferencial $y\,dx + x\,dy$ é exato, pois $\partial(y)/\partial y = \partial(x)/\partial x$. Uma primitiva é
$$U(x,y) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x\,dt = xy\,.$$
   Portanto, a solução de $y\,dx + x\,dy = 0$ passando por $(x, y) = (1, 1)$ é a curva de nível $xy = 1$, ou seja,
$$y = 1/x\,.$$

4. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$
com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$.

   A função $x(t) = e^{zt}$ é solução de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ se $(z^2 + 2z + 1 - 1 + 5)e^{zt} = 0$, ou seja, se $z = -1 \pm i\,2$. Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ é
$$x(t) = ae^{-t}\cos(2t) + be^{-t}\sin(2t)\,.$$
   As condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$ implicam que
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ -a+2b & = & 1 \end{array}\right., \qquad \text{donde} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \end{array}\right..$$
   Portanto, a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$ é
$$x(t) = e^{-t}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right)\,.$$

5. *(4 valores)* Determine uma solução de
$$\ddot{x} + x = \sin(t)\,.$$

   Uma solução é
$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\,t\cos(t)\,.$$

17/01/2013 2^o teste	9503O7 - Complementos de Análise Matemática EE - MIEBIOL

Nome .... **N^o** ....

1. *(4 valores)* Determine a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,, \qquad \text{com } \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{9}\sin(3x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1\,.$$

A série de Fourier de senos do deslocamento inicial é

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\,.$$

A série de Fourier de senos da velocidade inicial inicial é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\Theta(x) - 1 \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots\right)$$

Portanto, a solução é

$$\begin{aligned} u(x,t) \sim \quad & \cos(2t)\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(4t)\sin(2x) + \frac{1}{9}\cos(6t)\sin(3x) + \\ & + \frac{2}{\pi}\left(\sin(2t)\sin(x) + \frac{1}{9}\sin(6t)\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(10t)\sin(5x) + \frac{1}{49}\sin(14t)\sin(7x) + \dots\right)\,. \end{aligned}$$

2. *(4 valores)* Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,,$$

com fluxo de calor nulo na fronteira, ou seja, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t > 0$, e condição inicial

$$u(x,0) = x \qquad \text{se } \ 0 < x < \pi\,.$$

A série de Fourier de cosenos da temperatura inicial é

$$u(x,0) = |x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{49}\cos(7x) + \dots\right)$$

e a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(e^{-\cdot t}\cos(x) + \frac{1}{9}e^{-9\cdot t}\cos(3x) + \frac{1}{25}e^{-25\cdot t}\cos(5x) + \frac{1}{49}e^{-49\cdot t}\cos(7x) + \dots\right)\,.$$

3. *(4 valores)* Resolva, usando a transformada de Laplace, o seguinte problema:

$$\dot{x} + x = f(t) \qquad \text{com} \qquad x(0) = 2\,,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3 \\ 7 & \text{se } t \geq 3 \end{cases}\,.$$

A função de transferência e a resposta impulsiva são $H(s) = \frac{1}{s+1}$ e $h(t) = e^{-t}$, respetivamente. A solução da equação homogénea $\dot{y} + y = 0$ com condição inicial $y(0) = 2$ é $y(t) = 2e^{-t}$. Portanto a solução é

$$x(t) = 2e^{-t} + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{se } \ t < 3 \\ 2e^{-t} + 7\int_3^t e^{-(t-\tau)}\,d\tau & \text{se } \ t \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{se } \ t < 3 \\ 7 + (2 - 7e^3)e^{-t} & \text{se } \ t \geq 1 \end{cases}$$

4. *(4 valores)* Determine a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

na reta real, ou seja, com $x \in \mathbb{R}$, com condições iniciais

$$u(x,0) = \sin(2x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(3x)\,.$$

A solução pode ser obtida usando a fórmula de d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(2(x-t)) + \sin(2(x+t))\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(3y)\, dy\,.$$

5. *(4 valores)* Determine os valores próprios λ e as funções próprias $f(x)$ do problema

$$f'' = -\lambda f\,,$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

Os valores próprios são $\lambda_n = n^2$, com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, e umas funções próprias são $f_n(x) = \cos(nx)$.