26/10/2026
1º teste

Complementos de Análise Matemática para Engenharia ENGQB

Nome .....Nº.....

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`
`Se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* A queda livre de uma partícula próxima da superfície da Terra é modelada pela equação de Newton $\ddot{x} = -g$, onde $x(t)$ denota a altura da partícula e $g \simeq 9.81$ m/s^2. Determine o tempo T em que a partícula atinge a superfície da Terra se a posição e a velocidade iniciais são $x(0) = 100$ m e $\dot{x}(0) = 0$ m/s, respetivamente.

$$T = \sqrt{200/g} \simeq 4.52\,\text{s}$$

2. *(2 valores)* O decaimento radioativo dos núcleos de urânio ^{238}U é modelado pela equação diferencial $\dot{N} = -\lambda N$, onde $N(t)$ denota a população de núcleos e $\tau = 1/\lambda \simeq 6.45 \times 10^9$ y é a vida média. Calcule o tempo de "meia-vida" $t_{1/2}$, o intervalo de tempo necessário para que a quantidade de núcleos radioativos de uma amostra se reduza à metade da sua quantidade inicial.

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 \simeq 4.47 \times 10^9\,\text{y}$$

3. *(2 valores)* Determine a solução da EDO simples $\dot{x} = \cos(t)$ com condição inicial $x(0) = 2$.

$$x(t) = 2 + \sin(t)$$

4. *(2 valores)* Determine as soluções estacionárias da EDO autónoma $\dot{x} = x^2 - 5x$.

$$x(t) = 0 \quad \text{e} \quad 5$$

5. *(2 valores)* Determine a solução da EDO autónoma $\dot{x} = x^2$ com condição inicial $x(0) = 3$.

$$x(t) = \frac{3}{1-3t} \qquad \text{com } t < 1/3$$

6. *(2 valores)* Determine a solução da EDO linear de primeira ordem $\dot{x} + 2x = e^{-t}$ com condição inicial $x(0) = 3$.

$$x(t) = 2e^{-2t} + e^{-t}$$

7. *(2 valores)* Determine a solução geral (ou seja, o plano de todas as soluções) da EDO linear homogénea de segunda ordem $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$.

$$x(t) = ae^{-2t}\cos(t) + be^{-2t}\sin(t)$$

8. *(2 valores)* Determine a solução da EDO linear homogénea de segunda ordem $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 3$ e $\dot{x}(0) = -4$.

$$x(t) = 3e^{-2t}\cos(t) + 2e^{-2t}\sin(t)$$

9. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da EDO linear não homogénea de segunda ordem $\ddot{x} + 4x = 3\cos(2t)$.

$$x(t) = \frac{3}{4}\, t \sin(2t)$$

10. *(2 valores)* Determine um equação diferencial ordinária de segunda ordem que tenha como soluções o plano gerado por $x_+(t) = e^t$ e $x_-(t) = e^{-3t}$.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$$

26/10/2026
1º teste

Complementos de Análise Matemática para Engenharia ENGQB

Nome .....Nº.....

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`
`Se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* A queda livre de uma partícula próxima da superfície da Lua é modelada pela equação de Newton $\ddot{x} = -g$, onde $x(t)$ denota a altura da partícula e $g \simeq 1.62$ m/s^2. Determine o tempo T em que a partícula atinge a superfície da Lua se a posição e a velocidade iniciais são $x(0) = 10$ m e $\dot{x}(0) = 0$ m/s, respetivamente.

$$T = \sqrt{20/g} \simeq 3.51\,\text{s}$$

2. *(2 valores)* O decaimento radioativo dos núcleos de potássio ^{40}K é modelado pela equação diferencial $\dot{N} = -\lambda N$, onde $N(t)$ denota a população de núcleos e $\tau = 1/\lambda \simeq 1.80 \times 10^9$ y é a vida média. Calcule o tempo de "meia-vida" $t_{1/2}$, o intervalo de tempo necessário para que a quantidade de núcleos radioativos de uma amostra se reduza à metade da sua quantidade inicial.

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 \simeq 1.25 \times 10^9\,\text{y}$$

3. *(2 valores)* Determine a solução da EDO simples $\dot{x} = \sin(t)$ com condição inicial $x(0) = 3$.

$$x(t) = 4 - \cos(t)$$

4. *(2 valores)* Determine as soluções estacionárias da EDO autónoma $\dot{x} = x^2 - 7x$.

$$x(t) = 0 \quad \text{e} \quad 7$$

5. *(2 valores)* Determine a solução da EDO autónoma $\dot{x} = x^2$ com condição inicial $x(0) = 2$.

$$x(t) = \frac{2}{1-2t} \qquad \text{com} \quad t < 1/2$$

6. *(2 valores)* Determine a solução da EDO linear de primeira ordem $\dot{x} - 2x = e^t$ com condição inicial $x(0) = 2$.

$$x(t) = 3e^{2t} - e^t$$

7. *(2 valores)* Determine a solução geral (ou seja, o plano de todas as soluções) da EDO linear homogénea de segunda ordem $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$.

$$x(t) = e^{-t}\left(a\cos(2t) + b\sin(2t)\right)$$

8. *(2 valores)* Determine a solução da EDO linear homogénea de segunda ordem $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 4$.

$$x(t) = e^{-t}\left(2\cos(2t) + 3\sin(2t)\right)$$

9. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da EDO linear não homogénea de segunda ordem $\ddot{x} + 9x = 8\sin(3t)$.

$$x(t) = -\frac{4}{3}\, t\cos(3t)$$

10. *(2 valores)* Determine um equação diferencial ordinária de segunda ordem que tenha como soluções o plano gerado por $x_+(t) = e^{-t}$ e $x_-(t) = e^{2t}$.

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$$