9/2/2013 recurso — **950307 - Complementos de Análise Matemática EE - MIEBIOL**

Nome .... **N^o** ....

1. *(4 valores)* Determine a solução da equação diferencial
$$\dot{x} = t\,x^2\,.$$
com condição inicial $x(1) = 3$.

A solução da EDO separável $dx/x^2 = tdt$ com condição inicial $x(1) = 3$ é
$$\int_3^x \frac{dy}{y^2} = \int_1^t s\,ds \qquad \Rightarrow \qquad 1/3 - 1/x = (t^2-1)/2 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{5/6 - t^2/2}$$

2. *(4 valores)* Determine a solução da equação diferencial
$$\dot{x} - 3x = e^{2t}$$
com condição inicial $x(0) = 10$.

Uma solução não trivial da homogénea $\dot{y} - 3y = 0$ é $y(t) = e^{3t}$. O produto $x(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{x} - 3x = e^{2t}$ se
$$\dot{\lambda}e^{3t} = e^{2t} \qquad \text{ou seja, se} \qquad \dot{\lambda} = e^{-t}\,, \qquad \text{donde} \qquad \lambda(t) = \lambda(0) + \int_0^t e^{-s}\,ds = \lambda(0) + 1 - e^{-t}\,.$$
Portanto, a solução con condição inicial $x(0) = \lambda(0) = 10$ é
$$x(t) = \left(11 - e^{-t}\right)e^{3t} = 11e^{3t} - e^{2t}\,.$$

3. *(4 valores)* Determine a solução geral da equação diferencial
$$\ddot{x} - x = e^{-2t}\,.$$

A função $y(t) = e^{zt}$ é solução da equação homogénea $\ddot{y} - y = 0$ se $(z^2-1)e^{zt} = 0$, ou seja, se $z = \pm 1$. Uma solução particular de $\ddot{x} - x = e^{-2t}$ é $x(t) = ce^{-2t}$ se
$$4c - c = 1\,, \qquad \text{donde} \qquad c = 1/3\,.$$
Portanto, a solução geral de $\ddot{x} - x = e^{-2t}$ é
$$x(t) = ae^t + be^{-t} + \tfrac{1}{3}e^{-2t}\,, \qquad \text{com } a, b, \in \mathbb{R}\,.$$

4. *(4 valores)* Determine a solução do oscilador forçado
$$\ddot{x} + 4x = f(t)$$
com condições iniciais $x(0) = 3$ e $\dot{x}(0) = 0$, onde
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi \\ e^{-t} & \text{se } t \geq \pi \end{cases}\,.$$

A função de transferência e a resposta impulsiva são $H(s) = \frac{1}{s^2+4}$ e $h(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$, respetivamente. A solução da equação homogénea $\ddot{y} + 4y = 0$ com condições iniciais $y(0) = 3$ e $\dot{y}(0) = 0$ é $y(t) = 3\cos(2t)$. Portanto a solução é
$$x(t) = 3\cos(2t) + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 3\cos(2t) & \text{se } t < \pi \\ 3\cos(2t) + \frac{1}{2}\int_\pi^t e^{-\tau}\,\sin(2(t-\tau))\,d\tau & \text{se } t \geq \pi \end{cases}\,.$$

5. *(4 valores)* Determine a solução formal da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad \text{com } 0 \le x \le \pi\,,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 0$, e condição inicial

$$u(x,0) = 3 \qquad \text{se } 0 < x < \pi\,.$$

A série de Fourier de senos da temperatura inicial inicial é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3(2\Theta(x) - 1) \sim \frac{12}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots\right)$$

Portanto, a solução é

$$u(x,t) \sim \frac{12}{\pi}\left(e^{-2t}\sin(x) + \frac{1}{3}e^{-18t}\sin(3x) + \frac{1}{5}e^{-50t}\sin(5x) + \frac{1}{7}e^{-98t}\sin(7x) + \dots\right)\,.$$