

MIEBIOL 2012/13
950307 - Complementos de Análise Matemática EE
Folhas práticas

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

12 de Janeiro de 2013



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 2.5 Portugal License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pt/).

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	5
2	Integração numérica e simulações*	9
3	EDOs simples e autónomas na reta	11
4	Sistemas conservativos*	15
5	EDOs lineares de primeira ordem	19
6	EDOs separáveis e homogéneas	21
7	EDOs exatas e campos conservativos	24
8	EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes	27
9	Números complexos e oscilações	30
10	Variação dos parâmetros e coeficientes indeterminados	33
11	Oscilador harmónico	35
12	Transformada de Laplace	39
13	Aplicações da transformada de Laplace	43
14	Equações diferenciais parciais	46
15	EDPs de primeira ordem*	48
16	EDPs lineares de segunda ordem: Laplace, ondas e calor	50
17	Separação de variáveis, harmónicas e modos	54
18	Séries de Fourier	59
19	Aplicações das séries de Fourier às EDPs	63

Notações

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Notação de Landau e ... Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções definidas numa vizinhança do ponto $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$.

$f(t) = O(g(t))$ (“ f is big-O of g ”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que existe uma constante $C > 0$ tal que $f(t) \leq C \cdot g(t)$ para todos os t numa vizinhança de a .

$f(t) = o(g(t))$ (“ f is small-o of g ”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que o quociente $f(t)/g(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow a$.

$f(t) \asymp g(t)$ (“ f and g are within a bounded ratio”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que $f(t) = O(g(t))$ e $g(t) = O(f(t))$, ou seja, que existe uma constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{C} \cdot g(t) \leq f(t) \leq C \cdot g(t)$.

$f(x) \sim g(x)$ (“ f and g are asymptotically equal”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$.

Espaço euclidiano. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Os pontos e as relativas coordenadas no plano o ou no espaço 3-dimensional são também denotados, conforme a tradição, por $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

O produto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

O produto interno realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)' := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio $\mathbb{R}^n$: o valor da forma linear $\xi \in (\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\xi \cdot \mathbf{x} = \langle \xi, \mathbf{x} \rangle$.

A norma euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “velocidade” da trajetória $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ no instante t , a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita “velocidade escalar”, e a segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “aceleração”.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F_i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $\text{Jac}\mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\partial F_i / \partial x_j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde dx_k , o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ em $dx_k \cdot \mathbf{v} := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \langle \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$$

para todo os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

1 Equações diferenciais ordinárias

1. **(partícula livre)** A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula livre de massa $m > 0$ num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0, \quad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \quad m\mathbf{a} = 0,$$

onde $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t)$ denota a *velocidade* e $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{r}}(t)$ denota a *aceleração* da partícula. Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é uma constante do movimento (ou seja, $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0$), de acordo com o princípio de inércia de Galileo¹ ou a primeira lei de Newton². As soluções da equação de Newton da partícula livre são as retas afins

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t,$$

onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a posição inicial $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0)$ e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade (inicial).

- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.
 - Determine a trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 2)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (3, 4, 5)$ no instante $t_1 = 2$. Calcule a sua “velocidade escalar”, ou seja, a norma $v := \|\mathbf{v}\|$.
2. **(queda livre)** A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -mg$$

onde $q(t) \in \mathbb{R}$ denota a altura da partícula no instante t , $m > 0$ é a massa da partícula, e $g \simeq 980 \text{ cm/s}^2$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre. As soluções da equação de Newton da queda livre são as parábolas

$$q(t) = s + vt - \frac{1}{2}gt^2,$$

onde $s = q(0) \in \mathbb{R}$ é a altura inicial e $v = \dot{q}(0) \in \mathbb{R}$ é a velocidade inicial.

- Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?
3. **(o exponencial)** O *exponencial* (real) é a função $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \exp(t) = e^t$, definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots,$$

que converge uniformemente em cada intervalo limitado da recta real. É imediato verificar que $e^0 = 1$, e que $e^{t+s} = e^t e^s$ para todos os $t, s \in \mathbb{R}$. Em particular, $e^t \neq 0$ para todos os $t \in \mathbb{R}$, e $e^{-t} = (e^t)^{-1}$.

- Verifique que $x(t) = e^t$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = x.$$

Verifique que $x(t) = x_0 e^t$ é uma solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.

¹ “... il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo” [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623.]

² “Lex prima: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare” [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

- Mostre que, se $y(t)$ é uma solução de $\dot{y} = y$ com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $y(t)/e^t$ é constante e igual a x_0 (calcule a derivada do quociente). Deduza que $x_0 e^t$ é a única solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.
- Verifique que a função $x(t) = e^{\lambda t}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = \lambda x$.
- Mostre que $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ é a única solução da equação diferencial

$$\dot{x} = \lambda x$$

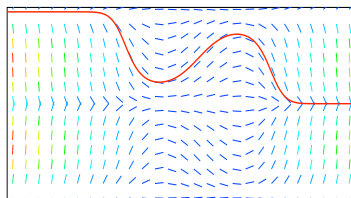
com condição inicial $x(0) = x_0$.

4. (equações diferenciais ordinárias) Uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem (resolúvel para a derivada) é uma lei

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de um sistema com *espaço de fases* $X \subset \mathbb{R}^n$, onde $\mathbf{x}(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ denota a derivada do observável/is x em ordem ao tempo t , e $\mathbf{v} : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *campo de direções* dado.

Uma *solução* de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é um caminho diferenciável $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ cuja velocidade satisfaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$ para cada tempo t num intervalo $I \subset T$, ou seja, uma função $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ cujo gráfico $\Gamma := \{(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times X \text{ com } t \in I\}$, dito *curva integral*, é tangente ao campo de direções $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ em cada ponto $(t, \mathbf{x}(t)) \in \Gamma$. Uma solução de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ com *condição inicial* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in X$ (ou solução do “problema de Cauchy”) é uma solução definida numa vizinhança de $t_0 \in T$, cujo gráfico contém o ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$.



Campo de direções e uma solução de $\dot{x} = \sin(x)(1 - t^2)$.

O *teorema de Peano*^{3 4} afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo, então existem sempre soluções locais (i.e. definidas em vizinhanças suficientemente pequenas do tempo inicial) do problema de Cauchy. O *teorema de Picard-Lindelöf*⁵ afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo e localmente Lipschitziano⁶ (por exemplo, diferenciável de classe C^1) na variável $\mathbf{x}$, então para cada ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$ passa uma única solução com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

- Esboce o campo de direções das EDOs

$$\dot{x} = t \quad \dot{x} = -x + t \quad \dot{x} = \sin(t)$$

e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

³G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino* **21** (1886), 677-685.

⁴G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen* **37** (1890) 182-228.

⁵M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

⁶A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *Lipschitziana* no domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ se

$$\exists L > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?
 - Determine uma equação diferencial de primeira ordem e uma equação diferencial de segunda ordem que admitam como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.
5. (soluções de Chandrasekhar da equação de Lane-Emden) Um modelo do perfil de equilíbrio hidrostático de uma estrela é a equação de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^p,$$

onde $\xi \geq 0$ é uma “distância adimensional” do centro da estrela, $\theta(\xi)$ é proporcional à densidade, e p é um parâmetro que depende da equação de estado $P = K\rho^{1+1/p}$ do gás que forma a estrela. O problema físico é determinar a solução com condições iniciais $\theta(0) = 1$ e $d\theta/d\xi(0) = 0$, e o menor zero de $\theta(\xi)$ com $\xi > 0$ é interpretado como sendo o raio da estrela.

- Verifique que⁷

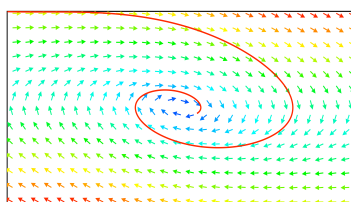
$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad \theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \text{e} \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}$$

são soluções da equação de Lane-Emden quando $p = 0, 1$ e 5 , respectivamente.

6. (campos de vetores e EDOs autónomas) Um campo de vetores $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ define uma equação diferencial ordinária autónoma (que não depende explicitamente do tempo, como todas as leis fundamentais da física)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

As imagens $\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) \text{ com } t \in I\} \subset X$ das soluções/trajetórias $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ no espaço de fases são ditas *órbitas*, ou *curvas de fases*, do sistema autónomo. Se $\bar{\mathbf{x}} \in X$ é um ponto singular do campo, i.e. um ponto onde $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, então o caminho constante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} \forall t \in \mathbb{R}$ é uma solução, dita solução de *equilíbrio*, ou *estacionária*.



Campo de vetores e uma curva de fases do pêndulo com atrito,
 $\dot{q} = p, \dot{p} = -\sin(q) - p/2$.

- Esboce o campo de direções e o campo de vetores das EDOs autónomas

$$\dot{x} = -x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = x(1 - x)$$

$$\dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad \dot{x} = (x - 1)^2(x - 2)^2$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{q} = 2q \\ \dot{p} = -p/2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{q} = q - p \\ \dot{p} = p - q \end{cases}$$

determine as soluções de equilíbrio, e conjecture sobre o comportamento qualitativo das (outras) soluções.

⁷Subrahmanyan Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, 1958.

7. (campos completos e fluxos de fases) Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou numa variedade diferenciável). Se por cada ponto $\mathbf{x}_0 \in X$ do espaço de fases passa uma e uma única solução global (ou seja, definida para todos os tempos) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X, t \mapsto \varphi(t)$, com condição inicial $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$, então o campo de vetores é dito *completo*. Um campo completo define/gera um *fluxo de fases*, um grupo de transformações $\Phi_t = e^{t\mathbf{v}} : X \rightarrow X$, com $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \text{e} \quad \Phi_0 = \text{id}_X \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

O ponto $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$ é o estado no tempo t da solução que passa por $\mathbf{x}_0$ no instante 0. Vice-versa, um fluxo de fases diferenciável define um campo de vetores

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{t},$$

dito “gerador infinitesimal” do grupo de transformações. As curvas $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

- Determine os campos de vetores que geram os seguintes fluxos no plano $\mathbb{R}^2$

$$\Phi_t(x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (\cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (x + ty, y)$$

8. (quase todas as EDOs têm ordem um!) A EDO de ordem $n \geq 2$ (resolúvel para a n -ésima derivada)

$$y^{(n)} = F\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}\right)$$

para o observável $y(t) \in \mathbb{R}$ é equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

para o observável $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$x_1 := y \quad x_2 := \dot{y} \quad x_3 := \ddot{y} \quad \dots \quad x_n := y^{(n-1)},$$

onde o campo de direções é $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) := (x_2, \dots, x_n, F(t, x_1, x_2, \dots, x_n))$.

- Determine os sistemas de ODEs de ordem 1 que traduzem as seguintes ODEs de ordem > 1

$$\ddot{x} = -x \quad \ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

$$\ddot{x} = t - x \quad \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} = x$$

2 Integração numérica e simulações*

1. (**método de Euler**) Considere o problema de simular as soluções da EDO $\dot{x} = v(t, x)$. O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n \cdot dt$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt.$$

Numa linguagem como **c++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) = x$, é

```
while (time < t)
{
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
}
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$ e o tempo final é $t = n\varepsilon$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \varepsilon)^n$$

onde $n = t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução e^t , pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

- Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...
- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

2. (**método RK-4**) O *método de Runge-Kutta* (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right) \quad k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

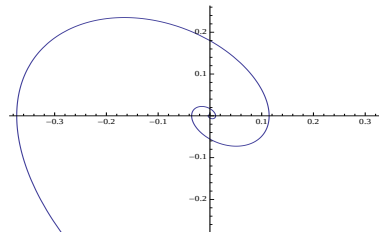
3. (simulações com software proprietário) Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinárias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do [MATLAB®](#), ou a função `NDSolve` do [Mathematica®](#), calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t, x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.

- Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm acesso a um dos software proprietários [MATLAB®](#) ou [Mathematica®](#).
- Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções `ode45` ou `NDSolve`.

Por exemplo, o pêndulo com atrito pode ser simulado, no [Mathematica®](#), usando as instruções

```
s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -Sin[x[t]] - 0.7 y[t],
  x[0] == y[0] == 1}, {x, y}, {t, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 20}]
```

O resultado é



3 EDOs simples e autónomas na reta

1. (integração de EDOs simples) O teorema (fundamental do cálculo) de Newton e Leibniz⁸ afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s) ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto, se $v(t)$ é um campo de direções contínuo, a solução da EDO

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\dot{x} = v(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

(donde a tradição de dizer “integrar” uma equação diferencial em vez de “resolver”). Se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(t)$, então também $x(t) + c$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.

- Integre as seguintes EDOs, definidas em oportunos intervalos de tempo

$$\dot{x} = 2 - t + 3t^2 + 5t^6 \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = 1/t$$

2. (foguetão) Se um foguetão de massa $m(t)$ no espaço vazio (ou seja, sem forças gravitacionais!) expulsa combustível a uma velocidade relativa constante $-V$ e a uma taxa constante $\dot{m} = -\alpha$, então a sua trajetória num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = \alpha(V - v), \quad \text{ou seja,} \quad m\dot{v} + v\dot{m} = \alpha(V - v).$$

- Resolva a EDO $\dot{m} = -\alpha$ para a massa do foguetão, com massa inicial $m(0) = m_0 > 0$, e substitua o resultado na equação de Newton, obtendo

$$\dot{v} = \frac{\alpha V}{m_0 - \alpha t}$$

(desde que $0 \leq t < m_0/\alpha$).

- Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = v_0$ e posição inicial $q(0) = 0$, válida para tempos t inferiores ao tempo necessário para acabar o combustível.
3. (campos de vetores e EDOs autónomas na reta) Um campo de vetores $v : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO autónoma

$$\dot{x} = v(x).$$

Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. um ponto onde $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio*) da equação. Se x_0 é um ponto não singular do campo contínuo $v(x)$, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então uma solução local com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinanda “separando as variáveis”, ou seja, fazendo $\frac{dx}{v(x)} = dt$ e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$. Ou seja,

$$\dot{x} = v(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Se o campo $v(x)$ é diferenciável, estas soluções são únicas.

⁸A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é “Data aequatione quocunque fontes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa”.

Proof. Indeed, assume that the velocity field v is continuous and let $J = (x_-, x_+)$ be the maximal interval containing x_0 where v is different from zero. Define a function $H : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$H(t, x) = t - t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}.$$

If $t \mapsto \varphi(t)$ is a solution of the Cauchy problem, then computation shows that $\frac{d}{dt}H(t, \varphi(t)) = 0$ for any time t . There follows that H is constant along the solutions of the Cauchy problem. Since $H(t_0, x_0) = 0$, we conclude that the graph of any solution belongs to the level set $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J \text{ s.t. } H(t, x) = 0\}$. Now observe that H is continuously differentiable and that its differential $dH = dt + dx/v(x)$ is never zero. Actually, both partial derivatives $\partial H/\partial t$ and $\partial H/\partial x$ are always different from zero. Hence we can apply the implicit function theorem and conclude that the level set Σ is, in some neighborhood $I \times J$ of (t_0, x_0) , the graph of a unique differentiable function $x \mapsto t(x)$, as well as the graph of a unique differentiable function $t \mapsto x(t)$, the inverse of t , which solves the Cauchy problem: just compute the derivative (using the inverse function theorem), $\dot{x}(t) = 1/\left(\frac{dt}{dx}(x(t))\right) = v(x)$, and check the initial condition. Observe that the function $t(x) - t_0$ has then the interpretation of the “time needed to go from x_0 to x ”. $\square$

Se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(x)$, então também $x(t - c)$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$ (a física modelada por uma EDO autónoma é invariante para translações no tempo).

- Considere as seguintes EDOs autónomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x^2 & \dot{x} &= \sqrt{x} \\ \dot{x} &= (x - 1)(x - 2) & \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

definidas em intervalos convenientes. Encontre, caso existam, as soluções estacionárias. Desenhe os respectivos campos de vetores e conjecture sobre o comportamento das soluções. Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine, quando possível, umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

4. (decaimento radioativo) A taxa de decaimento de matéria radioativa é proporcional à quantidade de matéria existente, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioativa existente no instante t satisfaz a lei

$$\dot{N} = -\beta N,$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a “vida média” dos núcleos⁹.

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$. O que acontece quando $t \rightarrow \infty$?
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioativa é o tempo τ necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial (ou seja, $N(\tau) = \frac{1}{2}N(0)$). Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida τ e o parâmetro β .
- O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é conhecida¹⁰.
- Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha.$$

Verifique que a solução de equilíbrio é $\bar{N} = \alpha/\beta$. Mostre que $N(t) \rightarrow \bar{N}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (considere a mudança de variável $x(t) = N(t) - \bar{N}$).

⁹O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X , com lei $\text{Prob}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ se $t \geq 0$, e 0 se $t < 0$, e média $\mathbf{E}X := \int_0^\infty t d\text{Prob}(X \leq t) = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.

¹⁰J.R. Arnold and W.F. Libby, Age Determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

5. (atrito e tempo de relaxamento) O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$

onde $\gamma > 0$ é o “coeficiente de atrito”.

- Mostre que a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$

onde $\tau = m/\gamma > 0$ é um “tempo de relaxamento”. Resolva a equação dada uma velocidade inicial $v(0) = v_0 > 0$. Deduza a trajetória $q(t)$ com posição inicial $q(0) = 0$.

- Mostre que a energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T,$$

e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$.

6. (paraquedista) Um modelo da queda de um paraquedista é

$$m\dot{v} = -\alpha v^2 - mg,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$, $q(t) \in \mathbb{R}$ é a altura no instante t , $m > 0$ é a massa, $g \simeq 980 \text{ cm s}^{-2}$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\alpha > 0$ é uma constante que depende da atmosfera e do paraquedista (um valor realístico é $\alpha \simeq 30 \text{ kg/m}$).

- Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para o valor estacionário $\bar{v} = \sqrt{mg/\alpha}$ quando $t \rightarrow \infty$.

7. (crescimento exponencial) Um modelo do crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N,$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t , e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$).

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$. O que acontece quando $t \rightarrow \infty$?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante γ , então a população segue a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma.$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções.

8. (logística)¹¹ Um modelo mais realista da dinâmica de uma população é dado pela equação logística¹¹

$$\dot{N} = \lambda N (1 - N/M)$$

onde a constante positiva $M > 0$ é a população máxima permitida num dado meio ambiente limitado. Note que $\dot{N} \simeq \lambda N$ (e portanto o crescimento é exponencial) se $N \ll M$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ (e portanto a população é constante) quando $N \rightarrow M$. A “população relativa” $x(t) := N(t)/M$ satisfaz a equação logística “adimensional”

$$\dot{x} = \lambda x (1 - x).$$

¹¹Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}.$$

- Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.

9. (surtos epidémicos) Num surto epidémico, a taxa de crescimento do número $I(t)$ de indivíduos infetados, dentro de uma população total constante N , é proporcional ao produto do número de indivíduos infetados e o número $S(t) = N - I(t)$ de indivíduos saudáveis (e portanto susceptíveis de serem infetados), ou seja,

$$\dot{I} = \lambda I(N - I)$$

com $\lambda > 0$.

- Determine a lei de crescimento da população infetada relativa $x(t) := I(t)/N$, e discuta o comportamento assintótico de $x(t)$.
10. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica de uma população em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N^2,$$

ou seja, a taxa de crescimento é proporcional aos pares de indivíduos contidos na população.

- Determine a solução estacionária e a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ arbitrária.
 - Note que as soluções que determinou não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!
11. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?
- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.
 - A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.
 - A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.
 - Uma esfera de gelo derrete a uma taxa proporcional à sua superfície.
 - A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

4 Sistemas conservativos*

1. (**constantes do movimento**) Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com coordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$, um campo de vetores que define a EDO autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. Os *observáveis* são as funções $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Os observáveis que assumem valores $\varphi(\mathbf{x}(t))$ constantes ao longo das soluções $\mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ são ditos *constantes do movimento*, ou *integrals primeiros*. Pela regra da cadeia, o observável diferenciável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma constante do movimento se e só se a *derivada de Lie* de φ ao longo do campo $\mathbf{v}$ é igual a zero, ou seja,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\varphi)(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \cdot v_k(\mathbf{x}) = 0.$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in X$.

As órbitas/curvas de fases estão contidas nas hiperfícies de nível $\Sigma_c := \{\mathbf{x} \in X \text{ t.q. } \varphi(\mathbf{x}) = c\}$ das constantes do movimento. Se o sistema admite k constantes do movimento $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ independentes (ou seja, tais que os diferenciais $d\varphi_i(\mathbf{x})$ são linearmente independentes em cada ponto $\mathbf{x}$), então as órbitas do sistema estão contidas nas interseções das k hiperfícies de nível, umas sub-variedades de co-dimensão k . Em particular, a existência de $n-1$ constantes do movimento independentes permite determinar as órbitas.

- Verifique que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz diagonal com $\det A \neq 0$ (ou seja, todos os valores próprios são $\neq 0$) não admite constantes do movimento não triviais.
2. (**sistemas conservativos**) [LL78] A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula de massa $m > 0$ (suposta constante!) num campo de forças conservativo é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

onde a força é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, e $U(\mathbf{r})$ é um(a energia) *potencial*. Um sistema isolado de N pontos materiais, com posições $\mathbf{r}_\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e massas $m_\alpha > 0$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, é modelado pelas equações de Newton

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

onde a força que atua sobre o α -ésimo ponto material é

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U := -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right),$$

menos o gradiente, com respeito às coordenadas $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, de uma energia potencial $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. A *energia cinética* é

$$K := \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2$$

onde $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$ é a velocidade do α -ésimo ponto material.

- Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)

$$E := K + U = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$ ao longo das trajetórias.

3. (mecânica lagrangiana e hamiltoniana) Um sistema mecânico é descrito por um espaço das configurações $M \simeq \mathbb{R}^n$ (ou, em geral, uma variedade diferenciável), com coordenadas locais $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, e uma *lagrangiana* $L : TM \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, uma função $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Por exemplo, o espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N).$$

A *ação* de uma trajetória $[t_0, t_1] \mapsto \mathbf{q}(t) \in M$ entre a posição $\mathbf{q}(t_0)$ e a posição $\mathbf{q}(t_1)$ é o integral

$$S[t \mapsto \mathbf{q}(t)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt.$$

O *princípio de mínima ação* (de Hamilton) afirma que as trajetórias físicas são os pontos críticos da ação. A variação δS , dada uma variações infinitésimas $\mathbf{q}(t) + \delta \mathbf{q}(t)$ da trajetória com $\delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt \end{aligned}$$

(integrando por partes a segunda soma e usando as condições de fronteira). Portanto, os pontos críticos da ação são as soluções das *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A forma linear $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = p^1 dq_1 + p^2 dq_2 + \dots + p^n dq_n \in T_{\mathbf{q}}^*M$, de coordenadas $p^i := \partial L / \partial \dot{q}_i(\mathbf{q})$, é dito *momento*. O espaço $X = T^*M \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, com coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, é dito *espaço de fases* do sistema mecânico. As equações de Euler-Lagrange são equivalentes às *equações de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde a *hamiltoniana* do sistema, $H : X \rightarrow \mathbb{R}$, é a “transformada de Legendre” da lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &:= \sup_{\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}_{\alpha}\|^2 + U(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

- O espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N),$$

onde U é a energia potencial da interação. Verifique que as equações de Euler-Lagrange são equivalentes às equações de Newton $m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}$.

- Mostre que a hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0$$

ao longo das soluções das equações de Hamilton. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fases X estão contidas nas curvas/superfícies de nível $\{H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$ da hamiltoniana.

4. **(Legendre transform)** The *Legendre transform* of a real-valued function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is the real-valued function $F : (\mathbb{R}^n)' \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$F(p) := \sup_x (\langle p, x \rangle - f(x))$$

If $f(x)$ is differentiable, the extremum is attained at $p = f'(x)$, and this is a maximum if $f(x)$ is convex, i.e. if $f''(x) > 0$.

- Find the Legendre transform of

$$f(x) = \lambda x^2 \quad f(x) = e^x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ symmetric}$$

5. **(one-dimensional Newtonian motion in a time independent force field)** The one-dimensional motion of a particle of mass m subject to a force $F(x)$ that does not depend on time is described by the Newton equation

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}(x),$$

where the potential $U(x) = -\int F(x)dx$ is some primitive of the force. The total energy

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

(which of course is defined up to an arbitrary additive constant) of the system is a constant of the motion, i.e. is constant along solutions of the Newton equation. In particular, once a value E of the energy is given (depending on the initial conditions), the motion takes place in the region where $U(x) \leq E$, since the kinetic energy $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ is non-negative. Conservation of energy allows to reduce the problem to the first order ODE

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - U(x)),$$

which has the unpleasant feature to be quadratic in the velocity $\dot{x}$. Meanwhile, if we are interested in a one-way trajectory going from some x_0 to x , say with $x > x_0$, we may solve for $\dot{x}$ and find the first order autonomous ODE

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}.$$

There follows that the time needed to go from x_0 to x is

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(y))}}.$$

The inverse function of the above $t(x)$ will give the trajectory $x(t)$ with initial position $x(0) = x_0$ and initial positive velocity $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x_0))}$, at least for sufficiently small times t .

6. **(pêndulo matemático)** A equação de Newton que modela as oscilações de um *pêndulo* é

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta),$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, $g \simeq 980 \text{ cm s}^{-2}$ é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo e θ é o ângulo que o pêndulo forma com a vertical. No espaço de fases, de coordenadas θ e $p := \dot{\theta}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin(\theta) \end{cases}.$$

- Verifique que a energia

$$H(\theta, p) := \frac{1}{2}p^2 + \omega^2(1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajetórias.
- Show that the motion with energy E is given by

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - \cos(\theta))}}$$

- Define the new variable $x := \sqrt{\frac{2}{E+1}} \sin(\theta/2)$ and the square energy $K := \sqrt{\frac{E+1}{2}}$, and show that the motion reads

$$\dot{x} = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}$$

Deduce that time is given by the so called *Jacobi's elliptic integral of the first kind*

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

whose solution (i.e. x as a function of time t) is “defined” as the *elliptic function* $x(t) = \text{sn}(t, K)$ (see [AS64]).

7. (*oscilador harmónico/lei de Hooke*) As pequenas oscilações de um pêndulo à volta da posição de equilíbrio $\theta = 0$, ou as oscilações de uma partícula sujeita à *lei de Hooke*, são modeladas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}$$

- Verifique que a energia

$$H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

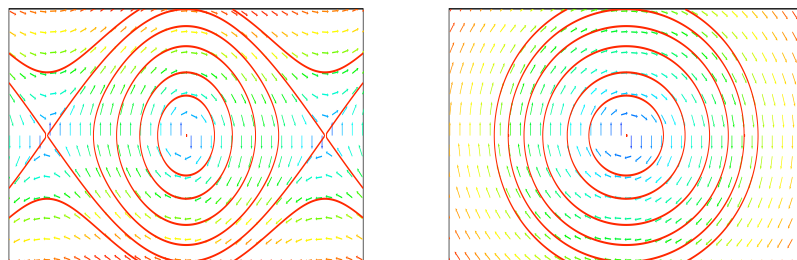
é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajetórias.
- Fixed a positive energy E , the motion takes place in the interval (x_-, x_+) with $x_{\pm} = \pm\sqrt{2E}/\omega$, and the velocity $\dot{x}$ satisfies the quadratic equation

$$\dot{x}^2 = \omega^2 \sqrt{(|x_{\pm}|^2 - x^2)}.$$

Find the trajectory from x_- to any $x \leq x_+$.

- Compute the time needed to go from x_- to x_+ , and show that it does not depend on the energy E .



Retratos de fases do pêndulo matemático e do oscilador harmónico.

5 EDOS lineares de primeira ordem

1. (EDOs lineares de primeira ordem) A solução de uma EDO *linear de primeira ordem*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t),$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogênea associada $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogênea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u) du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u) du} q(s) ds \right) .}$$

- Mostre que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem $\dot{x} + p(t)x = q(t)$, então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da equação homogênea associada, $\dot{y} + p(t)y = 0$.
- Deduza que a solução geral de $\dot{x} + p(t)x = q(t)$ pode ser representada como uma soma

$$x(t) = y(t) + z(t),$$

onde $y(t) = y(0)e^{-\int_{t_0}^t p(u) du}$ é a solução geral da equação homogênea associada e $z(t)$ é uma solução particular, por exemplo a solução $z(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u) du} \left(\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u) du} q(s) ds \right)$ com condição inicial nula.

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

2. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência pode ser modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é um coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -\gamma v - mg.$$

- Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.
- Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assintótico $\bar{v}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
- Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = q_0 > 0$.

3. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω , L e R .

4. (lei do arrefecimento de Newton) A temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k(T - M(t)),$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução geral como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e dos valores da função $M(\tau)$ com $0 \leq \tau \leq t$.
- Determine a solução assintótica (ou seja, quando t é grande) $T(t)$ quando $M(t) = M \sin(\omega t)$.
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece quando $t \rightarrow \infty$.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

5. (equações de Bernoulli) Uma EDO da forma

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^n,$$

onde p e q são funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $n \neq 0, 1$ (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação de Bernoulli*.

- Verifique que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio da equação de Bernoulli.
- Seja $k = 1 - n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$ se e só se a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$\dot{y} + k p(t)y = k q(t)$$

com condição inicial $y(t_0) = (x_0)^{1/k}$.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2 (\cos t - \sin t) \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}x = x^2 \log t \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

6 EDOS separáveis e homogêneas

1. (**produto direto de EDOS**) As soluções do sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases}$$

(*produto direto* das EDOS $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$) são os caminhos $t \mapsto (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções das EDOS autônomas $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$, respetivamente. A curva de fases que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, onde $f(x_0) \neq 0$ (ou onde $g(y_0) \neq 0$), é (localmente) o gráfico de uma função $x \mapsto y(x)$ (ou $y \mapsto x(y)$) que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)} \quad \left(\text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x)}{g(y)} \right).$$

- Determine as soluções e as curvas de fases do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

quando $\lambda = 0, \pm 1, 2, \dots$ e quando $\lambda = 1/2, 1/3, \dots$

2. (**EDOs separáveis**) A solução da uma EDO *separável*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}.$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$ tal que $f(x_0) \neq 0$ e $g(y_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}, y(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}}$$

- Resolva as seguintes EDOS separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\frac{dy}{dx} = -x/y \quad \frac{dy}{dx} = x/y \quad \frac{dy}{dx} = kx^\alpha y^\beta \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= tx^3 & t\dot{x} + t &= t^2 & \dot{x} &= t^3/x^2 & x\dot{x} &= e^{x+3t^2}t & \dot{x} &= e^{t-x} \\ \dot{x} &= \frac{t-1}{x^2} & \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} &= 0 & (t^2+1)\dot{x} &= 2tx & \dot{x} &= t(x^2-x) \end{aligned}$$

3. (**homotetias e funções homogêneas**) As *homotetias (positivas)* do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ são as transformações $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$. Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou um campo vetorial $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$), definida num domínio “homogêneo” (i.e. invariante para homotetias) $D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, é dita *homogênea de grau k* se

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall \mathbf{x} \in D,$$

e é dita *homogênea* (de grau 0) se é invariante para homotetias, ou seja, se

$$f(\lambda \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

O *teorema de Euler* afirma que uma função diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau k se e só se $\langle \mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = k f(\mathbf{x})$ para todos os pontos $\mathbf{x} \in D$.

- Determine os polinómios homogêneos de grau 1, de grau 2 e de grau 3 no plano $\mathbb{R}^2$.
- Mostre que as únicas funções homogêneas e contínuas definida em todo o espaço $\mathbb{R}^n$ são as constantes (observe que as funções homogêneas são constantes ao longo das semi-retas que saem da origem, logo, se a origem está no domínio da função ...).

- Determine o grau de homogeneidade dos campos de forças elástico e gravitacional/elétrico, definidos por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

respetivamente (o segundo definido para $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$).

- Diga se as seguintes funções $f(x, y)$, definidas em oportunos domínios do plano, são homogêneas:

$$x/y \quad e^{x-y} \quad \frac{x^2 - xy}{xy + 3y^2} \quad \sin(y) \cos(x)$$

4. (EDOs homogêneas) Uma EDO *homogênea* é uma equação diferencial

$$\dot{x} = v(t, x)$$

definida, num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ do plano de coordenadas (t, x) , por um campo de direções homogêneo, ou seja, tal que $v(\lambda t, \lambda x) = v(t, x)$ para todos os $\lambda > 0$. As homotetias $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+$, enviam curvas integrais de uma EDO homogênea em curvas integrais. A mudança de variável $y(t) := x(t)/t$, num domínio onde $t > 0$ ou $t < 0$, transforma uma EDO homogênea $\dot{x} = v(t, x)$ numa EDO separável $y + t\dot{y} = v(1, y)$. Ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \quad \Rightarrow \quad y + t\dot{y} = v(1, y) \quad \text{se } y = x/t}$$

- Seja $\dot{x} = v(t, x)$ uma EDO homogênea. Mostre que, se $\varphi(t)$ é uma solução e $\lambda > 0$, então também $\phi(t) := \lambda \cdot \varphi(t/\lambda)$ é uma solução.
- Seja $\varphi(t)$ uma solução da EDO homogênea $\dot{x} = v(t, x)$ tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?
- Resolva as seguintes EDOs homogêneas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -t/x & \dot{x} &= \frac{x-t}{x+t} & \dot{x} &= 1 + x/t \\ \dot{x} &= x/t & \dot{x} &= 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} & \frac{dy}{dx} &= y/x + \sin(y/x), \end{aligned}$$

definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

5. (equação de Newton com forças homogêneas) [Ar89, LL78] Considere a equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula sujeita a uma força homogênea de grau d , ou seja tal que $\mathbf{F}(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^d \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ para todos os $\lambda > 0$ e todo os pontos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. As “quase-homotetias” $(t, \mathbf{r}) \mapsto (\lambda^\alpha t, \lambda^\beta \mathbf{r})$, com $\lambda > 0$, enviam curvas integrais em curvas integrais se os “pesos” α e β satisfazem a relação $\beta(1-d) = 2\alpha$. Em particular, uma órbita fechada de dimensão linear L e período de revolução T é enviada numa órbita fechada de dimensão linear $L' = \lambda^\beta L$ e período de revolução $T' = \lambda^\alpha T$, e portanto o quociente T^β/L^α é constante.

- Considere uma força constante (e.g. a gravidade próximo da superfície da terra)

$$F(x) \propto 1,$$

e determine a relação entre espaço percorrido e tempo necessário.

- Considere a força elástica (e.g. lei de Hooke, oscilador harmónico)

$$F(x) \propto -x,$$

e deduza que os períodos das órbitas fechadas não dependem das amplitudes das oscilações.

- Considere uma força elástica “fraca”

$$F(x) \propto -x^3.$$

Determine o período das pequenas oscilações em função da amplitude.

- Considere a força gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \propto -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

e deduza a *terceira lei de Kepler*¹²: “os quadrados dos períodos de revolução T são proporcionais aos cubos das distâncias médias L do Sol aos planetas, ou seja, $T^2 = kL^3$, onde k é uma constante”.

¹²Johannes Kepler, *Harmonices mundi*, 1619.

7 EDOS exatas e campos conservativos

1. (**EDOs exatas, diferenciais exatos e campos conservativos**) O diferencial $p(x, y)dx + q(x, y)dy$, é dito *exato* no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se existe uma função $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , dita *primitiva*, tal que $dU = pdx + qdy$, ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = q.$$

A primitiva $U(x, y)$ pode ser pensada como o *potencial* do campo de vetores $\mathbf{F} := -\nabla U = -(p, q)$. Se c é um valor *regular* de U (i.e. se $\nabla U \neq 0$ nos pontos onde $U(x, y) = c$), então a curva de nível

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } U(x, y) = c\},$$

ortogonal ao campo de vetores $\mathbf{F}$, é uma solução implícita da *equação diferencial exata*

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0.$$

O *teorema de Euler-Poincaré* (caso particular do *teorema de Stokes*) afirma que o diferencial $p(x, y)dx + q(x, y)dy$, definido num domínio convexo¹³ (é suficiente que seja “simplesmente conexo”) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é exato se e só se é “fechado”, i.e. se

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0 \quad \text{ou seja, se} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

Neste caso, um potencial é dado pelo integral de linha $U(x, y) = \int_{\gamma} (p(x, y) dx + q(x, y) dy)$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ é um caminho seccionalmente diferenciável entre $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(1) = (x, y)$ (ou seja, o (oposto do) trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para deslocar uma partícula do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x, y)). Por exemplo, se Ω é um retângulo, é possível escolher um caminho horizontal de (x_0, y_0) até (x, y_0) , e depois um caminho vertical de (x, y_0) até (x, y) , e definir um potencial

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x p(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y q(x, t) dt$$

- Diga quais dos seguintes diferenciais,

$$dx + dy \quad (2y + 3x) dx + (y + 2x) dy$$

$$e^{xy} dx + e^{xy} dy \quad \frac{x}{y} dy + (1 + \log y) dx,$$

definidos em oportunos rectângulos, são exatos, e esboce algumas curvas integrais da correspondente equação diferencial.

- Diga quais das seguintes EDOs

$$5 + 3 \frac{dx}{dt} = 0 \quad (x - t) \frac{dx}{dt} + e^x = 0 \quad \frac{1}{x} + t - \frac{t}{x^2} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$(4x + 3y^2) + 2xy \frac{dy}{dx} = 0 \quad 2x^2 + 4t^3 + (4tx + 1) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (r^2 + 1) \cos \theta + 2r \sin \theta \frac{dr}{d\theta} = 0,$$

definidas em oportunos retângulos, são exatas, e resolva-as.

- Verifique que, se a forma $pdx + qdy$ está definida numa bola $B_R(0)$ de raio $0 < R \leq \infty$, e satisfaz a condição $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ do teorema de Euler-Poincaré, então uma primitiva é também dada pelo integral

$$U(x, y) = \int_0^1 (x p(tx, ty) + y q(tx, ty)) dt.$$

¹³ Uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é *convexa* se $a, b \in \Omega$ implica $ta + (1 - t)b \in \Omega$ para todos os $t \in [0, 1]$.

2. (**fatores integrantes**) Um diferencial arbitrário $pdx + qdy$ pode ser transformado num diferencial exato $(p\mu)dx + (q\mu)dy$ por meio de um *fator integrante*, uma função $\mu(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu q)}{\partial x}.$$

Não existem métodos gerais para determinar fatores integrantes. No entanto, fatores integrantes que dependem de apenas uma variável podem ser determinados, quando existem!, por meio de uma integração. Por exemplo, um fator integrante $\mu(x)$ é solução da EDO linear de primeira ordem

$$\mu \frac{\partial p}{\partial y} = \mu' q + \mu \frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{ou seja,} \quad \mu' / \mu = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad \text{donde} \quad \mu = e^{\int \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx}$$

desde que $\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$ não depende de y .

- Considere as equações diferenciais

$$(4x + 3y^2) + 2xy \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2x^2 + y) + (x^2y - x) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mostre que não são exactas.

Determine um fator integrante da forma x^n com n inteiro. Multiplique as equações pelos respectivos fatores integrantes e resolva as equações resultantes.

3. (**curvas ortogonais**) Se a família $\mathcal{C}$ de curvas no plano é definida como sendo as curvas integrais da equação diferencial

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0,$$

então a família $\mathcal{C}^\perp$ de curvas ortogonais é composta pelas curvas integrais da equação diferencial

$$p(x, y) dy - q(x, y) dx = 0.$$

(o operador que envia o diferencial $\omega = pdx + qdy$ no diferencial $*\omega = pdy - qdx$ é chamado “Hodge star operator” no plano euclidiano).

- Determine e esboce as curvas ortogonais ...

... à família de círculos $x^2 + y^2 = c$,

... à família de hipérbolas $xy = c$,

... e à família de parábolas $y^2 = cx$.

4. (**campos conservativos**) O *trabalho* efectuado pelo campo de vectores/forças $\mathbf{F}(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{F}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ao longo do caminho diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ é o integral de linha

$$\text{Work}[\mathbf{F}, \gamma] := \int_{\gamma} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

O campo de vectores $\mathbf{F}$ é *conservativo* se o trabalho apenas depende dos pontos inicial e final do caminho, ou seja, se o campo admite um *potencial*, i.e. uma função diferenciável $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla U$, e portanto

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)).$$

- Diga quais dos seguintes campos de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = (3, 2) \quad \mathbf{F}(x, y) = (x, y) \quad \mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x) \quad \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

definidos em oportunos domínios do plano, são conservativos, e determine as curvas equipotenciais.

- Diga se o campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

definido em $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, é conservativo.

8 EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes

1. (equação de Newton num potencial quadrático) Considere a equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q$$

que determina a trajetória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}$ de uma partícula (de massa $m = 1$) num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$.

- Verifique que $q(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio.
- Verifique que, se $\beta = 0$, as soluções da equação de Newton (da partícula livre)

$$\ddot{q} = 0$$

são $q(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

- Verifique que, se $\beta = -k^2 < 0$, as soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = k^2 q$$

são $q(t) = ae^{kt} + be^{-kt}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

- Verifique que, se $\beta = \omega^2 > 0$, as soluções da equação (do oscilador harmónico)

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

são $q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

2. (partícula num potencial quadrático com atrito) A função $q(t) := e^{-\alpha t}y(t)$ é uma solução da equação de Newton (de uma partícula num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$ com uma força de atrito $-2\alpha q$, se $\alpha > 0$),

$$\ddot{q} = -2\alpha \dot{q} - \beta q,$$

sse $y(t)$ é uma solução da equação de Newton

$$\ddot{y} = -\delta y$$

(de uma partícula num potencial quadrático $U(y) = \frac{1}{2}\delta y^2$), onde $\delta := \beta - \alpha^2$.

- Verifique a afirmação acima.
- Determine a solução geral da equação.
- Existem soluções de equilíbrio?

3. (EDO lineares homogêneas com coeficientes constantes, polinómio característico) A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) da EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0$$

se z é igual a uma das raízes $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ do polinómio característico

$$P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta.$$

Duas soluções (reais) independentes podem ser obtidas calculando a parte real e a parte imaginária das soluções complexas, e são

$e^{(-\alpha+k)t}$	e	$e^{(-\alpha-k)t}$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raízes reais e distintas)
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raízes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$te^{-\alpha t}$	se $z_{\pm} = -\alpha$ (raiz dupla)

O espaço das soluções (reais) da EDO homogênea $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0$ é um espaço linear $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^2$, de dimensão 2. Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de $\mathcal{H}$, então a “solução geral” é $x(t) = c_+ \phi_+(t) + c_- \phi_-(t)$, onde $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

- Verifique que o espaço das soluções da EDO homogênea $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$ é um espaço linear, ou seja, que uma combinação linear $c_+x_+(t) + c_-x_-(t)$, com $c_{\pm} \in \mathbb{R}$, de soluções $x_{\pm}(t)$ é uma solução.
- Determine a solução geral das seguintes EDOs homogêneas:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2x = 0 \quad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 \quad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0. \end{aligned}$$

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2 \\ \ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1 \\ \ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0 \\ \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9 \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1. \end{aligned}$$

- Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$\begin{aligned} e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}, \quad e^{-t} \sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t} \cos(2\pi t), \quad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t), \\ e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}, \quad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2), \quad 3 \quad \text{e} \quad 5t. \end{aligned}$$

4. (**independência linear e Wronskiano**) O (*determinante*) *Wronskiano* entre as funções $f(t)$ and $g(t)$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é a função

$$W_{f,g}(t) := \det \begin{pmatrix} f(t) & \dot{f}(t) \\ g(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} = f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t)$$

Se $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos $t \in I$ então o quociente g/f (ou f/g) é constante no intervalo I . Consequentemente, se $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes, então o Wronskiano $W_{f,g}(t) \neq 0$ em algum ponto $t \in I$.

Se ϕ_+ e ϕ_- são duas soluções da mesma EDO linear $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $t_0 \in I$, então o Wronskiano satisfaz a *identidade de Abel*

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = W_{\phi_+, \phi_-}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Portanto, ϕ_+ e ϕ_- são linearmente independente se e só se $W_{\phi_+, \phi_-}(t) \neq 0$ num ponto (e portanto em todos os pontos) $t \in I$.

- Sejam ϕ_+ e ϕ_- duas soluções da EDO linear $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$. Calcule a derivada de $W_{\phi_+, \phi_-}(t)$, e deduza a identidade de Abel.
- Calcule

$$W_{e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}}, \quad W_{e^{-\alpha t} e^{kt}, e^{-\alpha t} e^{-kt}} \quad \text{and} \quad W_{e^{-\alpha t} \sin(\omega t), e^{-\alpha t} \cos(\omega t)}.$$

5. (**equação de Schrödinger estacionária**) Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J.s.

- Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

6. (EDOs equidimensionais) Uma equação diferencial da forma

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional* (é invariante pela transformação $x \mapsto \lambda x$ com $\lambda > 0$).

- Mostre que a substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) := y(x(t))$.
- Resolva a equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

na semirecta $x > 0$.

7. (EDOs de Riccati) Uma equação diferencial da forma

$$\ddot{y} + p(t)y^2 + q(t)y + r(t) = 0$$

é dita *equação de Riccati*.

- Mostre que a variável $x(t)$, tal que

$$\dot{x} = -p(t)y(t),$$

satisfaz a EDO linear

$$\ddot{x} + \left(q(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \right) \dot{x} + p(t)r(t)x = 0.$$

9 Números complexos e oscilações

1. (o plano dos números complexos) O corpo dos *números complexos* é o conjunto $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dos pontos/números $z = x + iy \simeq (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, munido das operações “soma” e “multiplicação”, definidas por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(que corresponde à soma dos vetores (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano $\mathbb{R}^2$) e

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Em particular, se $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$, então $i \cdot i = -1$, ou seja, $i = \sqrt{-1}$. O *conjugado* de $z = x + iy$ é $\bar{z} := x - iy$. O *módulo* de $z = x + iy$ é

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Os números reais

$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde $\rho = |z| \geq 0$ é o módulo, $\theta \in \mathbb{R}$ é “um” *argumento* de z , ou seja, um “ângulo” $\arg(z) = \theta + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$, e o número complexo $e^{i\theta}$ é definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

- Verifique que o inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0$ é

$$1/z = \bar{z}/|z|^2$$

- Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexos

$$1/i \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2$$

- Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

- Verifique que, se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{se } \rho_2 \neq 0).$$

Deduz a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta}$, no plano $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, corresponde a uma dilatação/contração por ρ e uma rotação de um ângulo θ . Em particular, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é a “raiz quadrada” da inversão $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, ou seja, uma rotação de um ângulo $\pi/2$.

- Use a fórmula de Euler para provar as fórmulas

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) \mp \sin(\theta) \sin(\phi)$$

e

$$\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \sin(\phi) \pm \sin(\theta) \cos(\phi).$$

- Use a representação polar e a fórmula de Euler para provar a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Deduza as fórmulas

$$\cos(n\theta) = \dots \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \dots$$

- Verifique que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

- Calcule

$$\sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i}$$

- Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^5 = 1$ e $z^3 = 81$.
- Mostre que se ω é uma raiz n -ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

(multiplique por $1 - \omega \dots$).

2. (**exponencial complexo e funções trigonométricas**) A função exponencial $\exp(z) := e^z$, é a função inteira $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela série de potências

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

- Verifique a fórmula de adição $e^{z+w} = e^z e^w$, e deduza que $e^z \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.
- Verifique que e^z é igual à sua derivada, ou seja, $\exp'(z) = \exp(z)$.
- Mostre que, se $\theta \in \mathbb{R}$, então o conjugado de $e^{i\theta}$ é $e^{-i\theta}$, e portanto $|e^{i\theta}| = 1$. Defina as funções reais de variável real “cos” e “sin” usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, ou seja,

$$\cos(\theta) := \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) := \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

e deduza as suas expansões em série de potências em torno de 0.

- Deduza que, se $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha+i\theta} = e^{\alpha} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

3. (**oscilações complexas e sobreposição**) A função $t \mapsto z(t) = e^{i\omega t}$ descreve um ponto que percorre o círculo unitário $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$ do plano complexo no sentido anti-horário com “frequência angular” $\omega > 0$ (e portanto com período $T = 2\pi/\omega$ e frequência $\nu = \omega/(2\pi)$).

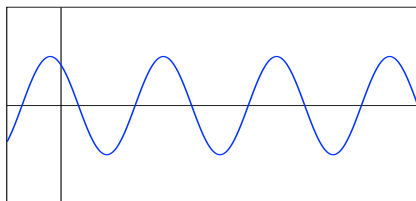
- Verifique que a função $z(t) = e^{i\omega t}$ satisfaz as equações diferenciais lineares

$$\dot{z} = i\omega z \quad \text{e} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z.$$

- Deduza que a parte real (e a parte imaginária) de $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$, com $z(0) = \rho e^{i\varphi}$,

$$q(t) := \Re[z(t)] = \rho \cos(\omega t + \varphi)$$

é uma solução (real) do oscilador harmônico $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ em quanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.



Oscilação $q(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi)$.

- Observe que a sobreposição das oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$,

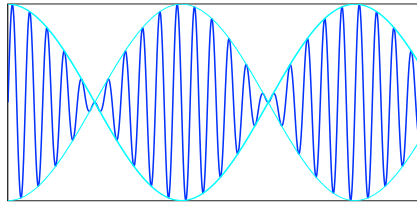
$$z(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t},$$

é máxima quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínima quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).

- Observe que, se $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega - \varepsilon$, a sobreposição das duas oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$ pode ser representada como

$$z(t) = e^{i\omega t} (e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}) = 2e^{i\omega t} \cos(\varepsilon t)$$

Em particular, se $|\varepsilon| \ll |\omega|$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.



Sobreposição $z(t) = \sin(0.95 \cdot t) + \sin(1.05 \cdot t)$.

10 Variação dos parâmetros e coeficientes indeterminados

1. (EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes) Uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes é uma equação

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são parâmetros, e $f(t)$ é uma função dada (uma força dependente do tempo), definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O espaço das soluções da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$ é um espaço afim $z + \mathcal{H}$, modelado sobre o espaço linear $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^2$ das soluções da EDO homogênea associada

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0.$$

Portanto, a solução geral da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$ pode ser escrita como soma

$$x(t) = z(t) + y(t),$$

onde $z(t)$ é uma (i.e. apenas uma!) “solução particular” da EDO linear $\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \beta z = f(t)$ e $y(t) := c_+\phi_+(t) + c_-\phi_-(t)$ é a “solução geral” (i.e. todas as soluções!) da EDO homogênea associada $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, combinação linear de duas soluções independentes $\phi_{\pm}(t)$ com coeficientes arbitrários $c_{\pm} \in \mathbb{R}$.

- Verifique que a diferença $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ entre duas soluções, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$ é uma solução da EDO homogênea associada $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$.
 - Verifique o *princípio de sobreposição*: se $x_n(t)$ são soluções das EDOs lineares $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f_n(t)$, com $n = 1, 2, \dots, N$, então a “sobreposição” $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$ é solução da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = \sum_{n=1}^N f_n(t)$.
2. (variação dos parâmetros) O método da variação dos parâmetros (também conhecido com o oximoro “variação das constantes”) consiste em procurar uma solução particular de uma EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

como combinação linear

$$z(t) = \lambda_+(t)\phi_+(t) + \lambda_-(t)\phi_-(t)$$

de duas soluções independentes $\phi_{\pm}(t)$ da equação homogênea $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, com coeficientes variáveis $\lambda_{\pm}(t)$. Um cálculo mostra que $z(t)$ é uma solução se (mas não só se!) λ_+ e λ_- são soluções do sistema

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_+\phi_+ + \dot{\lambda}_-\phi_- = 0 \\ \dot{\lambda}_+\dot{\phi}_+ + \dot{\lambda}_-\dot{\phi}_- = f. \end{cases}$$

O determinante da matriz associada ao sistema é $W_{\phi_+, \phi_-} = \phi_+\dot{\phi}_- - \dot{\phi}_+\phi_- \neq 0$, sendo o Wronskiano entre ϕ_+ e ϕ_- . O resultado é que uma solução particular da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$ é dada por $z(t) = \lambda_+(t)\phi_+(t) + \lambda_-(t)\phi_-(t)$, onde os “parâmetros” $\lambda_{\pm}(t)$ são determinados pelos integrais

$$\boxed{\lambda_+(t) = -\int \phi_-(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt, \quad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt}$$

- Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em oportunos domínios, utilizando o método de variação dos parâmetros:

$$\ddot{x} + x = 1/\sin(t) \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t} \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t} \log t.$$

$$\ddot{x} + x = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \quad \ddot{x} + x = \tan(t) \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = \frac{e^{2t}}{\cos(2t)}.$$

3. **(coeficientes indeterminados)** O método dos coeficientes indeterminados permite determinar soluções particulares de uma EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

quando o segundo membro (a força externa) $f(t)$ é um “quase-polinómio”. Se

$$f(t) = p(t)e^{\lambda t} := p(t)e^{\rho t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) ,$$

onde $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k$ é um polinómio de grau k , e $\lambda = \rho + i\omega \in \mathbb{C}$, então a EDO admite uma solução particular

$$z(t) = t^n q(t) e^{\lambda t} ,$$

onde $q(t) = q_0 + q_1 t + \dots + q_k t^k$ é um polinómio de grau $\leq k$, se λ é uma raiz do polinómio característico $z^2 + 2\alpha z + \beta$ com multiplicidade $n \leq 2$. Usando o princípio de sobreposição, é possível determinar soluções particulares quando o segundo membro $f(t)$ é uma combinação linear de quase-polinómios.

- Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\ddot{x} + x = t \quad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 \quad \ddot{x} - 4x = e^{-2t}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^3 e^{-t} + e^t \quad \ddot{x} + x = \sin(t) \quad \ddot{x} + 4x = 2t \cos(t)$$

$$\ddot{x} + 9x = \sin(\pi t) \quad \ddot{x} + 4x = \cos(2t) \quad \ddot{x} - 4x = te^{-2t} \quad \ddot{x} + 4x = te^{-t} \cos(2t) .$$

4. **(representação integral da resposta de um oscilador)** Mostre que uma solução particular (com condições iniciais triviais) da equação do oscilador harmónico forçado $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau .$$

Calcule o limite quando $\omega \rightarrow 0$, e deduza que uma solução particular da equação de Newton $\ddot{x} = f(t)$ é

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) (t - \tau) d\tau .$$

Verifique e que uma solução particular da equação $\ddot{x} - k^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sinh(k(t - \tau)) d\tau .$$

5. **(partícula num campo de forças dependente do tempo)** Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} + F(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$, onde $2\alpha := 1/\tau \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajectória quando a força é

- $F(t) = g$, ou seja, constante,
- $F(t) = -t^2$,
- $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$,
- $F(t) = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\gamma_i t)$.

11 Oscilador harmónico

1. (**oscilador harmónico**) As pequenas oscilações de um pêndulo $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$ em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q,$$

onde $\omega > 0$ é a “frequência (angular) característica”. No espaço de fases $X = \mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}.$$

- Mostre que a solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- Mostre que as trajetórias podem ser escritas como

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (use as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$).

- Mostre que a energia

$$E(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E(q(t), p(t)) = 0$ para todo o tempo t .

- Mostre que a variável complexa $z := p + i\omega q$ satisfaz

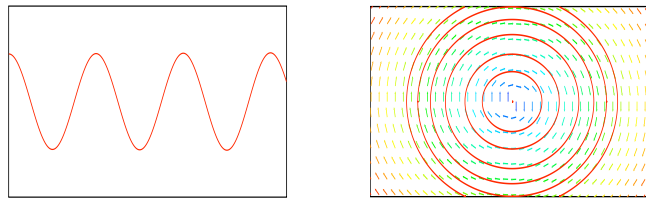
$$\dot{z} = i\omega z,$$

cujas soluções são $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$. Verifique que a energia do oscilador é dada por $E = \frac{1}{2}|z|^2$.

- Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.
- “Elimine” dt no sistema, e mostre que as curvas de fases são soluções da EDO exacta

$$p dp + \omega^2 q dq = 0,$$

equivalente a $dE = 0$.



Uma trajetória e retrato de fases do oscilador harmónico.

2. (**oscilações amortecidas**) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q,$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito (τ é o tempo de relaxamento). No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q - 2\alpha p \end{cases}.$$

- Mostre que a energia

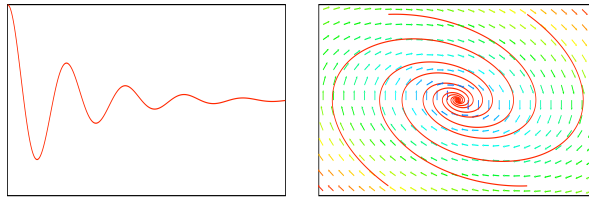
$$E(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

não é uma constante do movimento.

- Mostre que as soluções do sistema “sub-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 < \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + \varphi\right)$$

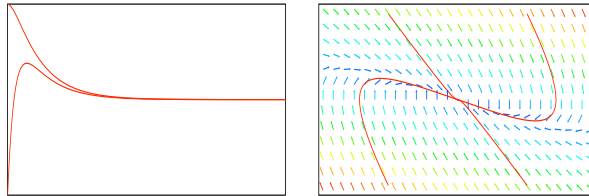
Observe que a frequência é $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \simeq \omega - \frac{\alpha^2}{2\omega} + \dots$ se $\alpha \ll \omega$, mas tende para zero (e consequentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \rightarrow \omega$.



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido sub-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema “super-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 > \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sinh\left(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t + \varphi\right)$$



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido super-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema “crítico”, ou seja, com $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!), são

$$q(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}.$$

3. (oscilações forçadas, batimentos e ressonância) Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + F_0 \cos(\gamma t).$$

- Mostre que, quando $\gamma^2 \neq \omega^2$, a solução geral é

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t)$$

onde A e ϕ são constantes arbitrárias.

- Verifique que a solução com condições iniciais triviais pode ser escrita

$$q(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} 2 \sin\left(\frac{\omega - \gamma}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega + \gamma}{2} t\right)$$

Quando a diferença $2\varepsilon := \omega - \gamma$ é pequena, ou seja $|\varepsilon| \ll |\omega|$, e portanto $\frac{\omega + \gamma}{2} \simeq \omega$, podemos estimar

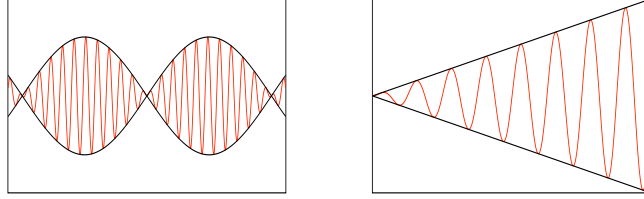
$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \cdot \sin(\omega t).$$

Portanto, a resposta do oscilador à força externa é uma “modulação” lenta (de período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) de uma oscilação com frequência fundamental ω . Este fenómeno é chamado “batimentos”. Calcule o limite da resposta $q(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Mostre que, quando $\gamma^2 = \omega^2$, a solução com condições iniciais triviais é

$$q(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) .$$

Este fenómeno, uma resposta cuja amplitude cresce linearmente no tempo, é chamado “ressonância”.



Batimentos e ressonância.

4. (oscilações forçadas em notação complexa) Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + F(t) .$$

A variável complexa $z := \dot{q} + i\omega q$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$\dot{z} - i\omega z = F(t) .$$

- Uma solução não trivial da EDO homogénea associada $\dot{y} - i\omega y = 0$ é $y(t) = e^{i\omega t}$. Use o método da variação das constantes para determinar a solução na forma de um produto $z(t) = \lambda(t)e^{i\omega t}$, onde λ é solução de $\dot{\lambda} = F(t)e^{-i\omega t}$. Deduza que

$$z(t) = e^{i\omega t} \left(z(t_0) + \int_{t_0}^t F(s)e^{-i\omega s} ds \right) .$$

- Verifique que a energia cedida ao oscilador por uma força $F(t)$ que actua num intervalo de tempos $(-\infty, \infty)$ é dada por [LL78]

$$E = \frac{1}{2} |z(\infty)|^2 = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2 .$$

5. (oscilações forçadas amortecidas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q + F(t) ,$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito, e a força é $F(t) = F_0 \sin(\gamma t)$.

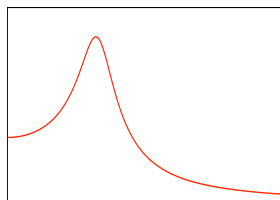
- Mostre que, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), a solução geral é

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi) + R(\gamma)F_0 \sin(\gamma t + \phi) ,$$

onde a amplitude A e a fases φ dependem dos dados iniciais,

$$R(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \quad \text{e} \quad \tan \phi = -\frac{2\alpha\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} .$$

A primeira parcela da solução representa um “regime transitório” (transiente), desprezável para grandes valores do tempo (i.e. para $t \gg 2\tau$). A segunda é dita “solução estacionária”, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função $R(\gamma)$ é dita *curva de ressonância* do sistema, pois representa o factor de proporcionalidade entre a amplitude da força e a amplitude da resposta.



Um exemplo de curva de ressonância.

- Mostre que a curva de ressonância $R(\gamma)$ atinge um máximo para o valor

$$\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}$$

da frequência, chamada *frequência de ressonância*. Observe que, se $\omega\tau \gg 1$, então $\gamma_r \simeq \omega(1 - 1/(4\tau^2\omega^2) + \dots)$.

- Discuta também os casos $\alpha^2 = \omega^2$ e $\alpha^2 > \omega^2$.

6. (**circuito RLC**) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R , indutância L e capacidade C , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$, e esboce as soluções (compare com a equação das oscilações amortecidas).
- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).
- Determine a frequência de ressonância do circuito.

7. (**impedância**) A resposta estacionária de um elemento de circuito a uma tensão alternada $V(t) = e^{i\omega t}$ é descrita pela *impedância*¹⁴ $Z = R + iX = |Z|e^{i\theta}$ (a parte real R é a resistência e a parte imaginária X a *reatância*), definida pela lei de Ohm generalizada

$$V = ZI$$

- Mostre que a impedância de um elemento de circuito RLC é

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

e determine o módulo e a fase de Z .

- Mostre que a impedância de dois elementos em série, de impedância Z_1 e Z_2 , é

$$Z = Z_1 + Z_2$$

e que a impedância de dois elementos em paralelo, de impedância Z_1 e Z_2 , é (a metade da média harmónica)

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

¹⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_impedance

12 Transformada de Laplace

1. (**transformada de Laplace**) Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua de ordem/crescimento exponencial $m \geq 0$, ou seja, tal que $|f(t)| \leq Me^{mt}$, $\forall t \geq 0$ e algum $M > 0$. A *transformada de Laplace* de $f(t)$ é a função holomorfa $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z)$ definida pelo integral impróprio

$$F(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt.$$

na *região de convergência* $\text{R.o.C.}(f) := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \Re(z) > m\}$ onde o integral é absolutamente convergente. A restrição de $F(z)$ à semi-recta real $s = \Re(z) > m$, é denotada por $F(s)$.

- Verifique as seguintes propriedades elementares da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\}(s) = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \mu \mathcal{L}\{g(t)\}(s) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ com } s > m,$$

$$\mathcal{L}\{f(\lambda t)\}(s) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}\{f\}(s/\lambda) \quad \forall \lambda > 0, \text{ com } s > \lambda m.$$

$$\mathcal{L}\{e^{kt} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s - k) \quad \forall k \in \mathbb{R}, \text{ com } s > m + k.$$

- Verifique as seguintes fórmulas para as transformadas de Laplace das funções elementares:

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2} \quad \dots \quad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{com } s > 0.$$

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\}(s) = \frac{1}{s - k} \quad \text{com } s > k.$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{com } s > 0.$$

- A função *salto unitário* em $\tau \geq 0$ é definida por

$$u_\tau(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < \tau \\ 1 & \text{se } t \geq \tau \end{cases}.$$

Verifique que

$$\mathcal{L}\{u_\tau(t)\}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s} \quad \text{com } s > 0.$$

- Verifique que a transformada de Laplace da potência $f(t) = t^q$, com $q \geq 0$, é

$$\mathcal{L}\{t^q\}(s) = \frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}} \quad \text{com } s > 0,$$

onde a *função Gama* é definida pelo integral impróprio

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{em } \Re(z) > 0.$$

Mostre que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, e que $\Gamma(1) = 1$. Deduza que Γ estende o factorial, ou seja, $\Gamma(n+1) = n!$ se $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2. (**transformada de Laplace de funções periódicas**) Se $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e periódica de período T então a sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} \quad \text{onde} \quad F_T(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

- Determine a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas: ¹⁵

$$f(t) = t - [t] \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 & \text{se } [t] \text{ é ímpar} \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} t - [t] & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 + [t] - t & \text{se } [t] \text{ é ímpar} \end{cases}$$

3. (transformada de Laplace e translações/retardos) Seja $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua de crescimento exponencial m . Mostre que, se $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m,$$

e portanto

$$\mathcal{L}\{f(t+a)\}(s) = e^{as}\mathcal{L}\{u_a(t)f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m.$$

4. (produto de convolução) Sejam f e $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ duas funções seccionalmente contínuas e de ordem exponencial m . O produto de convolução (para sistemas causais) de f e g é a função $f * g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- Verifique que $f * g = g * f$.
- Mostre que

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \text{com } s > m.$$

- Deduza que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m.$$

5. (derivadas e transformada de Laplace) Seja $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial m , e seja $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, com $s > m$, a sua transformada de Laplace.

- Mostre que $F(s)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e

$$\frac{d^n F}{ds^n}(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}(s).$$

- Mostre que, se f e as suas derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial m , então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\}(s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

6. (transformadas de Laplace de funções elementares) Determine a transformada de Laplace das seguintes funções $f(t)$:

$$\begin{aligned} &t^2 - 2t + 1 \quad 2 + e^{3t} - 5\sin(\pi t) \quad (t-1)e^{2t} \quad \sin(5t)\cos(4t) \\ &t^n e^{kt} \quad \cosh(\beta t) \quad \sinh(\beta t) \\ &e^{-\alpha t}\cos(\omega t) \quad e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \quad t\cos(\omega t) \quad t\sin(\omega t) \\ &u_a(t)e^{-\alpha t} \quad u_a(t)\sin(\omega t) \quad (1-u_a(t))t. \\ &A\sin(\omega t + \varphi) \quad Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi) \quad Ae^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \varphi) \\ &A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos(\gamma t) \quad A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2\omega}t\sin(\omega t) \\ &Ae^{-\alpha t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}}\sin(\gamma t + \phi) \end{aligned}$$

¹⁵ $[t]$ denota a parte inteira de t , ou seja, o maior inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq t$.

7. (transformada de Laplace inversa) Se $F(z)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$, então $f(t)$ é dita *transformada de Laplace inversa* de $F(z)$, e denotada por $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$. Nos pontos de continuidade de $f(t)$, vale a *fórmula de inversão de Mellin* (ou de *Bromwich*)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{zt} F(z) dz$$

onde $\beta > m$ e m é a ordem exponencial de $f(t)$.

- Mostre as seguintes propriedades da transformada de Laplace inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(s) + \mu G(s)\}(t) = \lambda \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) + \mu \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = u_a(t) \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a) \quad \forall a > 0,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\lambda}F(s/\lambda)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\lambda t) \quad \forall \lambda > 0,$$

- Determine uma transformada de Laplace inversa das seguintes funções $F(s)$:

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{s} + \frac{1}{s^4} & \frac{2}{s^2+9} & \frac{1}{s(s^2+1)} & \frac{s-1}{s^2-2s+5} \\ \frac{e^{-3s}}{s} & \frac{e^{-s}}{(s-2)^2} & \frac{e^{-4s}-e^{-7s}}{s^2} & \frac{1}{s^3+4s^2+3s} \end{array}$$

Transformadas de Laplace (para sistemas causais)

	(espaço dos tempos $t \geq 0$)	(espaço das frequências $s > m$)
	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m+\varepsilon-i\infty}^{m+\varepsilon+i\infty} e^{zt} F(z) dz$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
(linearidade)	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(s) + \mu G(s)$
(homotetias no espaço dos tempos)	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F(s/\lambda)$
(translações no tempo, retardo)	$f(t - \tau) u(t - \tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$
(translações na frequência)	$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(s + \alpha)$
(funções periódicas)	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ts}}$
(convolução)	$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$	$F(s) G(s)$
(integração no tempo)	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s)$
(integração na frequência)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_m^\infty F(s) ds$
(derivação no tempo)	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$\ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f^{(k)}(t)$	$s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$
(derivação na frequência)	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
(constante)	$1 = u(t - 0)$	$\frac{1}{s}$
(impulso unitário em $\tau \geq 0$)	$\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
(salto unitário em $\tau \geq 0$)	$u_\tau(t) = u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
(potências inteiras)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
(outras potências, $q \geq 0$)	t^q	$\frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$
(crescimento/decaimento exponencial)	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
(potências com decaimento)	$e^{-\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
(potências com decaimento retardadas)	$e^{-\alpha(t-\tau)} (t - \tau)^n u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s + \alpha)^{n+1}}$
(coseno e seno)	$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$	$\frac{1}{s - i\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(coseno e seno hiperbólicos)	$\cosh(\beta t) \quad \text{e} \quad \sinh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2} \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$
(oscilações amortecidas)	$e^{-\alpha t} e^{i\omega t} = e^{-\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$	$\frac{s + \alpha + i\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

13 Aplicações da transformada de Laplace

1. **(função de transferência e resposta impulsiva)** Seja $f(t)$ uma função seccionalmente contínua com crescimento exponencial, e considere a EDO linear de segunda ordem

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t).$$

Se $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ é a transformada de Laplace de $f(t)$, então a transformada de Laplace $X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$ da solução $x(t)$ com condições iniciais triviais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ satisfaz a equação algébrica

$$P(s)X(s) = F(s),$$

onde $P(s) = s^2 + \alpha s + \beta$ é o polinómio característico do operador diferencial linear $L = \frac{d^2}{dt^2} + \alpha \frac{d}{dt} + \beta$. A *função de transferência* é o quociente $H(s) := 1/P(s)$, e a *resposta impulsiva* é a sua transformada de Laplace inversa, ou seja, uma função $h(t)$ tal que

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt.$$

Portanto, $X(s) = H(s)F(s)$, e a resposta do sistema pode ser representada como o produto de convolução $x = h * f$, ou seja,

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau) d\tau.$$

- Mostre que a resposta impulsiva $h(t)$ é a solução da equação homogénea $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ com condição inicial $h(0) = 0$ e $\dot{h}(0) = 1$.
- Mostre que $h(t)$ é a solução da equação diferencial¹⁶ $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = \delta(t)$ com condição inicial trivial.
- Resolva, usando a transformada de Laplace, os seguintes problemas de Cauchy:

$$\dot{x} + x = 0 \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = -e^t \quad \text{com } x(0) = \sqrt{2}$$

$$\ddot{x} + 4x = 3t \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = -1 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = 1 \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 4x = 1 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = t - [t] \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \delta(t - t_0) \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1$$

$$\ddot{x} + \pi^2 x = 3(1 - u_{t_0}(t)) \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

2. **(oscilações)** Considere as equações das *oscilações forçadas* e das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t) \quad \text{e} \quad \ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2 q = f(t).$$

¹⁶A *função delta de Dirac* $\delta(t)$ é definida pela identidade formal

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\delta(t)dt = f(0),$$

onde $f(t)$ é uma função contínua arbitrária. A sua transformada de Laplace é $\int_0^\infty e^{-st}\delta(t)dt = 1$, e a transformada de Laplace de $\delta(t - \tau)$ é $\int_0^\infty e^{-st}\delta(t - \tau)dt = e^{-\tau s}$. De facto, δ não é uma função, mas um funcional linear $\langle \delta |$ definido no espaço das funções contínuas $|f\rangle$, que associa à função $f(t)$ o valor $\langle \delta | f \rangle = \int_{-\infty}^\infty f(t)\delta(t)dt = f(0)$.

- Determine a função de transferência e a resposta impulsiva dos dois sistemas.
- Determine a solução do problema de Cauchy com condição inicial $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, quando a força é

$$f(t) = f_0\delta(t - t_0) \quad f(t) = f_0u_{t_0}(t) \quad f(t) = f_0(1 - u_{t_0}(t)) \quad f(t) = f_0\cos(\gamma t).$$

3. (circuito RL) Considere a equação

$$L\dot{I} + RI = V,$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RL alimentado com tensão $V(t)$.

- Determine a função de transferência do circuito.
- Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a V_0 , é desligado no instante $t_0 > 0$, dada uma corrente inicial (lei de Ohm) $I(0) = V_0/R$.
- Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante $t_0 > 0$ e fornece uma tensão constante $V(t) = V_0u_{t_0}(t)$ ou alternada $V(t) = V_0u_{t_0}(t)\sin(\omega t)$, dada uma corrente inicial nula.

4. (circuito RCL) Considere a equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RLC alimentado com tensão $V(t)$.

- Determine a função de transferência do circuito e uma fórmula integral para a corrente $I(t)$, dada uma corrente inicial $I(0) = 0$ e $\dot{I}(0) = 0$.
 - Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a V_0 , é desligado no instante $t_0 > 0$, dada uma corrente inicial estacionária $I(0) = V_0/R$ e $\dot{I}(0) = 0$.
 - Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante $t_0 > 0$ e fornece uma tensão constante $V(t) = V_0u_{t_0}(t)$ ou alternada $V(t) = V_0u_{t_0}(t)\sin(\omega t)$, dada uma corrente inicial $I(0) = 0$ e $\dot{I}(0) = 0$.
5. (injeções) A quantidade de medicamento que circula no sangue de um paciente decresce segundo o modelo exponencial $\dot{x} = -\beta x$, com $\beta > 0$. Uma injeção com dose $a > 0$ no instante τ é idealizada como sendo um impulso instantâneo $a\delta_\tau(t)$, e portanto

$$\dot{x} = -\beta x + a\delta_\tau(t).$$

- Determine a quantidade de medicamento $x(t)$ que circula no sangue de um paciente que recebe uma série de injeções nos instantes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, com doses $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente, dada uma quantidade inicial $x(0) = 0$.

Formulário primitivas

	(função)	("uma" primitiva)
	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x)$
(por substituição)	$f(y(x))y'(x)$	$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy$
(por partes)	$f(x)g'(x)$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
(constantes)	λ	$\int \lambda dx = \lambda x$
(potências, $\alpha \neq -1$)	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
(logaritmo)	$1/x$	$\int \frac{dx}{x} = \log x $
(exponencial)	e^x	$\int e^x dx = e^x$
(seno)	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
(coseno)	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)$
(tangente)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
(cotangente)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cotan(x)$
(arco cujo seno)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$
(arco cuja tangente)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
(exponencial $\times$ seno)	$e^{\alpha x} \sin(\beta x)$	$\int e^{\alpha x} \sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$
(exponencial $\times$ coseno)	$e^{\alpha x} \cos(\beta x)$	$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$
(coseno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\cos(nx) \cos(mx)$	$\int \cos(nx) \cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ seno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx) \sin(mx)$	$\int \sin(nx) \sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx) \cos(mx)$	$\int \sin(nx) \cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)}$
($x \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x \cos(nx)$	$\int x \cos(nx)dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n}$
($x \times$ seno, $n \neq 0$)	$x \sin(nx)$	$\int x \sin(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n}$
($x^k \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x^k \cos(nx)$	$\int x^k \cos(nx)dx = \frac{x^k \sin(nx)}{n} - \frac{k}{n} \int x^{k-1} \sin(nx)dx$
($x^k \times$ seno, $n \neq 0$)	$x^k \sin(nx)$	$\int x^k \sin(nx)dx = -\frac{x^k \cos(nx)}{n} + \frac{k}{n} \int x^{k-1} \cos(nx)dx$

14 Equações diferenciais parciais

1. (equações diferenciais parciais) Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é uma lei

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_{x_i x_j x_k}, \dots) = 0$$

para algumas (i.e. um número finito de) derivadas parciais

$$u_{x_i x_j \dots x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} u$$

de um campo $u(x_1, \dots, x_n)$, escalar ou vetorial, definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$. Dependendo do significado físico das variáveis independentes $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (posição, tempo, velocidade, energia, ...), é posto o problema de determinar a/as solução/ões do *problema com condições iniciais*

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, t_0) = \psi(\mathbf{x}), \quad \dots$$

se as variáveis independentes são $(\mathbf{x}, t) := (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, t_0 é um “tempo inicial” e $\varphi, \psi, \dots$ são funções dadas, e/ou do *problema com condições de fronteira*

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{y}) \quad \text{quando } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \in \partial D,$$

se as variáveis independentes são $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, ∂D denota a fronteira do domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ e ϕ é uma função dada.

- Determine a solução da EDP

$$u_t = 0$$

para o campo escalar $u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$.

- Mostre que as soluções de classe C^2 da EDP

$$u_{xy} = 0$$

no plano $\mathbb{R}^2$ são $u(x, y) = f(x) + g(y)$, onde f e g são funções arbitrárias de classe C^2 .

2. (derivadas, translações e ondas planas) Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, de grau $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, o operador diferencial ∂^α , que actua sobre o espaço das funções C^∞ (ou suficientemente diferenciáveis) definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$, é definido por

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

As *ondas planas*, ou *harmónicas*, são as funções definidas por

$$e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle},$$

com $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in (\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^n$ dito “vetor de onda” (às vezes é útil usar a normalização $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{2\pi i \langle \xi, \mathbf{x} \rangle}$).

- Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle}$ são funções próprias dos operadores diferenciais ∂^α , com $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com valores próprios $(i\xi)^\alpha := (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n}$, ou seja,

$$\partial^\alpha e_\xi = (i\xi)^\alpha e_\xi.$$

- O operador de *translação* T_a , com $a \in \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(T_a f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{a}).$$

Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle}$ são também funções próprias dos operadores de translação com valores próprios $\lambda_a(\xi) = e^{i\langle \xi, \mathbf{a} \rangle}$, ou seja,

$$T_a e_\xi = e^{i\langle \xi, \mathbf{a} \rangle} e_\xi.$$

- O operador de *modulação* M_ξ , com $\xi \in (\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(M_\xi f)(\mathbf{x}) := e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} f(\mathbf{x}).$$

Mostre que $T_{\mathbf{a}} \circ M_\xi = e^{i\langle \xi, \mathbf{a} \rangle} M_\xi \circ T_{\mathbf{a}}$.

3. (operadores diferenciais lineares, símbolos) Um *operador diferencial linear* de grau $\leq k$, definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é um polinómio

$$P(\partial, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha,$$

em ∂ , com “coeficientes” $a_\alpha(\mathbf{x})$ que são funções $a_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$. O operador é invariante por translações se os coeficientes a_α não dependem do ponto $\mathbf{x}$, i.e. são constantes.

As “ondas planas” $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle}$, com “vector de onda” $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, são funções próprias do operador linear com coeficientes constantes $L = P(\partial)$, ou seja, satisfazem

$$Le_\xi = \sigma(\xi) e_\xi,$$

onde o valor próprio, o polinómio $\sigma(\xi) := P(i\xi)$, é dito *símbolo* do operador L . O *símbolo principal* é o termo (polinómio homogéneo) de grau máximo, $\sigma_p(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \cdot (i\xi)^\alpha$. O operador $L = P(\partial)$ é dito *elíptico* se o seu símbolo principal só se anula na origem, i.e. se $\sigma_p(\xi) \neq 0$ para todos os $\xi \neq 0$.

Em geral, o símbolo do operador linear $L = P(\partial, \mathbf{x})$ é a função que a cada $\mathbf{x} \in X$ associa o polinómio $\xi \mapsto P(i\xi, \mathbf{x})$.

- Determine os símbolos dos seguintes operadores, e determine os domínios onde são elípticos

$$\begin{array}{ccc} \partial_{xx} + \partial_{yy} & \partial_{xx} - \partial_{yy} & \partial_t - \partial_{xx} \\ \partial_{tt} - \partial_{xx} + \partial_x & \partial_{xx} - x\partial_{yy} & \end{array}$$

4. (grupo de Heisenberg)

15 EDPs de primeira ordem*

1. (EDP lineares de primeira ordem e características) Uma EDP linear de primeira ordem é uma lei

$$a_1(\mathbf{x})u_{x_1} + \cdots + a_n(\mathbf{x})u_{x_n} = f(\mathbf{x})$$

para o campo escalar $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})$ e $f(x)$ são funções dadas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A EDP homogênea associada é

$$a_1(\mathbf{x})u_{x_1} + \cdots + a_n(\mathbf{x})u_{x_n} = 0.$$

O campo característico é o campo de vetores $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := (a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}))$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. As (curvas) características são as curvas integrais de $\mathbf{v}$, as soluções da EDO $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ denota a característica com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, então a derivada de Lie do campo escalar ϕ ao longo do campo vectorial $\mathbf{v}$ é

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\phi)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=0} = a_1(\mathbf{x})\phi_{x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + a_n(\mathbf{x})\phi_{x_n}(\mathbf{x}).$$

Em particular: as soluções do problema homogêneo $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u = 0$ são as funções u constantes ao longo das curvas características. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma hiper-superfície transversal ao campo característico $\mathbf{v}$ (ou seja, definida localmente por $\Sigma = \{f(\mathbf{x}) = 0\}$, com $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}f \neq 0$), então o problema não-homogêneo $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u = f$ com condição inicial $u|_{\Sigma}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y})$ ($\forall \mathbf{y} \in \Sigma$) admite uma solução local numa vizinhança de Σ : num sistema de coordenadas tal que $\mathbf{v} = (1, 0, \dots, 0)$ e $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, a solução local é

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

- Determine as características da EDP

$$u_x = f(x, y)$$

para o campo $u(x, y)$ definido no plano $\mathbb{R}^2$. É possível resolver o problema com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$?

- Determine as características da EDP

$$xu_x + u_y = 0$$

para o campo $u(x, y)$ definido no plano $\mathbb{R}^2$, e resolva o problema com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$.

- Descreva as soluções da EDP

$$xu_x + yu_y = 0$$

no plano $\mathbb{R}^2$ e no domínio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Descreva as soluções da EDP

$$xu_x = yu_y$$

no plano $\mathbb{R}^2$.

2. (equação de transporte) Considere a equação de transporte

$$u_t + vu_x = 0$$

para o campo $u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, onde $v(x, t)$ é um campo de velocidades dado.

- Determine as características.
- Mostre que, se o campo de velocidades $v(x, t) = v(t)$ depende apenas do tempo, então uma solução da equação de transporte com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ é

$$u(x, t) = \varphi\left(x + \int_0^t v(s) ds\right).$$

3. (EDP quase-lineares de primeira ordem e características) Uma EDP quase-linear de primeira ordem é uma lei

$$a_1(\mathbf{x}, u) u_{x_1} + \cdots + a_n(\mathbf{x}, u) u_{x_n} = f(\mathbf{x}, u)$$

para o campo escalar $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $a_1(\mathbf{x}, u), \dots, a_n(\mathbf{x}, u)$ e $f(\mathbf{x}, u)$ são funções dadas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. A EDP homogénea associada é

$$a_1(\mathbf{x}, u) u_{x_1} + \cdots + a_n(\mathbf{x}, u) u_{x_n} = 0.$$

O campo característico é o campo de vectores $\mathbf{V}(\mathbf{x}, u) := (a_1(\mathbf{x}, u), \dots, a_n(\mathbf{x}, u), f(\mathbf{x}, u))$ em Ω . As (curvas) características são curvas integrais do campo característico, as soluções da EDO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\mathbf{x}, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_n(\mathbf{x}, u) \\ \dot{u} = f(\mathbf{x}, u) \end{cases},$$

ou seja, eliminando o tempo t , de

$$\frac{dx_1}{a_1(\mathbf{x}, u)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(\mathbf{x}, u)} = \frac{du}{f(\mathbf{x}, u)}.$$

4. (equação de Euler) Considere um fluido de partículas não interagentes na recta. O campo de velocidades do fluido é $v(x, t) := \dot{x}(t)$, onde $s \mapsto x(s)$ denota a trajectória da partícula que passa pelo ponto x no instante t .

- Mostre que a equação de Newton $\ddot{x} = 0$ implica que $v(x, t)$ satisfaz a equação de Euler

$$v_t + vv_x = 0.$$

- Mostre que a equação pode ser escrita

$$v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(v^2) = 0.$$

- Mostre que, se $x(t)$ é uma solução da EDO $\dot{x} = v(x, t)$, então a função $u(t) := v(x(t), t)$ é uma constante. Portanto, o vector $(x(t), u(t))$ satisfaz a (o sistema de) EDO característica

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

- Resolva o sistema característico, e deduza que uma solução implícita da equação de Euler $v_t + vv_x = 0$ com condição inicial $v(x, 0) = \varphi(x)$ é dada por

$$v(x + t\varphi(x), t) = \varphi(x),$$

desde que t seja suficientemente pequeno.

- O que acontece para grandes valores de t quando o perfil de velocidades inicial $v(x, 0)$ não é constante?

16 EDPs lineares de segunda ordem: Laplace, ondas e calor

1. (classificação dos operadores diferenciais lineares de grau 2) O símbolo do operador diferencial linear de grau dois

$$L = P(\partial) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0,$$

definido num domínio de $\mathbb{R}^n$ é o polinómio quadrático

$$\sigma(i\xi) := P(i\xi) = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \xi_i \xi_j + i \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \xi_i + a_0,$$

onde $A := (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz simétrica que define a “forma quadrática”

$$-\sigma_p(i\xi) = \langle \xi, A\xi \rangle,$$

dita *símbolo principal*. A forma quadrática pode ser diagonalizada (por um operador ortogonal e depois umas dilatações/contrações) e transformada na forma canónica, associada a uma matriz diagonal com valores próprios ± 1 e 0. Portanto, existe uma base de $\mathbb{R}^n$ tal que o símbolo principal do operador L assume a forma canónica

$$-\sigma_p(i\xi) = (\xi_1 + \cdots + \xi_p) - (\xi_{p+1} + \cdots + \xi_{p+q}),$$

onde $p + q \leq n$, e $p - q$ é a “assinatura” da forma quadrática.

O operador L é dito *elíptico* se o seu símbolo principal for uma forma quadrática definida (positiva ou negativa), ou seja equivalente a $\pm(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)$.

O operador L é dito *hiperbólico* se o seu símbolo principal for uma forma quadrática não-degenerada de assinatura $n - 2$, ou seja equivalente a $\pm(\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 - \xi_n^2)$.

O operador L é dito *parabólico* se o seu símbolo principal for uma forma quadrática degenerada com núcleo uni-dimensional e definida (positiva ou negativa) no complemento ortogonal do núcleo, ou seja equivalente a $\pm(\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2)$.

2. (Laplaciano, equação de Laplace, funções harmónicas) O Laplaciano (ou operador de Laplace) no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o operador diferencial linear de grau dois $\Delta := \text{div} \circ \text{grad}$, definido, em coordenadas Cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, por

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função real de classe C^2 . A equação de Laplace para o campo escalar $u(x)$ definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é a EDP

$$\Delta u = 0$$

As soluções da equação de Laplace são ditas *funções harmónicas*.

- Determine a símbolo de Δ em $\mathbb{R}^n$, e mostre que o Laplaciano é um operador elíptico.
- Quais funções satisfazem a equação de Laplace $u''(x) = 0$ na reta?
- Determine as soluções da equação de Laplace $u''(x) = 0$ no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira $u(a) = c$ e $u(b) = d$.
- Verifique que

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Verifique que (o potencial elétrico/gravitacional gerado por uma carga/massa posta na origem)

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3. (equação de calor) A equação de calor/difusão para o campo $u(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, é

$$u_t = \beta \Delta u$$

onde Δ é o Laplaciano no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e $\beta > 0$ é um coeficiente de difusão.

- Mostre que a substituição $\tau = \beta t$ transforma a equação do calor acima em $u_\tau = \Delta u$.
- Determine o símbolo do operador de difusão (ou transporte)

$$L := \partial_t - \beta \Delta,$$

e mostre que é parabólico.

- Verifique que as funções harmônicas $u(\mathbf{x})$ são soluções estacionárias (i.e. independentes do tempo t) da equação de calor.
- Verifique que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor $u_t = \beta u_{xx}$ em $t > 0$.

- Verifique que

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor $u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy})$ em $t > 0$.

4. (equação de onda) A equação de onda para o campo $u(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, é

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

onde c é a velocidade de propagação das ondas.

- Mostre que a substituição $\tau = ct$ transforma a equação de onda em $u_{\tau\tau} = \Delta u$.
- Determine o símbolo do operador de d'Alembert

$$\square := \frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \Delta,$$

e mostre que é hiperbólico.

- Verifique que as “ondas planas”

$$u_\xi(\mathbf{x}, t) := A e^{i(\xi \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções da equação das ondas $u_{tt} = c^2 \Delta u$ no “espaço-tempo” $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, se a frequência ω e o número de onda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazem a relação de dispersão $\omega^2 = c^2 \|\xi\|^2$.

5. (solução de d'Alembert da equação de onda/traveling waves) A mudança de variáveis independentes $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$, onde $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$, transforma a equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

na forma canônica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0,$$

cujas soluções gerais são uma sobreposição

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

de duas ondas viajantes (traveling waves) com velocidades $\pm c$ e perfis f e g (duas funções diferenciáveis arbitrárias). A solução da equação de onda na reta real com condições iniciais

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x).$$

é dada pela fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy$$

- Mostre que, se as condições iniciais $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são nulas fora dum intervalo $[-L, L]$, então a solução $u(x, t)$ é nula fora do intervalo $[-L - ct, L + ct]$, e interprete este facto.
- Determine uma solução quando as condições iniciais são

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(2\pi x),$$

ou

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Mostre que, se as condições iniciais $u(x, 0) = \phi(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ são funções ímpares, então a solução de d'Alembert $u(x, t)$ é uma função ímpar de x para cada tempo t . Use esta observação para resolver o problema das ondas na semi-recta $x \geq 0$ com condição de fronteira nula $u(0, t) = 0$.
6. (difusão/movimento Browniano) No modelo do movimento Browniano proposto por Einstein em 1905¹⁷, a densidade de probabilidade $P(x, t)$ de encontrar a partícula Browniana na posição x no tempo t sabendo que ela estava na posição 0 no tempo 0 é a solução não-negativa da equação da difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

tal que $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, t) = 0$ para todo o $x \neq 0$, e $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$ para todo o tempo $t > 0$. O “coeficiente de difusão” é $\beta = \frac{RT}{N\alpha}$, onde R é a constante de gás perfeito, T a temperatura absoluta, N o número de Avogadro, e $\alpha = 6\pi\eta\rho$ um coeficiente de fricção (que depende da viscosidade dinâmica η do líquido e do raio ρ da partícula Browniana).

- Verifique que a Gaussiana

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta t}} e^{-x^2/(2\beta t)}.$$

resolve o problema do movimento Browniano.

- Verifique que

$$P_{t+s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) P_s(x - y) dy$$

e interprete este facto.

- Calcule o caminho quadrático médio da partícula Browniana no tempo t , definido por

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_t(x) dx.$$

¹⁷A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **17**, 549, 1905 [English translation in A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover, New York, 1956].

7. (equação de Korteweg-de Vries) Considere a equação de Korteweg-de Vries¹⁸ (KdV)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0,$$

que descreve ...

- Mostre que $u(x, t) := \phi(x - vt - x_0)$ é uma solução da KdV se ϕ é uma solução da EDO $-v\phi' + \phi''' + 6\phi\phi' = 0$, e portanto se existe uma constante c tal que ϕ é uma solução da equação de Newton

$$\phi'' = -3\phi^2 + v\phi + c$$

- Verifique que a “secante hiperbólica”

$$\operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

satisfaz a EDO

$$f'' = -2f^2 + f$$

com condições de fronteira $f(\pm\infty) = 0$ (ou seja, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$).

- Deduza que

$$u(x, t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right)$$

é uma solução da KdV, que descreve uma “onda solitária” (*soliton*), localizada numa vizinhança de $x_0 + vt$, que viaja com velocidade v .

8. (equação de Burgers) Considere a equação de Burgers

$$u_t = \mu u_{xx} + uu_x$$

com viscosidade $\mu > 0$.

- (substituição de Cole¹⁹-Hopf²⁰) Mostre que se $v(x, t)$ é uma solução da equação de calor $v_t = \mu v_{xx}$, então

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \log v = \frac{2}{v} v_x$$

é uma solução da equação de Burgers $u_t = \mu u_{xx} + uu_x$.

¹⁸D.J. Korteweg and G. de Vries, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Wave, *Philosophical Magazine* **39** (1894), 422-443

¹⁹J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), 225-236.

²⁰E. Hopf, The partial differential equation $ut + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201-230.

17 Separação de variáveis, harmônicas e modos

1. (**problema de Sturm-Liouville**) O operador de Sturm-Liouville definido pelas funções $p(x)$ e $q(x)$ no intervalo $[a, b]$ (q contínua e p com derivada contínua), é

$$Lf := (pf')' + qf$$

Por exemplo, se $q(x) = 0$ e $p(x) = 1$, então o operador de Sturm-Liouville é o Laplaciano $\Delta f := f''$. Seja $\mathbf{E}$ o espaço euclidiano das funções reais integráveis no intervalo $[a, b]$ com condições de fronteira $f(a) = f(b) = 0$ ou $f'(a) = f'(b) = 0$, munido do produto interno $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$. O operador de Sturm-Liouville pode ser pensado como um operador simétrico (i.e. auto-adjunto) $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{E}$ definido no subespaço $\mathbf{V} \subset \mathbf{E}$ das funções com duas derivadas contínuas. O *problema de Sturm-Liouville* consiste em determinar os valores próprios $\lambda \in \mathbb{R}$ e as correspondentes funções próprias $f_\lambda(x)$, soluções de

$$Lf_\lambda = \lambda f_\lambda$$

no espaço $\mathbf{V}$. Os valores próprios são reais, e funções próprias correspondentes a valores próprios distintos são ortogonais.

- Mostre que o operador de Sturm-Liouville é simétrico, i.e. $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$ para todos os $f, g \in \mathbf{V}$ (integre por partes duas vezes, usando as condições de fronteira).
- Determine os valores próprios e as funções próprias do Laplaciano $\Delta f := f''$, i.e. as soluções de

$$f'' = -\lambda f,$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $f(0) = f(\pi) = 0$.

- Determine os valores próprios e as funções próprias do Laplaciano $\Delta f := f''$, i.e. as soluções de

$$f'' = -\lambda f,$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

- Determine os valores próprios e as funções próprias do Laplaciano $\Delta f := f''$, i.e. as soluções de

$$f'' = -\lambda f,$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $f(0) - f'(0) = f(\pi) - f'(\pi) = 0$.

- Mostre que as funções próprias $f(r)$, com $0 < r < \infty$, de

$$r^2 f'' + r f' = n^2 f$$

quando $n \in \mathbb{Z}$, são $f_\pm(r) = r^{\pm n}$ se $n \neq 0$, e $f_0(r) = 1$ ou $u_0(r) = \log r$ se $n = 0$.

2. (**separação de variáveis**) O método de *separação de variáveis* para determinar soluções de uma EDPs linear homogênea $Lu = 0$, por exemplo nas variáveis x e t , consiste em substituir a conjectura

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

na equação e deduzir $(L_x X)T = (L_t T)X$, onde L_x e L_t são operadores diferenciais lineares nas variáveis x e t , respectivamente. A igualdade então implica que existe uma constante λ tal que X e T satisfazem as equações de Sturm-Liouville

$$L_x X = \lambda X \quad \text{e} \quad L_t T = \lambda T.$$

As condições de fronteira determinam certos valores próprios λ e as correspondentes funções próprias admissíveis $X_\lambda(x)$ e $T_\lambda(t)$, e portanto as soluções separáveis $X_\lambda(x)T_\lambda(t)$. Pelo princípio de sobreposição são também soluções combinações lineares (finitas)

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t),$$

com $c_{\lambda} \in \mathbb{R}$.

- Determine, se possível, soluções separáveis das seguintes EDPs.

$$\begin{array}{lll} u_x + u_y = 0 & tu_{xx} + u_t = 0 & u_t = 2u_x \\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 & u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0 & u_{tx} = u_x \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & yu_{xx} + xu_{yy} + xyu_{zz} = 0 & u_{tx} = 0 \end{array}$$

3. (corda vibrante e harmônicas) As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ são modeladas pela equação de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

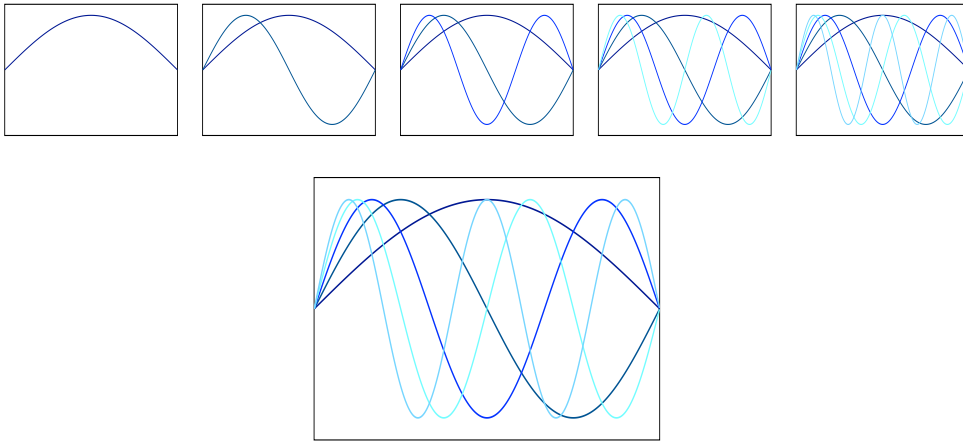
com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$, onde $u(x, t)$ denota o deslocamento transversal da corda na posição $x \in [0, \ell]$ e no tempo t , e $c = \sqrt{k/\rho}$. As soluções separáveis do problema da corda vibrante são as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &:= \left(a_n \cos(2\pi\nu_n t) + b_n \sin(2\pi\nu_n t) \right) \sin(2\pi x/\lambda_n) \\ &= A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

onde a_n e b_n , ou a amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e a fase $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$, são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n = \frac{c}{2\ell} n \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

respetivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = \frac{c}{2\ell}$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = \frac{cn}{2\ell}$, são ditas *n-ésimas harmônicas* da corda.



Perfis das primeiras 5 harmônicas.

Por exemplo, se a primeira harmônica é o A_4 de 440 Hz, então a segunda é o A_5 de 880 Hz, a terceira está próxima do E_6 de 1318.5 Hz, a quarta é o A_6 de 1760 Hz, a quinta está próxima do G_7 de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do E_7 de 2637 Hz, a sétima está próxima do C_8 de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmônicas contêm a “fundamental” A, a “quinta justa” E e a “terça maior” C $^\sharp$, as três notas (“tríade maior”) do “acorde maior”!²¹

- Mostre que a energia

$$E := \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$ (calcule a derivada e integre por partes o segundo termo).

²¹To learn more about music, you may want to visit <http://www.phys.unsw.edu.au/music/>

- Verifique que as soluções separáveis $u(x, t) = X(x)T(t)$ da equação da corda vibrante com $X(0) = X(\ell) = 0$ são as ondas estacionárias $u_n(x, t)$, com $n = 1, 2, 3, \dots$
- Mostre que a energia de uma onda estacionária

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n)$$

é dada por

$$E_n = \pi^2 M A_n^2 \nu_n^2,$$

onde $M = \rho\ell$ é a massa da corda.

- Determine as vibrações de uma corda de comprimento $\ell = \pi$ dadas as condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \sin(4x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 \sin(x) - \sin(2x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(3x).$$

- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

4. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

em $0 \leq x \leq \ell$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Mostre que a conjectura $u_n(x, t) = q_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência $\omega_n^2 = (\pi c n / \ell)^2$.

- Deduza as soluções separáveis do problema.

5. (condução de calor com temperatura constante na fronteira e modos) Considere a condução de calor num fio condutor de comprimento ℓ e difusividade térmica β . A temperatura $u(x, t)$ na posição x e no tempo t verifica a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- Verifique que a função

$$a + \frac{b-a}{\ell} x$$

é uma solução estacionária da equação de calor com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\ell, t) = b$. Deduza que a solução da equação com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\ell, t) = b$ é igual a

$$u(x, t) = a + \frac{b-a}{\ell} x + v(x, t),$$

onde $v(x, t)$ é a solução da equação com condições de fronteira nulas $v(0, t) = 0$ e $v(\ell, t) = 0$.

- Verifique que umas soluções da equação de calor com condições de fronteira nulas $u(0, t) = 0$ e $u(\ell, t) = 0$ são os *modos*

$$u_n(x, t) = s_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde s_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N s_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

também é solução da equação com condições de fronteira nulas $u(0, t) = 0$ e $u(\ell, t) = 0$, e determine o limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

- Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica $10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$ é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de 0°C . Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}} x\right) \times 60^\circ\text{C},$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a 4°C ? O que acontece para grandes valores do tempo?

E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de 0°C e 100°C , respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

- Determine as soluções da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{com } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

6. (condução de calor com fluxo nulo na fronteira) Considere a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

em $0 \leq x \leq \ell$, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0$, que descreve o perfil de temperatura de um fio condutor termicamente isolado.

- Mostre que o “calor”

$$Q(t) := C \int_0^\ell u(x, t) dx,$$

onde $C = mc$ é a capacidade térmica do condutor (o produto da massa m e o calor específico c) é constante, ou seja, que $\frac{d}{dt} Q(t) = 0$.

- Verifique que umas soluções são os modos

$$u_n(x, t) = c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

onde c_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

também é uma solução, e determine o limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

7. (calor com dispersão) Considere a equação de calor com dispersão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u$$

no intervalo $0 \leq x \leq \ell$ com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ para todos os $t \geq 0$.

- Determine as soluções separáveis do problema.
- Verifique que a substituição $v(x, t) := u(x, t)e^{-t}$ transforma a equação acima na equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

8. (ondas e calor no intervalo infinito) Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda e de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com $x \in \mathbb{R}$.

9. (equação de Schrödinger livre) A “função de onda” $\psi(x, t)$ de uma partícula livre não-relativística satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

onde m é a massa da partícula e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida.

- Determine soluções separáveis quando $x \in [0, \ell] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira nulas, $\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0$.
- Mostre que as soluções separáveis e limitadas na recta são proporcionais a

$$\psi_E(x, t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}},$$

onde $E \geq 0$ e $p = \sqrt{2mE}$.

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\langle \xi, x \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^3$ se a frequência ω e o número de onda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem a relação de dispersão $\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \|\xi\|^2$.

10. (equação de Klein-Gordon) A “função de onda” $\psi(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$, de uma partícula livre relativística de massa própria m satisfaz a equação de Dirac, e portanto a equação de Klein-Gordon (em unidades de Planck²²)

$$-\psi_{tt} + \Delta \psi = m^2 \psi.$$

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\langle \xi, \mathbf{x} \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Klein-Gordon em $\mathbb{R}^3$ se a frequência ω e o número de onda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem a relação de dispersão $\omega^2 - \|\xi\|^2 = m^2$.

²² $c = 1, \hbar = 1, \dots$

18 Séries de Fourier

1. (séries de Fourier de uma função holomorfa) Se $g(z)$ é uma função holomorfa num domínio que contém a circunferência unitária $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$, então a sua expansão em série de Laurent pode ser escrita, nos pontos $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}$ (i.e. com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), como

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Os “coeficientes” c_n podem ser definidos desde que a função $f(\theta) := g(e^{i\theta})$ seja integrável no círculo $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

2. (séries de Fourier complexas) Seja $f(\theta)$ é uma função integrável em $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ou seja, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período 2π (e portanto determinada pelos seus valores no intervalo $[-\pi, \pi]$). A *série de Fourier complexa* de $f(\theta)$ é a série formal

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta}$$

(o símbolo “ $\sim$ ” é apenas uma notação!), onde os *coeficientes de Fourier complexos* de $f(\theta)$ são

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

É posto o problema de decidir se as “somadas parciais (da série de Fourier)”, os polinómios trigonométricos

$$S_N(\theta) := \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{in\theta},$$

são convergentes num certo sentido, e, se sim, se a soma $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\theta)$ é igual a função $f(\theta)$ pelo menos num conjunto “grande” de pontos θ .

O *lema de Riemann-Lebesgue* afirma que os coeficientes de Fourier de uma função integrável convergem $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Se $f(\theta)$ é de classe C^k , então os coeficientes de Fourier da sua k -ésima derivada $f^{(k)} := \frac{d^k f}{dx^k}$ são

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$$

e, em particular, $|n|^k \widehat{f}(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- Mostre que se $f(\theta)$ é par, então $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ para todos os $n \geq 0$.
- Mostre que se $f(\theta)$ é ímpar, então $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$ para todos os $n \geq 0$.
- Determine as séries de Fourier complexas das seguintes funções periódicas de período 2π definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$ por (as soluções estão no formulário!):

$$f(\theta) = \theta, \quad f(\theta) = |\theta|, \quad f(\theta) = \theta^2,$$

$$\Theta(\theta) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}, \quad 2\Theta(\theta) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}.$$

- Mostre que a série de Fourier complexa da função $S(\theta)$ (chamada *sawtooth*), periódica de período 2π e definida por

$$S(\theta) = \begin{cases} \pi - \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -\pi - \theta & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq \theta < \pi$, é

$$S(\theta) \sim \frac{1}{i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{n} \sim 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n\theta).$$

- Calcule as séries de Fourier de $|\theta|$ e de θ^2 em $\theta = 0$ e deduza as identidades

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{e} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. (*séries de Fourier*) Seja $f(x)$ é uma função integrável no toro $\mathbb{R}/2\ell\mathbb{Z}$, ou seja, uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período 2ℓ (e portanto determinada pelos seus valores no intervalo $[-\ell, \ell]$). A *série de Fourier (real)* de $f(x)$ é a série formal

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são definidos pelos integrais

$$a_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \quad \text{e} \quad b_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

Se $f(x)$ é uma função de classe C^1 , então as soma parciais da sua série de Fourier convergem uniformemente para $f(x)$.

- Mostre que, se $\ell = \pi$, os coeficientes de Fourier reais de $f(x)$ são

$$a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \quad \text{e} \quad b_n = i \left(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n) \right)$$

- Mostre que se $f(x)$ é par, então $b_n = 0$ para todos os $n \geq 1$.
 - Mostre que se $f(x)$ é ímpar, então $a_n = 0$ para todos os $n \geq 0$.
4. (*séries de Fourier de senos*) A *série de Fourier de senos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão ímpar 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

- Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, das extensões ímpares e 2π -periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad 1 - \cos(2\theta) \quad f(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \pi - \theta & \text{se } \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

5. (*séries de Fourier de cosenos*) A *série de Fourier de cosenos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão par 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

- Determine as séries de Fourier de co-senos (ou seja, das extensões pares e 2π -periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad \sin(2\theta) \quad \pi - \theta$$

6. (produto de convolução) O produto de convolução entre as funções f e g , integráveis e periódicas de período 2π , é a função

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) dy.$$

- Verifique que o produto de convolução é simétrico, i.e. $f * g = g * f$.
- Verifique que o produto de convolução é linear nas duas variáveis, ou seja, que $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ para todos os $\lambda \in \mathbb{R}$, e que $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- Verifique que

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

7. (séries de Fourier e espaço L^2) O produto interno e a norma L^2 no espaço $L^2(S^1)$ das funções $f : S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ com quadrado integrável são

$$\langle f, g \rangle_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_2}$$

Em particular, os coeficientes de Fourier de f são os produtos internos de f com as funções harmônicas $e_n(x) := e^{inx}$,

$$\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle_2.$$

A série de Fourier de uma função $f(\theta) \in L^2(S^1)$ converge para $f(\theta)$ na norma L^2 , ou seja,

$$\left\| f(x) - \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx} \right\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

A norma L^2 de uma função de quadrado integrável pode ser calculada usando a *identidade de Parseval*

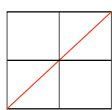
$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$$

- Verifique as relações de ortogonalidade

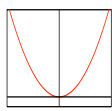
$$\langle e_n, e_m \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

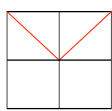
	função $\sim$ série de Fourier ($x \in [-\pi, \pi]$)	coefficients de Fourier ($n \in \mathbb{Z}$)
complexa	$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$	$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$
real	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$	$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ $b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Algumas séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$ função em $[-\pi, \pi]$ $\sim$ série de Fourier x

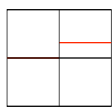
$$\sim 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

 x^2

$$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right)$$

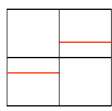
 $|x|$

$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right)$$



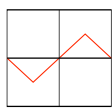
$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



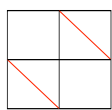
$$2\Theta(x) - 1 := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$S(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim 2 \left(\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

19 Aplicações das séries de Fourier às EDPs

1. (condução de calor com temperatura constante na fronteira) A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \ell],$$

com condições de fronteira nulas

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/\ell)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta(n\pi/\ell)^2 t} \sin(n\pi x/\ell).$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial

$$u(x, 0) = x \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 200$, e condição inicial

$$u(x, 0) = 100 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, e condição inicial concentrada num ponto $\beta \in (0, \pi)$, ou seja,

$$u(x, 0) \sim \mu \cdot \delta(x - \beta).$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial concentrada numa vizinhança dum ponto $\beta \in (0, \pi)$, ou seja,

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Calcule o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ mantendo constante o produto $\lambda \cdot \varepsilon = \mu$, e compare com o exercício anterior.

2. (condução de calor num condutor isolado) A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \ell],$$

num condutor isolado, ou seja, com fluxo nulo na fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx\pi/\ell)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta(n\pi/\ell)^2 t} \cos(nx\pi/\ell)$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) = x^2.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x).$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

onde $0 < \beta < \pi$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

3. (corda vibrante) A solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell],$$

com condições de fronteira

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0$$

e condições iniciais (deslocamento/perfil e velocidade)

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx\pi/\ell) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx\pi/\ell)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nct\pi/\ell) + b_n \frac{\ell}{\pi cn} \sin(nct\pi/\ell) \right) \sin(nx\pi/\ell)$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(4x) - \sin(5x).$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais (deslocamento inicial “triangular”)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais (impulso inicial concentrado no ponto médio)

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2).$$

4. (timbres) Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento ℓ , densidade linear ρ e afinada com tensão k . As pequenas vibrações são modeladas pela equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell], \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$.

Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} h \frac{x}{\alpha} & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\ell - \alpha} (\ell - x) & \text{se } \alpha \leq x < \ell \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < \ell$ é o ponto onde dedilhamos a corda, e h é o máximo do deslocamento inicial.

Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação, podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo transmite à corda apenas um impulso instantâneo localizado num intervalo de comprimento pequeno $2\varepsilon \ll \ell$ à volta de um ponto) $0 < \beta < \ell$ da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$

- Determine as vibrações, ou seja, as amplitudes das harmónicas excitadas, da corda do cavaquinho e da corda do piano.
- Calcule o limite das amplitudes da corda do piano quando $\varepsilon \rightarrow 0$ mantendo constante o impulso transferido $p = v\varepsilon$.
- Determine as energias E_n das n -ésimas harmónicas nos dois casos. Explique porque o som do piano é mais “cheio” do que o som do cavaquinho.

5. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

em $0 \leq x \leq \ell$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Mostre que a conjectura $u_n(x, t) = q_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência $\omega_n^2 = (\pi cn/\ell)^2$.

- Deduza as soluções separáveis do problema.

Referências

- [Ah78] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill 1979.
- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].
- [Ap76] T.M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985.
- [Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989.
- [Ar04] V.I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS, 2004.
- [AS64] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, 1964.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Be62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics, Mechanics*, McGraw-Hill 1962.
- [Bi80] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, MIR, 1980.
- [BN05] P. Buttà e P. Negrini, *Note del corso di Sistemi Dinamici*, Università di Roma “La Sapienza”, 2005.
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].
- [FLS63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Fo92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Society, 1992.
- [Ga01] T.W. Gamelin, *Complex analysis*, Springer 2001.
- [GdF87] D. Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA 1987.
- [HC89] D. Hilbert and R. Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, Verlag 1924 [*Methods of mathematical physics*, Wiley-VCH, 1989].
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press 1959.
- [KF83] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1983.
- [In44] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1944.
- [Io05] V. Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [LC72] M. Laurentiev et B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Éditions de Moscou MIR, 1972.

- [LL78] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.
- [Ma99] J.E. Marsden, *Basic complex analysis*, W.H. Freeman 1999.
- [MF05] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953 [Feshbach Publishing, 2005].
- [O'N99] P.V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1999.
- [Pi91] M.A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (Third Edition), Cambridge University Press, 2006.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [Ros84] S.L. Ross, *Differential equations*, John Wiley & Sons, 1984.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill 1987.
- [Si91] G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, 1991.
- [SS03] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [ST71] A.G. Svesnikov and A.N. Tichonov, *The Theory of Functions of a Complex Variables*, MIR 1971.
- [TS81] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*, MIR, 1981.