

ENGQUBIO

2026/27

Complementos de Análise Matemática para Engenharia

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab: CG - Edifício 6 - 3.48, tel: 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

13 de Setembro de 2026



Resumo

This is not a book! These are notes written for personal use while preparing lectures on “Complementos de Análise Matemática” and similar courses in the last decade. They are rather informal and certainly contain mistakes (indeed, they are constantly actualised). I tried to be as synthetic as I could, without missing the observations that I consider important.

Most probably I will not lecture all I wrote, and did not write all I plan to lecture. So, I included sketched paragraphs or whole chapters, about material that I think should/could be lectured within the same course, given enough time.

References contain some introductory manuals that I like, some classics, books where I have learnt things in the past century, recent books which I find interesting. Almost all material can be found in [Ap69] and [SS03]. My favourite textbooks on ordinary differential equations are [Ar85] and [Si91], and I suggest to start with the nice video by [3blue1brown](#). A nice treatment of EDPs and Fourier analysis is in the notes for [Math 21b](#) by Oliver Knill.

Everything about the course may be found in my web pages

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/salteaching.html>

The notation is as follows:

e.g. means EXEMPLI GRATIA, that is, “for example”.

ex: means “exercise”, to be solved at home or in the classroom.

ref: means “references”, places where you can find and study what follows inside each section.

Black paragraphs form the main text.

Blue paragraphs deal with examples, applications and (often non rigorous) ideas relevant in physics, engineering or other sciences. They are the real reason why all this maths is worth studying.

Red sections/paragraphs (possibly written in english) are more advanced or non trivial facts and results which may be skipped in a first (and also second) reading.

□ indicates the end of a proof.

Pictures were made with *Grapher*, *SketchBook* or *Paintbrush* on my MacBook, or taken from [Wikipedia](#), or produced with [Python](#) and [Matlab](#).



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License](#).

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	8
1.1	Equações de Newton	8
	Equação de Newton.	8
	Partícula livre.	8
	Queda livre.	9
	Movimento uniformemente acelerado relativístico.	10
1.2	Exponencial	10
	O exponencial.	10
	Propriedades do exponencial.	11
	Exponenciais.	12
	Decaimento radioativo.	13
	Crescimento exponencial.	13
1.3	Equações diferenciais ordinárias	14
	Equações diferenciais ordinárias.	14
	Campos de direções e EDOs de primeira ordem.	14
	Campos de vetores e EDOs autônomas.	16
	Campos completos e fluxos de fases.	17
	Reparametrizações.	17
	Quase todas as EDOs têm ordem um.	18
1.4	Constantes do movimento	19
	Constantes do movimento.	19
	One-dimensional Newtonian motion.	19
	Sistemas conservativos.	20
	Mecânica lagrangiana e hamiltoniana.	20
	Pêndulo matemático.	22
	Oscilador harmônico/lei de Hooke.	22
	Gravidade real e velocidade de escape.	23
1.5	Existência e unicidade	23
	Iterações de Picard.	24
	Contrações e teorema de ponto fixo de Banach.	24
	Teorema de Picard-Lindelöf.	25
1.6	Simulações	26
	Soluções exatas e simulações.	26
	Método de Euler/diferenças finitas.	26
	Estimação dos erros no método de Euler.	27
	Convergência do método de Euler.	28
	Método RK-4.	29
	Software.	29
2	Métodos elementares de integração	30
2.1	EDOs simples	30
	Integração de EDOs simples.	30
	Foguetão.	31
	Elementos R , C ou L num circuito alimentado com tensão alternada.	31
	Braquistócrona.	32
2.2	EDOs autônomas	33
	Campos de vetores e EDOs autônomas na reta.	33
	Atrito e tempo de relaxamento.	35
	Queda livre com atrito.	36
	Atrito a grandes velocidades.	36
	Logística.	37
	Epidemias.	38
	Crescimento super-exponencial/explosão.	38
	Catenária.	38
	Tractrix.	39

2.3	EDOs separáveis	39
	Produto direto de EDOs.	40
	EDOs separáveis.	40
	Allometric laws.	41
	Sistemas autónomos no plano e “EDOs exatas”.	42
	Lotka-Volterra.	44
2.4	EDOs lineares de primeira ordem	44
	EDOs lineares de primeira ordem.	45
	Inversão de operadores diferenciais de primeira ordem.	45
	Circuito RL.	46
	Lei do arrefecimento de Newton.	47
2.5	Substituições	47
	Substituições.	47
	Equações de Bernoulli.	48
	Equações de Euler-Cauchy.	48
3	EDOs lineares homogéneas	49
3.1	Exponencial complexo e oscilações	49
	O corpo dos números complexos.	49
	Conjugação, norma e valor absoluto.	51
	Inteiros gaussianos, somas de quadrados e ternos pitagóricos.	53
	Raízes de polinómios reais de grau dois.	53
	Representação polar.	54
	Raízes.	55
	Exponencial complexo e oscilações.	56
	Sobreposições e batimentos.	58
	Oscilações amortecidas.	59
	Força de Coriolis.	59
3.2	EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes	60
	Equação de Newton em um potencial quadrático.	60
	Partícula num potencial quadrático com atrito.	60
	Problema com valores iniciais.	61
	Independência linear e Wronskiano.	61
	Unicidade das soluções.	62
3.3	Soluções exponenciais e polinómio característico	63
	EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes, polinómio característico.	64
	Factorização de operadores.	65
	EDOs equidimensionais.	67
3.4	Oscilador harmónico	68
	Oscilador harmónico.	68
	Oscilações amortecidas.	69
	Equação de Schrödinger estacionária.	70
4	EDOs lineares não homogéneas	71
4.1	EDOs lineares não homogéneas	71
	EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes.	71
	Adivinhar.	71
	Partícula num campo de forças dependente do tempo.	71
	Carga num campo elétrico alternado.	72
	Princípio de sobreposição.	72
4.2	Quase-polinómios e método dos coeficientes indeterminados	73
	Quase-polinómios e coeficientes indeterminados.	73
	EDOs lineares de ordem superior.	74
	Oscilador harmónico tralfamadoriano.	75
4.3	Oscilações forçadas	76
	Oscilações forçadas, batimentos e ressonância.	76
	Oscilações forçadas em notação complexa.	77

	Oscilações forçadas amortecidas.	78
	Circuito RLC.	79
	Impedância complexa.	80
4.4	Variação das constantes e funções de Green	81
	Variação das constantes.	81
	Heurística das funções de Green.	82
	Delta de Dirac discreta.	83
	Densidades, identidades aproximadas e delta de Dirac.	84
	Distribuições.	85

Notações

Conjuntos. $a \in A$ quer dizer que a é um elemento do conjunto A . $A \subset B$ quer dizer que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B . $A \cap B$ é a interseção dos conjuntos A e B , e $A \cup B$ é a reunião dos conjuntos A e B . $A \times B$ é o produto cartesiano dos conjuntos A e B , o conjunto dos pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Funções. Uma *função* $f : X \rightarrow Y$, com *domínio* o conjunto X e *conjunto de chegada* o conjunto Y , é um subconjunto $R \subset X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe um único $y := f(x) \in Y$, dito *imagem* de x , tal que $(x, y) \in R$. Quando domínio e contradomínio são claros, uma função pode ser denotada apenas por $x \mapsto f(x)$, ou seja, identificada com a “regra” que determina $y = f(x)$ a partir de x . A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ é o conjunto $f(A) := \{f(a) \text{ com } a \in A\} \subset Y$. Em particular, a *imagem/contradomínio* da função $f : X \rightarrow Y$ é o conjunto $f(X) := \{f(x) \text{ com } x \in X\} \subset Y$ dos valores da função. O *gráfico* da função $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } y = f(x)\} \subset X \times Y$$

do produto cartesiano do domínio e o conjunto de chegada. A função *identidade* $I_X : X \rightarrow X$ é definida por $I_X(x) = x$, e o seu gráfico é a *diagonal* $\{(x, x) \text{ com } x \in X\} \subset X \times X$.

A *restrição* da função $f : X \rightarrow Y$ ao subconjunto $A \subset X$ é a função $f|_A : A \rightarrow Y$ definida por $f|_A(a) := f(a)$.

A *composição* das funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : f(X) \subset Y \rightarrow Z$ é a função $g \circ f : X \rightarrow Z$ definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, ou seja,

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *injetiva* se $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, e portanto a imagem $f(X)$ é uma “cópia” de X . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *sobrejetiva* se todo $y \in Y$ é imagem $y = f(x)$ de algum $x \in X$, ou seja, se $Y = f(X)$. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *bijetiva/invertível* se é injetiva e sobrejetiva, e portanto admite uma função *inversa* $f^{-1} : Y \rightarrow X$, que verifica $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos os $x \in X$ e $y \in Y$.

Espaço euclidiano. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x^i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

O *produto interno Euclidiano/canónico* é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{ij} \delta_{ij}x_ix_j.$$

(onde (δ_{ij}) é a matriz/símbolo de Kronecker igual a $\delta_{ii} = 1$ na diagonal e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$). O produto interno Euclidiano realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio $\mathbb{R}^n$: o valor da forma linear (ou co-vetor) $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$.

A norma Euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto $B_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço Euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$ (ou seja, as posições dos pontos materiais da física) são também denotados, conforme a tradição, pelas letras $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então $r := \|\mathbf{r}\|$ denota o comprimento do vetor $\mathbf{r}$, ou seja, a distância do ponto $\mathbf{r}$ da origem do referencial.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *velocidade*, e a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita *velocidade escalar* (*speed*, em inglês). A segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *aceleração*.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F^i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $\text{Jac } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\partial F^i / \partial x^j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde dx_k , o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ na sua k -ésima coordenada $dx_k(\mathbf{v}) := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x})\mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$du(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

para todos os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

1 Equações diferenciais ordinárias

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.1-7

As equações diferenciais ordinárias (ODEs) são a linguagem da física newtoniana. Formalizam a nossa ideia de “determinismo”: o presente de um sistema físico determina, por meio de algumas “leis da natureza”, o seu futuro. Estas leis têm a forma de equações diferenciais.

1.1 Equações de Newton

O arquétipo de uma equação diferencial é a equação de Newton.

5 fev 2024

Equação de Newton. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula de massa própria m num referencial inercial é modelada pela “equação /segunda lei de Newton”¹

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{p}$ é o *momento linear*, definido por

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

sendo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ a *velocidade*, $v = \|\mathbf{v}\|$ a *velocidade escalar* (em inglês, *speed*), e $c \simeq 299\,792\,458$ m/s a velocidade da luz, e onde $\mathbf{F}$ é o *campo de forças* que age sobre a partícula. Em geral, a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ depende da posição $\mathbf{r}$ da partícula, da sua velocidade $\mathbf{v}$, e possivelmente (em sistemas que não são isolados) também explicitamente do tempo t .

No regime não relativístico, quando $v \ll c$, o momento linear é $\mathbf{p} \simeq m\mathbf{v}$, e portanto, se a massa m é constante (isto não acontece com um foguetão que queima combustível ou um corredor que transpira!), a equação de Newton assume a forma mais conhecida

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ denota a *aceleração* da partícula.

Este é o arquétipo de uma “equação diferencial”, que físicos e engenheiros querem aprender a resolver, analiticamente ou numericamente, para calcular trajetórias e fazer previsões. Uma sua “solução” é uma trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, também chamada “lei horária”, que substituída na equação produz uma identidade, ou seja, tal que $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)$ para todo tempo t num certo intervalo.

Tipicamente, estamos interessados em soluções com certas “condições iniciais”, valores da posição $\mathbf{r}(t_0)$ e do momento linear $m\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ num instante inicial, por exemplo $t_0 = 0$. A arbitrariedade das condições iniciais reflete a invariância galileiana. Por outro lado, a unicidade das soluções dadas as condições iniciais é uma expectativa (realizada se o campo de forças é razoável) que define o “determinismo” das leis da mecânica.

Outra problema natural é um problema com “condições de fronteira”. Por exemplo, se queremos enviar um foguetão da Terra até a Lua, temos que procurar soluções que satisfazem condições do género $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{r}(T) = \mathbf{b}$.

Partícula livre. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula livre (não relativística) de massa m num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{ou seja,} \quad m\mathbf{a} = 0, \quad (1.1)$$

¹“Lex segunda: Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.” [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é uma constante do movimento, de acordo com o “princípio de inércia de Galileu”² ou a “primeira lei de Newton”³. As soluções da equação de Newton (1.1) da partícula livre, ou seja, as trajetórias com aceleração nula, são as retas afins

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t,$$

onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a posição inicial e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade (inicial).

ex: Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.

ex: Determine a velocidade inicial da trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 2)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (3, 4, 5)$ no instante $t_1 = 2$.

Queda livre. A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -mg \quad (1.2)$$

onde $q(t) \in \mathbb{R}$ denota a altura da partícula no instante t , m é a massa da partícula, e $g \simeq 980$ cm/s² é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre. É um facto experimental que a “massa inercial” (o factor de $\ddot{q}$ na (1.2)) e a “massa gravitacional” (o factor de g na (1.2)) são iguais. Consequentemente, a equação de Newton reduz-se a $\ddot{q} = -g$, ou seja, a lei horária da queda livre não depende da massa da partícula! As soluções da equação de Newton (1.2) da queda livre, ou seja, as trajetórias com aceleração constante, são as parábolas

$$q(t) = s + v_0t - \frac{1}{2}gt^2,$$

onde $s = q(0) \in \mathbb{R}$ é a altura inicial e $v_0 = \dot{q}(0) \in \mathbb{R}$ é a velocidade inicial. Neste caso a velocidade $v(t) = \dot{q}(t) = v_0 + gt$ não é constante, mas cresce linearmente no tempo.

A *energia* da partícula é a soma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgq$$

da energia cinética e da energia potencial. O cálculo

$$\frac{dE}{dt} = mv(\ddot{q} + g) = 0$$

mostra que é uma constante do movimento, ou seja, que é constante ao longo das soluções da equação de Newton (1.2). Esta observação permite tirar conclusões úteis sobre o movimento sem calcular explicitamente a lei horária.

ex: Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

ex: Determine soluções da equação de Newton $\ddot{q} = 1$.

²“... il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo” [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623.]

³“Lex prima: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare” [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

ex: Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = F_0 \cos(\omega t)$$

de uma partícula de massa $m > 0$ num campo de forças periódico. Calcule as trajetórias, dependendo das condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$.

Movimento uniformemente acelerado relativístico. Podem querer saber como aparece o movimento uniformemente acelerado na relatividade especial.⁴ A equação de Newton relativística (por exemplo ao longo do eixo x de um referencial inercial) com aceleração própria constante a é

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = a. \quad (1.3)$$

A solução com velocidade inicial nula é

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2/c^2}}$$

como podem verificar ao substituir esta expressão na (1.3). Ao integrar,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + a^2 t^2/c^2} - 1 \right)$$

se também consideramos uma posição inicial nula. Observem que para tempos pequenos (logo velocidades pequenas) $x(t) \simeq at^2/2$, como esperado, pois estamos no caso newtoniano. Este é chamado “movimento hiperbólico”, pois as trajetórias vivem num ramo da hipérbole

$$\left(\frac{ax}{c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{at}{c} \right)^2 = 1$$

no espaço-tempo, cujas assíntotas são as retas $x + c^2/a = \pm ct$, com velocidades $\pm c$ (os raios de luz). Uma parametrização mais natural da hipérbole é

$$x(s) = \frac{c^2}{a} \left(\cosh \left(\frac{a}{c} s \right) - 1 \right) \quad t(s) = \frac{c}{a} \sinh \left(\frac{a}{c} s \right)$$

onde o parâmetro s é o “tempo próprio” da partícula em movimento, pois $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx^2)/c^2$.

ex: Verifique, a posteriori, as fórmulas acima.

ex: Estime, como sugerido por David Mumford no seu post [Ruminations on cosmology and time](#), o tempo (próprio) necessário a uma astronave, munida de um hipotético propulsor que fornece uma aceleração constante igual a 1G, para percorrer a distância entre a Terra e o buraco negro no centro da nossa Galaxia ...

1.2 Exponencial

Equações diferenciais também definem funções.

O exponencial. O *exponencial*, de acordo com Rudin [Ru87] “the most important function in mathematics”, é a função definida pela série de potências

$$\begin{aligned} \exp(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} |1/n!|^{1/n} = 0$, o raio de convergência é $R = \infty$, portanto a série converge uniformemente em cada intervalo limitado da reta real.

⁴C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.

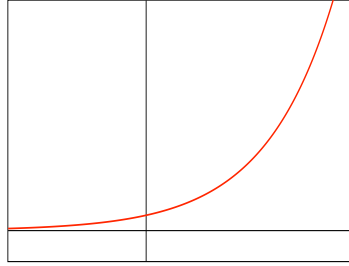


Gráfico do exponencial.

É imediato verificar que $\exp(0) = 1$. A derivada do exponencial é o próprio exponencial, como se pode ver derivando a série de potências

$$\frac{d}{dt} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \right) = 0 + 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$$

(e usando resultados sobre a derivação de séries convergentes). Em outras palavras, a função exponencial $x(t) = \exp(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = x \quad (1.5)$$

com condição inicial $x(0) = 1$.

Vice-versa o exponencial pode ser definido como “a única solução analítica da equação diferencial (1.5) com condição inicial $x(0) = 1$ ”. De facto, a série de potências

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

(que assumimos convergente num intervalo em torno da origem) satisfaz (1.5) se

$$0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

Duas séries de potências definem a mesma função, dentro do disco de convergência suposto não vazio, sse têm todos os coeficientes iguais (pois os coeficientes são proporcionais às derivadas na origem). Igualando os coeficientes, temos então

$$a_1 = a_0 \quad 2a_2 = a_1 \quad 3a_3 = a_2 \quad \dots$$

e em geral $na_n = a_{n-1}$ se $n \geq 1$. A condição inicial $x(0) = 1$ fixa $a_0 = 1$. A equação diferencial (que agora é uma equação recursiva para os coeficientes a_n 's) então implica que $a_1 = 1$, depois que $a_2 = 1/2$, logo que $a_3 = 1/6$, ... e finalmente que o coeficiente genérico é $a_n = 1/n!$. Consequentemente, a única série de potências que resolve a equação diferencial com condição inicial unitária é a (1.4).

Esta ideia, que é do próprio Newton, de procurar uma solução que seja uma série de potências e depois deduzir os coeficientes, é um dos métodos mais importantes para resolver equações diferenciais “não lineares” (e que portanto definem funções desconhecidas, úteis se a equação diferencial descreve um fenómeno ou trata um problema interessante!).

Propriedades do exponencial. O exponencial “transforma somas em produtos” (ou seja, define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+^\times$ dos números reais positivos). De facto, a derivada da função $f(t) = \exp(t) \exp(a - t)$ é nula, e portanto, pelo teorema do valor médio, a função $f(t)$ é constante, logo igual ao seu valor em $t = 0$, que é $\exp(a)$. Chamando $s = a - t$, temos portanto a identidade/equação funcional

$$\exp(t + s) = \exp(t) \exp(s) \quad (1.6)$$

para todos os $t, s \in \mathbb{R}$. Vice-versa, a equação diferencial (1.5) é uma consequência da equação funcional (1.6), assumindo a derivabilidade e o valor unitário da derivada quando $t = 0$. De facto,

$$\frac{d}{dt} \exp(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(t + \varepsilon) - \exp(t)}{\varepsilon} = \exp(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} = \exp(t)$$

se $\exp'(0) = 1$.

Em particular, como $\exp(0) = 1$,

$$\exp(-t) = \exp(t)^{-1}$$

e portanto $\exp(t) \neq 0$ para todos os $t \in \mathbb{R}$. Também, $\exp(nt) = \exp(t)^n$, para todo n inteiro, ou também racional. Isto justifica a notação tradicional $\exp(t) =: e^t$, onde

$$e := \exp(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \simeq 2.71828 \dots$$

é o *número de Euler*.

Exponenciais. Mais em geral, seja D o operador linear

$$f(t) \mapsto (Df)(t) := f'(t)$$

definido, por exemplo, no espaço linear real $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções reais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis definidas na reta real. Então o exponencial $f(t) = e^{\lambda t}$, com λ real, é um vetor próprio do operador D com valor próprio λ , pois satisfaz

$$Df = \lambda f$$

de acordo com a regra da cadeia. Para cada λ , o espaço próprio tem dimensão um. Na linguagem das equações diferenciais, esta afirmação é o teorema de existência e unicidade seguinte.

Teorema 1.1. *A função $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, com x_0 constante, é a única solução da equação diferencial*

$$\dot{x} = \lambda x \tag{1.7}$$

(ou seja, a única função diferenciável cuja derivada é igual a λ vezes a própria função) com condição inicial $x(0) = x_0$ (ou seja, tal que o seu valor quando $t = 0$ é igual a x_0).

Demonstração. Se $y(t)$ é uma (outra?) solução de (1.7) com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $q(t) = y(t)/e^{\lambda t}$ tem derivada $\dot{q} = (\dot{y} - \lambda y)e^{-\lambda t} = 0$. Pelo teorema do valor médio, $q(t)$ é constante e, em particular, igual ao seu valor em $t = 0$, que é x_0 . Consequentemente, $y(t) = x_0 e^{\lambda t}$. $\square$

Na linguagem da álgebra linear, este teorema também diz que o núcleo do operador $D - \lambda$ é a reta gerada por $e^{\lambda t}$. No caso particular quando $\lambda = 0$, diz que o núcleo do operador D é a reta formada pelas funções constantes, consequência do teorema do valor médio (uma função com derivada nula num intervalo é constante).

ex: Determine as soluções de

$$\dot{x} = 3x \quad \text{ou} \quad \dot{x} = -7x$$

com condição inicial $x(0) = 1/e$ ou $x(2) = e$.

ex: Mostre que a imagem do operador D é o próprio espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (e portanto o teorema nulidade-ordem não faz sentido quando a dimensão não é finita).

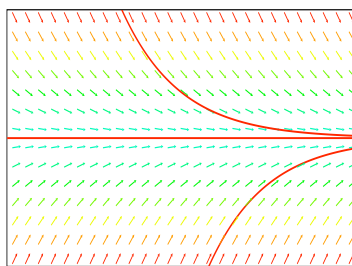
Decaimento radioativo. A taxa de decaimento de matéria radioativa é proporcional à quantidade de matéria existente, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioativa existente no instante t satisfaz a lei

$$\dot{N} = -\beta N, \quad (1.8)$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a “vida média” dos núcleos⁵. A solução de (1.8) com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{-\beta t},$$

e “decai” para o equilíbrio $\bar{N} = 0$ quando $t \rightarrow \infty$.



Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei (decaimento com reposição)

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha. \quad (1.9)$$

A solução de equilíbrio de (1.9), ou seja, a solução que não dependem do tempo, é $\bar{N} = \alpha/\beta$. A diferença $x(t) := N(t) - \bar{N}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = -\beta x$ (ou seja, a (1.8)), e portanto a solução de (1.9) é

$$N(t) = (N(0) - \bar{N})e^{-\beta t} + \bar{N}.$$

Observe que $N(t) \rightarrow \bar{N}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (por exemplo no instante da criação do Universo!).

ex: O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioativa é o tempo τ necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial (ou seja, $N(\tau) = \frac{1}{2}N(0)$). Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida τ e o parâmetro β .

ex: O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é conhecida⁶.

Crescimento exponencial. Um modelo do crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N, \quad (1.10)$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t , e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$). A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$ (população ausente). A solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

e diverge quanto $t \rightarrow \infty$ (explosão demográfica!).

⁵O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X , com lei $\text{Prob}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ se $t \geq 0$, e 0 se $t < 0$, e média $\mathbf{E}X := \int_0^\infty t d\text{Prob}(X \leq t) = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.

⁶J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

ex: Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?

ex: Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\gamma > 0$, então a população segue a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma.$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções (veja a solução do problema do decaimento com reposição).

1.3 Equações diferenciais ordinárias

Equações diferenciais ordinárias. Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de ordem n para uma função incógnita $y(x)$ de uma variável independente x é uma equação do género

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

onde F é uma função de $n + 1$ variáveis. As suas *soluções* são funções $x \mapsto y(x)$, definidas explicitamente ou implicitamente, que substituídas na equação juntamente com as suas primeiras n derivadas produzem uma identidade.

Campos de direções e EDOs de primeira ordem. Uma classe mais compreensível e suficientemente abrangente de EDOs é construída usando os seguintes ingredientes. Um intervalo $T \subset \mathbb{R}$, possivelmente a própria reta real, onde vive o *tempo* $t \in T$. Um *espaço de fases*, que pode ser um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, possivelmente o próprio espaço $\mathbb{R}^n$ (ou mais em geral uma “variedade diferenciável”, um espaço que pode ser descrito localmente por coordenadas que vivem em abertos do espaço euclidiano). Um *campo de direções* (de facto, um “campo vetorial dependente do tempo”), ou seja, uma função $\mathbf{v} : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ suficientemente regular, que associa a cada ponto $(t, \mathbf{x})$ do *espaço de fases ampliado* $T \times X$ um vetor $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ de $\mathbb{R}^n$. Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem definida pelo campo de direções $\mathbf{v}$ é uma lei

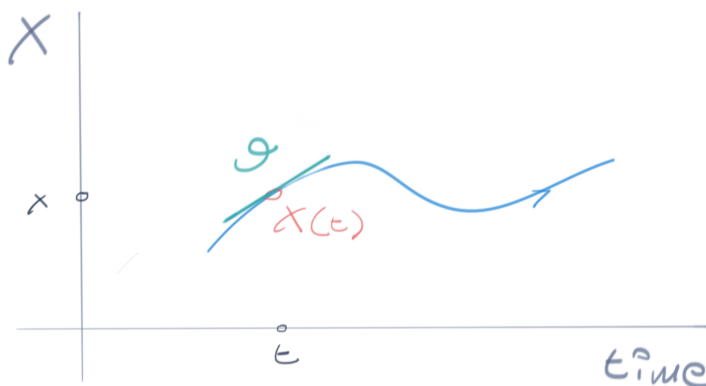
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1.11)$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de um sistema com espaço de fases X . O ponto $\mathbf{x}(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T$.

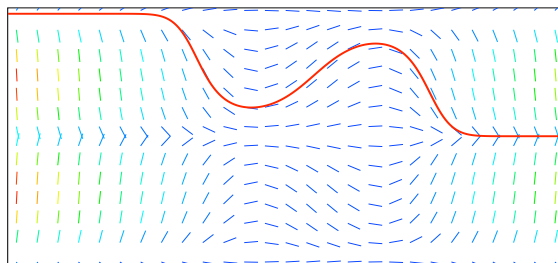
Uma *solução (local)* da EDO (1.11) é um caminho diferenciável $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, definido num intervalo aberto e não trivial $I \subset T$, cuja velocidade satisfaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$ para cada tempo $t \in I$. O gráfico $\Gamma := \{(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times X \text{ com } t \in I\}$ de uma solução é dito *curva integral*.

Duas soluções definidas em intervalos $I, J \subset T$ e que coincidem na interseção $I \cap J$, suposta não vazia, definem uma solução no intervalo de tempos $I \cup J$. Uma solução $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ é dita *maximal* se não pode ser estendida a um intervalo maior $J \supset I$. Quando $T = \mathbb{R}$, uma solução definida para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é dita *solução global*.

De acordo com uma ideia de Euler, quando o espaço de fases tem dimensão um, é útil interpretar (e desenhar) o campo de direções como (pequenos segmentos de) retas passando pelos pontos $(t, x) \in T \times X$ com direção/velocidade $(1, v(t, x))$, ou seja, com declive $v(t, x)$. Uma solução local é então uma função cujo gráfico é tangente ao campo de direções em cada seu ponto.



Um desenho com as direções em muitos pontos do espaço de fases ampliado pode sugerir o aspeto e até o comportamento assintótico das soluções de uma equação diferencial.



Campo de direções e uma solução de $\dot{x} = \sin(x)(1 - t^2)$.

Dados um tempo $t_0 \in T$ e um ponto $\mathbf{x}_0 \in X$, uma solução da EDO (1.11) com *condição inicial* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (ou solução do “Problema de Valores Iniciais”, P.V.I., ou solução do “problema de Cauchy”) é uma solução definida numa vizinhança de t_0 cujo gráfico contém o ponto $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

O *teorema de Peano* ^{7 8} afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo, então existem sempre soluções locais, definidas em vizinhanças suficientemente pequenas do tempo inicial, do problema de Cauchy. Por outro lado, a continuidade do campo de direções não é suficiente para garantir a unicidade das soluções (um exemplo é o campo $v(x) = x^{2/3}$, como podem ver nos exercícios). O *teorema de Picard-Lindelöf* ⁹ afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo e localmente Lipschitziano ¹⁰ (por exemplo, diferenciável e com derivada contínua) na variável $\mathbf{x}$, então para cada ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$ passa uma única solução com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Uma prova do teorema de Picard-Lindelöf está na próxima sub-seção 1.5.

Também vale a pena mencionar que a forma mais geral de uma EDO de primeira ordem é

$$F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0.$$

onde F é uma função real arbitrária definida em $\mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}^n$. Então também existem EDOs que não têm solução por razões triviais, como por exemplo a equação $(\dot{x})^2 + 1 = 0$ no espaço das funções com valores reais. Por outro lado, uma equação diferencial deste género pode sempre ser escrita na forma (1.11) em regiões onde é possível aplicar o teorema da função implícita e resolver para a derivada.

Finalmente, existem equações diferenciais interessantes que modelam fenómenos em que a variável independente não é um tempo, mas outro observável físico. Exemplos famosos são problemas geométricos que tratam de curvas no plano. É então tradição, em particular nos manuais de matemática, usar a letra x para a variável independente e o símbolo $y(x)$ para a função incógnita, assim que uma EDO pode ser escrita $y' = v(x, y) \dots$

ex: Esboce o campo de direções das EDOs

$$\dot{x} = t \quad \dot{x} = -x + t \quad \dot{x} = \sin(t)$$

e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

ex: Verifique que função $x(t) = t^3$ e a função constante $x(t) = 0$ são duas soluções da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$. Isto mostra que o campo de vetores $v(x) = x^{2/3}$, que não é derivável na origem (esboce o seu gráfico), não satisfaz o teorema de unicidade de Picard-Lindelöf.

⁷G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino* **21** (1886), 677-685.

⁸G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen* **37** (1890) 182-228.

⁹M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

¹⁰A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *Lipschitziana* no domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma constante L tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

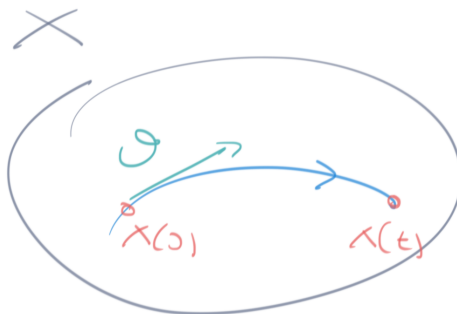
ex: Verifique que a equação diferencial $(\dot{x})^2 + x^2 = 0$ admite, no universo das funções reais, apenas a solução trivial $x(t) = 0$.

ex: Determine umas EDOs de primeira ordem e de segunda ordem que admitam como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Campos de vetores e EDOs autônomas. Um *campo de vetores* $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ define uma equação diferencial ordinária *autônoma* (que não depende explicitamente do tempo, como todas as leis fundamentais da física)

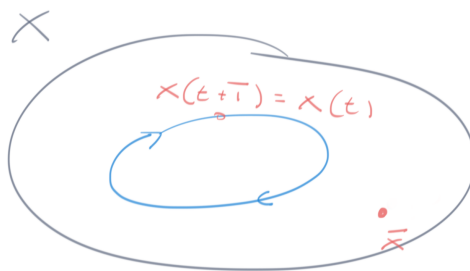
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (1.12)$$

As imagens $\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) \text{ com } t \in I\} \subset X$ das soluções/trajetórias $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ (com $I \subset \mathbb{R}$ intervalos) no espaço de fases são ditas *órbitas*, ou *curvas de fases*, do sistema autônomo.



Se $\bar{\mathbf{x}} \in X$ é um *ponto singular* do campo de vetores, ou seja, um ponto onde $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, então o caminho constante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução da EDO autônoma (1.12). As soluções constantes são chamadas soluções de *equilíbrio*, ou *estacionárias*.

Soluções *periódicas* são soluções globais tais que $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ para todo t e algum tempo $T > 0$ minimal, dito *período*. As órbitas correspondentes são curvas fechadas.



Se a EDO (1.12) satisfaz um teorema de existência e unicidade (pelo teorema de Picard-Lindelöf 1.21, é suficiente que o campo seja Lipschitziano, por exemplo diferenciável com continuidade), então para cada ponto do espaço de fases passa uma e uma única órbita (que pode ser o próprio ponto no caso de uma solução estacionária). Em particular, órbitas diferentes não têm interseções, e portanto as órbitas definem uma “partição” do espaço de fases.

ex: Esboce o campo de direções e o campo de vetores das EDOs autônomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x(1 - x) \\ \dot{x} &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) & \dot{x} &= (x - 1)^2(x - 2)^2 \\ \begin{cases} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q \end{cases} & \begin{cases} \dot{q} &= 2q \\ \dot{p} &= -p/2 \end{cases} & \begin{cases} \dot{q} &= q - p \\ \dot{p} &= p - q \end{cases} \end{aligned}$$

determine as soluções de equilíbrio, e conjecture sobre o comportamento qualitativo das (outras) soluções (eventualmente, ao longo desta UC, estudaremos métodos para calcular soluções de quase todas estas equações diferenciais).

Campos completos e fluxos de fases. Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou numa variedade diferenciável). Se por cada ponto do espaço de fases passa uma e uma única solução global (i.e. definida para todos os tempos), então o campo de vetores é dito *completo*. Seja $\Phi_t(\mathbf{x}_0) := \varphi(t)$ é o estado no tempo t da solução que passa por $\mathbf{x}_0$ no instante 0. Um campo completo define/gera portanto um *fluxo de fases*, uma família de transformações $\Phi_t : X \rightarrow X$, com $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \text{e} \quad \Phi_0 = \text{id}_X \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Vice-versa, um fluxo de fases diferenciável define um campo de vetores

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{t},$$

dito “gerador infinitesimal” do fluxo. As curvas $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

ex: Determine os campos de vetores que geram os seguintes fluxos no plano $\mathbb{R}^2$

$$\Phi_t(x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (\cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (x + ty, y)$$

Reparametrizações. Consideramos a lei

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1.13)$$

que determina a dinâmica de uma variável $\mathbf{x}(t)$, que assume valores num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. A unidade de medida do tempo é, naturalmente, arbitrária. Pode ser por exemplo conveniente passar do tempo t a um tempo $\tau = kt$, onde k é um factor de conversão positivo (assim que não muda a orientação do tempo). Mais em geral, pode ser oportuno considerar uma *reparametrização* do tempo definida por

$$\tau = f(t) \quad (1.14)$$

onde f é uma função diferenciável e estritamente crescente, ou seja, com derivada estritamente positiva $d\tau/dt > 0$. Pelo teorema da função inversa, esta função admite uma inversa diferenciável $t = f^{-1}(\tau)$, com derivada $dt/d\tau = 1/(d\tau/dt)$. Então a dinâmica da variável $\mathbf{x}(t(\tau))$, dependente do tempo τ (uma notação pedante pode usar uma nova variável definida por $\mathbf{y}(\tau) := \mathbf{x}(t(\tau))$, mas parece-me desnecessária), é determinada pela EDO

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \mathbf{v}(f^{-1}(\tau), \mathbf{x})$$

obtida da (1.13) usando a regra da cadeia.

e.g. Por exemplo, consideramos a EDO

$$\frac{dx}{dt} = x/t \quad (1.15)$$

definida para tempos positivos $t > 0$. A reparametrização $t = e^\tau$ transforma a (1.15) em

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} x/e^\tau = x$$

cujas soluções são os exponenciais $x(\tau) = ce^\tau$. Consequentemente, as soluções de (1.15) são

$$x(t) = ct$$

onde $c = x(1)$.

Quase todas as EDOs têm ordem um. A forma tradicional de escrever a equação de Newton de uma partícula não relativística é

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ é a posição. No entanto, é conveniente e útil ler a definição do momento linear $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$ ao contrário, de direita para a esquerda, como uma equação diferencial para $\mathbf{q}$. Desta forma, a equação de Newton resulta equivalente ao par de equações de ordem um

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}/m \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}/m, t)\end{aligned}$$

ou seja, uma equação de ordem um para uma variável $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ que vive no espaço de fases $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Mais em geral, uma EDO de ordem $n \geq 2$ resolúvel para a n -ésima derivada é uma lei do género

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

para o observável $y(t) \in \mathbb{R}$, onde F é ua função (suficientemente regular) de n variáveis. É equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

para o observável $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$x_1 := y \quad x_2 := \dot{y} \quad x_3 := \ddot{y} \quad \dots \quad x_n := y^{(n-1)},$$

se o campo de direções é definido por $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) := (x_2, \dots, x_{n-1}, F(t, x_1, x_2, \dots, x_n))$.

ex: Determine os sistemas de ODEs de ordem 1 que traduzem as seguintes ODEs de ordem > 1

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x & \ddot{x} + \dot{x} &= 0 & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 \\ \ddot{x} &= t - x & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 & \ddot{x} &= x\end{aligned}$$

ex: Determine uma EDO de segunda ordem que admita como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

ex: Mostre que soluções da EDO $x^{(n)} = 0$ são os polinómios de grau $\leq n - 1$.

ex: **Soluções de Chandrasekhar da equação de Lane-Emden.** Um modelo do perfil de equilíbrio hidrostático de uma estrela é a equação de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^p, \quad (1.16)$$

onde ξ é uma “distância adimensional” do centro da estrela, $\theta(\xi)$ é proporcional à densidade, e p é um parâmetro que depende da equação de estado $P = K\rho^{1+1/p}$ do gás que forma a estrela. O problema físico é determinar a solução com condições iniciais $\theta(0) = 1$ e $d\theta/d\xi(0) = 0$, e o menor zero de $\theta(\xi)$ com $\xi > 0$ é interpretado como sendo o raio da estrela.

Verifique que

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad \theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \text{e} \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}$$

são soluções da equação de Lane-Emden (1.16) quando $p = 0, 1$ e 5 , respetivamente. ¹¹

¹¹S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, 1958.

1.4 Constantes do movimento

Constantes do movimento. Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores, com coordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$, que define a EDO autônoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. Os *observáveis* são as funções $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Os observáveis que assumem valores $\varphi(\mathbf{x}(t))$ constantes ao longo das soluções $\mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ são ditos *constantes do movimento*, ou *integraes primeiros*. Pela regra da cadeia, o observável diferenciável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma constante do movimento se e só se a *derivada de Lie* de φ ao longo do campo $\mathbf{v}$ é igual a zero, ou seja,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\varphi)(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \cdot v_k(\mathbf{x}) = 0.$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in X$.

As órbitas/curvas de fases estão contidas nas hiperfícies de nível $\Sigma_c := \{\mathbf{x} \in X \text{ t.q. } \varphi(\mathbf{x}) = c\}$ das constantes do movimento. Se o sistema admite k constantes do movimento independentes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ (ou seja, tais que os diferenciais $d\varphi_i(\mathbf{x})$ são linearmente independentes em cada ponto $\mathbf{x}$), então as órbitas do sistema estão contidas nas interseções das k hiperfícies de nível, umas sub-variedades de co-dimensão k . Em particular, a existência de $n - 1$ constantes do movimento independentes permite determinar as órbitas.

ex: Verifique que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz diagonal com $\text{Det} A \neq 0$ (ou seja, todos os valores próprios são $\neq 0$) não admite constantes do movimento não triviais (i.e. constantes).

ex: Determine as curvas $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ no plano euclidiano que satisfazem $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = 0$. Observe que $\|\mathbf{r}\|^2$ é uma constante do movimento).

One-dimensional Newtonian motion. The one-dimensional motion of a particle of mass m subject to a force $F(x)$ that does not depend on time is described by the Newton equation

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Define the *potential (energy)* as (the opposite of) some primitive $U(x) = -\int F(x) dx$ of the force, so that the Newton equation looks

$$m\ddot{x} = -U'(x),$$

(above, the prime denotes derivative with respect to x , as in calculus books) The *total energy*

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

(which of course is defined up to an arbitrary additive constant) of the system is a constant of the motion, i.e. is constant along solutions of the Newton equation. Indeed,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E &= \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = U'(x) \dot{x} + m\dot{x} \ddot{x} \\ &= (-F(x) + m\ddot{x}) \dot{x} = 0 \end{aligned}$$

In particular, once a value E of the energy is given (depending on the initial conditions), the motion takes place in the region where $U(x) \leq E$, since the kinetic energy $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ is non-negative. Conservation of energy allows to reduce the problem to the first order ODE

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - U(x)),$$

which has the unpleasant feature to be quadratic in the velocity $\dot{x}$. Meanwhile, if we are interested in a one-way trajectory going from some x_0 to x , say with $x > x_0$, we may solve for $\dot{x}$ and find the first order autonomous ODE

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}.$$

There follows that the time needed to go from x_0 to x is

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(y))}}.$$

The inverse function of the above $t(x)$ will give the trajectory $x(t)$ with initial position $x(0) = x_0$ and initial positive velocity $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x_0))}$, at least for sufficiently small times t .

Sistemas conservativos. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula de massa $m > 0$ (suposta constante!) num campo de forças conservativo é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

onde a força é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, e $U(\mathbf{r})$ é um(a energia) *potencial*. Um sistema isolado de N pontos materiais, com posições $\mathbf{r}_\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e massas $m_\alpha > 0$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, é modelado pelas equações de Newton

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

onde a força que atua sobre o α -ésimo ponto material é

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U := -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right),$$

i.e. o oposto do gradiente, com respeito às coordenadas $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, de uma energia potencial $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. A *energia cinética* é

$$K := \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2$$

onde $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$ é a velocidade do α -ésimo ponto material.

ex: Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)

$$E := K + U = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$ ao longo das trajetórias.

Mecânica lagrangiana e hamiltoniana. Um sistema mecânico é descrito por um espaço das configurações M , tipicamente um aberto de $\mathbb{R}^n$ ou, em geral, uma variedade diferenciável, com coordenadas locais $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, e uma *lagrangiana* $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, uma função $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ que depende das coordenadas e das velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$. Por exemplo, o espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é tipicamente uma função do género

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_\alpha\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N).$$

A *ação* de uma trajetória $[t_0, t_1] \mapsto \mathbf{q}(t) \in M$ entre a posição $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ e a posição $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ é o integral

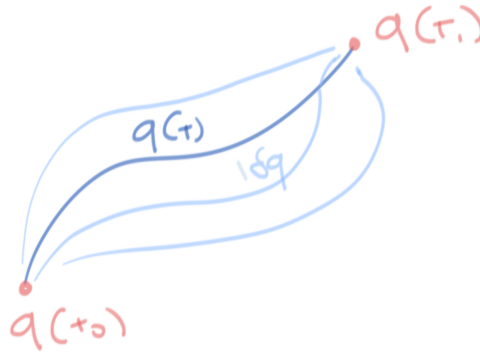
$$S[t \mapsto \mathbf{q}(t)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt.$$

O *princípio de mínima ação* (de Hamilton) afirma que as trajetórias físicas são os pontos críticos da ação, mantendo fixas as posições inicial e final. A variação δS , dada uma variações infinitésimas

$\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$ da trajetória com $\delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0$, é dada por

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt\end{aligned}$$

(integrando por partes a segunda soma e usando as condições de fronteira).



Portanto, os pontos críticos da ação são as soluções das *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.17)$$

A forma linear $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = p^1 dq_1 + p^2 dq_2 + \dots + p^n dq_n \in T_{\mathbf{q}}^*M$, de coordenadas $p^i := \partial L / \partial \dot{q}_i(\mathbf{q})$, é dito *momento*. O espaço $X = T^*M \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, com coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, é dito *espaço de fases* do sistema mecânico. As equações de Euler-Lagrange são equivalentes às *equações de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.18)$$

onde a *hamiltoniana* do sistema, $H : X \rightarrow \mathbb{R}$, é a “transformada de Legendre” da lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &:= \sup_{\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}_{\alpha}\|^2 + U(\mathbf{q}).\end{aligned}$$

ex: O espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N),$$

onde U é a energia potencial da interação. Verifique que as equações de Euler-Lagrange são equivalentes às equações de Newton $m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}$.

ex: Mostre que a hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0$$

ao longo das soluções das equações de Hamilton. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fases X estão contidas nas curvas/superfícies de nível $\{H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$ da hamiltoniana.

Pêndulo matemático. As oscilações de um pêndulo de comprimento ℓ e massa m são descritas pela lagrangiana

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

onde θ é o ângulo que o braço do pêndulo forma com a vertical (assim que $\theta = 0$ representa a posição de equilíbrio estável), e $g \simeq 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ é a aceleração gravitacional próximo da superfície da Terra.



A equação de Euler-Lagrange é portanto

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) \quad (1.19)$$

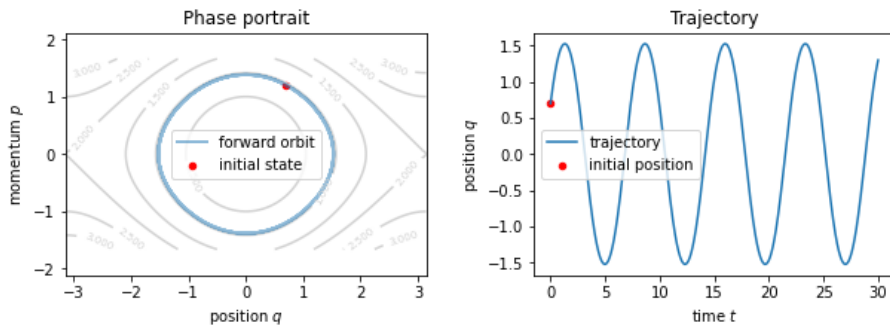
onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$ é uma frequência, e é chamada *pêndulo matemático*. O espaço de fases é o cilindro $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ de coordenadas θ e $p = \dot{\theta}$. No espaço de fases, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin(\theta) \end{cases} \quad (1.20)$$

Esta equação diferencial não é linear, e as suas soluções precisam da introdução de funções especiais, chamados integrais elípticos de Jacobi. No entanto, é possível compreender o aspeto das soluções observando que a energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega^2(1 - \cos \theta)$$

é uma constante do movimento. No recobrimento universal $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do espaço de fases (ou seja, esquecendo que os ângulos estão definidos a menos de múltiplos inteiros de 2π), as curvas de nível da energia são curvas fechadas (que descrevem oscilações em torno do equilíbrio) se $E \leq 2\omega^2$... e curvas que oscilam em torno de uma reta horizontal se $E > 2\omega^2$ (que descrevem rotações).



Oscilador harmónico/lei de Hooke. As pequenas oscilações de um pêndulo à volta da posição de equilíbrio $\theta = 0$, ou as oscilações de uma partícula sujeita à *lei de Hooke*, são modeladas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

obtida da (1.19) ao approximar $\sin \theta \simeq \theta$. No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}$$

É imediato verificar que a energia

$$H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento. As curvas de energia constante são elipses centradas na origem. Fixada uma energia positiva E , o movimento acontece no intervalo (x_-, x_+) com $x_{\pm} = \pm\sqrt{2E}/\omega$, e a velocidade satisfaz a equação quadrática

$$\dot{x}^2 = \omega^2(|x_{\pm}|^2 - x^2).$$

Uma integração permite então determinar a trajetória de x_- até $x \leq x_+$. Esta equação diferencial é tão importante que será objeto de uma inteira seção 3.4

ex: Calcule o tempo necessário para deslocar o oscilador de x_- até x_+ , e mostre que não depende da energia E .

Gravidade real e velocidade de escape. A distância r de uma partícula de massa m do centro da Terra satisfaz a equação de Newton

$$m\ddot{r} = -mg\frac{R^2}{r^2},$$

onde $R \simeq 6.3710 \times 10^6$ m é o raio (médio) da Terra (assim que, naturalmente, $r \geq R$) e $g = GM/R \simeq 9.80665$ m·s⁻² a aceleração gravitacional próxima da superfície da Terra, sendo $G \simeq 6.674 \times 10^{-11}$ m³·kg⁻¹·s⁻² a constante gravitacional e $M \simeq 5.9736 \times 10^{24}$ kg a massa da Terra. Nesta aproximação, consideramos o verdadeiro campo gravitacional gerado pela Terra, cujo potencial é $U(r) = mgR^2/r$, mas desprezamos a influência da Lua assim como dos outros planetas. Se o movimento da partícula é radial, então a energia total, que é conservada, é dada por

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + mg \frac{R^2}{r}$$

assim que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}E - g\frac{R^2}{r}}$$

ex: Escreva o integral que representa o tempo necessário para deslocar a partícula da superfície da Terra, ou seja, $r_0 = R$, até uma altura $h = r - R > 0$ acima da superfície, dada uma energia inicial $E > mgR$ (ou seja, uma velocidade inicial positiva).

ex: Determine a menor velocidade inicial necessária para fugir do campo gravitacional da Terra, ou seja, para atingir uma altura infinita (chamada *velocidade de escape*).

1.5 Existência e unicidade

É natural colocar a questão de decidir se as equações diferenciais, que usamos como modelos de fenômenos físicos, realizam as nossas expectativas sobre o determinismo. Ou seja, se realmente as condições iniciais determinam, e univocamente, o futuro de um sistema (e eventualmente também o passado, sendo muitas leis fundamentais indiferentes à direção do tempo). Do ponto de vista matemático, isto significa provar teoremas de existência e unicidade para as soluções.

Iterações de Picard. Uma função diferenciável $t \mapsto \varphi(t)$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e com valores num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ se e só se

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \varphi(s)) ds,$$

ou seja, se $\varphi(t)$ é um ponto fixo do *mapa de Picard* $\mathcal{P} : \mathcal{C}(I, X) \rightarrow \mathcal{C}(I, X)$, que envia uma função $\phi(t)$ na função

$$(\mathcal{P}\phi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \phi(s)) ds. \quad (1.21)$$

Se a sucessão de funções $\phi, \mathcal{P}\phi, \mathcal{P}^2\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}\phi), \dots, \mathcal{P}^n\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}^{n-1}\phi), \dots$, obtidas iterando o mapa de Picard a partir de uma função inicial ϕ , é convergente (numa topologia apropriada definida num subespaço $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(I, X) := \{ \phi : I \rightarrow X \text{ contínua} \}$ tal que $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ seja contínua), então o limite $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{P}^n\phi)(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard, e portanto uma solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com a condição inicial dada $x(t_0) = x_0$.

e.g. EDOs simples. Se o campo de velocidades apenas depende do tempo, ou seja o problema é a EDO simples $\dot{x} = v(t)$, então o mapa de Picard envia toda função inicial $\phi(t)$ na solução

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

com $x(t_0) = x_0$.

e.g. O exponencial. Queremos resolver $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Começamos pela conjectura $\phi(t) = 1$, e depois calculamos

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = 1 + t \quad (\mathcal{P}^2\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \quad (\mathcal{P}^3\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \quad \dots$$

Então a sucessão converge (uniformemente em intervalos limitados) para a série de Taylor da função exponencial

$$(\mathcal{P}^n\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} \rightarrow e^t,$$

que é a solução que já conhecemos.

Contrações e teorema de ponto fixo de Banach. Seja (X, dist) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é dita *contração* se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz inferior a um, ou seja, se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

$$\text{dist}(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot \text{dist}(x, x').$$

As *trajetórias* da transformação $f : X \rightarrow X$ são as sucessões (x_n) definidas recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, se $n \geq 0$, a partir de uma condição inicial $x_0 \in X$. Os *pontos fixos* de f são os pontos $p \in X$ tais que $f(p) = p$.

Um espaço métrico é *completo* se toda sucessão fundamental é convergente.

Teorema 1.2 (princípio das contrações, teorema de ponto fixo de Banach). *As trajetórias de uma contração $f : X \rightarrow X$ são sucessões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias decai exponencialmente no tempo. Se X é completo, então f admite um único ponto fixo p , e a trajetória de todo ponto converge exponencialmente para o ponto fixo.*

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow X$ uma λ -contração. Seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$. Usando k -vezes a contratividade ve-se que $\text{dist}(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda \text{dist}(x_1, x_0)^k$, e portanto que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \text{dist}(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \text{dist}(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq \text{dist}(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \text{dist}(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Em particular, (x_n) é uma sucessão de Cauchy, pois para todo $\varepsilon > 0$ existe $\bar{n}$ tão grande que se $n \geq \bar{n}$ então $\lambda^n/(1-\lambda) < \varepsilon$.

Se (y_n) é a trajetória de um outro ponto $y_0 \in Y$, a contratividade também implica que

$$\text{dist}(x_n, y_n) \leq \lambda^n \cdot \text{dist}(x_0, y_0),$$

ou seja que a distância entre duas trajetórias decai exponencialmente.

O limite $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f , porque f é contínua, e

$$f(p) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p.$$

Se p e p' são pontos fixos, então $d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq \lambda d(p, p')$ com $\lambda < 1$ implica que $d(p, p') = 0$, o que mostra que o ponto fixo é único. Comparando a trajetória de x_0 e do ponto fixo p (que é a sucessão constante), ve-se que

$$\text{dist}(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot \text{dist}(x_0, p),$$

ou seja, que a convergência $x_n \rightarrow p$ é exponencial. $\square$

ex: Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

ex: Mostre que uma transformação $f : X \rightarrow X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.

Teorema de Picard-Lindelöf. ¹² O teorema de existência e unicidade básico para equações diferenciais ordinárias é o seguinte.

Teorema 1.3 (Picard-Lindelöf). *Seja $v(t, x)$ um campo de velocidades contínuo definido num domínio D do espaço de fases estendido $\mathbb{R} \times X$. Se v é localmente Lipschitziana (por exemplo, diferenciável com continuidade) com respeito a segunda variável $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma e uma única solução local da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ que passa por cada ponto $(t_0, x_0) \in D$.*

Demonstração. Seja $I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_\delta(x_0)$ uma vizinhança suficientemente pequena de (t_0, x_0) , onde $B = \overline{B}_\delta(x_0)$ denota o disco fechado de centro x_0 e raio δ in X . Pela continuidade do campo de velocidades $v(t, x)$ existe $K > 0$ tal que $|v(t, x)| \leq K$ se $(t, x) \in I \times B$. Pela condição de Lipschitz, existe $M > 0$ tal que $|v(t, x) - v(t, y)| \leq M|x - y|$ se $t \in I$ e $x, y \in B$. Podemos reduzir, se necessário, o raio ε de I de maneira tal que $K\varepsilon \leq \delta$ e $M\varepsilon < 1$. Seja $\mathcal{C} = C^0(I, B)$ o espaço das funções contínuas $t \mapsto \phi(t)$ que enviam I em B . Munido da norma do supremo,

¹²M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

$\|\phi - \varphi\|_\infty := \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$ este é um espaço métrico completo (de facto, um espaço de Banach). O mapa de Picard (1.21) envia $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$, pois

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s))| ds \leq K\varepsilon \leq \delta.$$

Finalmente, dadas duas funções $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$, acontece que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}\phi)(t) - (\mathcal{P}\varphi)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s)) - v(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq M\varepsilon \cdot \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\mathcal{P}\phi - \mathcal{P}\varphi\|_\infty < M\varepsilon \cdot \|\phi - \varphi\|_\infty.$$

Sendo $M\varepsilon < 1$, o mapa de Picard é uma contração. O teorema segue do princípio das contrações 1.2. $\square$

1.6 Simulações

Ainda mais importante, para físicos e engenheiros, é a possibilidade de simular, ou seja aproximar, soluções, na impossibilidade praticamente certa de encontrar as soluções exatas das equações diferenciais que descrevem os fenómenos interessantes do mundo real.

Soluções exatas e simulações. Exceto poucos casos importantes, resolvidos por matemáticos e físicos famosos (como a queda livre, a lei de Hooke/oscillador harmónico, o problema de Kepler, ...), não há nenhuma esperança de resolver “analiticamente” as equações diferenciais que descrevem fenómenos interessantes do mundo real (leis da física, problemas de engenharia, ...). É necessário fazer “simulações”, ou seja, calcular valores aproximados das soluções. Naturalmente, as simulações são credíveis se conseguimos controlar os erros introduzidos.

Por outro lado, sabemos hoje, depois dos trabalhos de Poincaré, que em muitos casos fisicamente interessantes (famoso é o problema dos 3 corpos) é ilusório pensar que soluções exatas sejam de alguma ajuda para fazer previsões. A moderna teoria dos sistemas dinâmicos consiste então em substituir a procura das soluções com uma análise qualitativa ou estatística das possíveis soluções.

Método de Euler/diferenças finitas. Consideramos o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{1.22}$$

O método de Euler consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” $dt = \tau$ suficientemente pequeno. A solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n\tau$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot \tau.$$

Por exemplo, em [Python](#)

```

10
11 # scientific libraries
12 import numpy as np
13 import matplotlib.pyplot as plt
14
15 # parameters and initial conditions
16 q0 = 1 # initial position
17 t0, T = 0, 1 # initial and final times
18 dt = 0.001 # time step for integration
19
20 # vector field
21 def vectorfield(x, t):
22     dqdt = x
23     return dqdt
24
25 # Euler integration
26 t = np.arange(t0, T, dt) # times
27 q = np.zeros(len(t)) # positions
28 q[0] = q0
29 for i in range(0, len(t)-1):
30     q[i+1] = q[i] + vectorfield(q[i], t[i]) * dt
31
32 # picture
33 plt.figure()
34 plt.plot(t, q, label='trajectory')
35 plt.title("Euler method")
36 plt.xlabel('time')
37 plt.ylabel('position')
38 plt.legend()

```

Se a solução verdadeira admite segunda derivada, é natural esperar, pela fórmula de Taylor com resto, que o erro

$$\varepsilon_n := x(t_n) - x_n$$

introduzido em cada passo seja da ordem de τ^2 . Num intervalo de tempo fixado $[t_0, t_0 + T]$, dividido em N subintervalos de comprimento τ (assim que $T = N\tau$), o erro acumulado deve ser então da ordem de $N\tau^2 \sim T\tau$, que converge para zero quando $\tau \rightarrow 0$.

Estimação dos erros no método de Euler. Este argumento pode ser feito rigoroso, com algumas hipóteses a priori sobre a solução.

Usa o seguinte lema, de interesse independente, que descreve um crescimento quase-exponencial em tempos discretos. Observe que a equação recursiva $y_{n+1} = \lambda y_n + \beta$, com λ positivo mas $\neq 1$, descreve um crescimento/decaimento (dependendo se λ é superior ou inferior a 1) exponencial com reposição/recolha (dependendo se β é positivo ou negativo), e a sua solução é $y_n = \lambda^n(y_0 - \bar{y}) + \bar{y}$, sendo $\bar{y} = \beta/(1 - \lambda)$ o equilíbrio.

Teorema 1.4. *Seja (y_n) uma sucessão de números não negativos que verifica*

$$y_{n+1} \leq \lambda y_n + \beta$$

com $\lambda, \beta > 0$ e $\lambda \neq 1$. Então

$$y_n \leq \lambda^n y_0 + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \beta.$$

A demonstração é simples, por indução.

Assumimos então que exista e seja única a solução de $\dot{x} = v(t, x)$ no intervalo $I = [t_0, t_0 + T]$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Assumimos também que a sua segunda derivada seja uniformemente limitada, i.e.

$$|\ddot{x}(t)| \leq M \quad (1.23)$$

e que o campo de velocidades seja Lipschitziano na segunda variável, i.e.

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq K |x - y|, \quad (1.24)$$

também uniformemente em $t \in I$.

Teorema 1.5. *Seja $x(t)$ a única solução de $\dot{x} = v(t, x)$ no intervalo $[t_0, t_0 + T]$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se o campo satisfaz (1.24) e a solução satisfaz (1.23), então a diferença entre os $x(t_n)$, com $t_n = t_0 + n\tau$ e $0 \leq n \leq N$, e os termos da sucessão $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$, obtida usando o método de Euler com passo $\tau = T/N$, é limitada por*

$$|x(t_n) - x_n| \leq M \frac{(1 + K\tau)^n}{2K} \tau.$$

Demonstração. Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange e a própria equação diferencial $\dot{x}(t_n) = v(t_n, x(t_n))$, podemos escrever

$$\begin{aligned} |x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &= |x(t_n + \tau) - x_n - v(t_n, x_n) \tau| \\ &= \left| x(t_n) + \dot{x}(t_n) \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 - x_n - v(t_n, x_n) \tau \right| \\ &= \left| x(t_n) - x_n + (v(t_n, x(t_n)) - v(t_n, x_n)) \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 \right| \end{aligned}$$

onde $0 < \delta < \tau$. Pela desigualdade do triângulo e as hipóteses (1.23) sobre a segunda derivada da solução e (1.24) sobre o campo vetorial,

$$\begin{aligned} |x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &\leq |x(t_n) - x_n| + |v(t_n, x(t_n)) - v(t_n, x_n)| \tau + \left| \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 \right| \\ &\leq |x(t_n) - x_n| + K\tau |x(t_n) - x_n| + M\tau^2/2. \end{aligned}$$

Portanto, a sucessão dos erros $\varepsilon_n = x(t_n) - x_n$ satisfaz

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1 + K\tau) |\varepsilon_n| + \frac{M\tau^2}{2}$$

Pelo teorema 1.4, com $\varepsilon_0 = 0$, $\lambda = (1 + K\tau)$ e $\beta = M\tau^2/2$, temos

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{(1 + K\tau)^n - 1}{K\tau} M\tau^2/2$$

e portanto o resultado. $\square$

Convergência do método de Euler. Como natural esperar, a cota superior aos erros no teorema 1.5 é máxima quando $n = N$, o número total de passos no intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Quando o passo $\tau \rightarrow 0$, o número de passos $N = T/\tau$ tende para o ∞ . Mas

$$M \frac{(1 + K\tau)^N}{2K} = M \frac{\left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N}{2K} \rightarrow M \frac{e^{KT}}{2K}$$

quando $N \rightarrow \infty$. Consequentemente, nas hipóteses do teorema 1.5, os erros são uniformemente limitados por

$$|\varepsilon_n| \leq M \frac{e^{KT}}{2K} \tau,$$

logo convergem para zero uniformemente quando $\tau \rightarrow 0$.

e.g. Exponencial. Consideramos a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$, que define a função exponencial. Se o passo é $\tau > 0$ e o tempo final é $t = n\tau$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \tau)^n$$

onde $n = t/\tau$ é o número de passos. No limite quando o passo $\tau \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução $x(t) = e^t$, pois

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (1 + \tau)^{t/\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t.$$

ex: Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...

ex: Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

Método RK-4. O método de Runge-Kutta (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

ex: Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

Software. Existem software livres e proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinárias e parciais.

Por exemplo, a livreria [SciPy](#) de [Python](#) contém a função [odeint](#)

```

9
10 # scientific libraries
11 import numpy as np
12 import matplotlib.pyplot as plt
13 from scipy.integrate import odeint
14
15 # parameters and initial conditions
16 q0 = 0.3 # initial position
17 p0 = 0.3 # initial momentum
18 beta = 0.1 # friction coefficient
19 omega = 1 # proper frequency
20 t0, T = 0, 10 # initial and final times
21 dt = 0.001 # time step
22
23 # vector field
24 def oscillator(y, t, beta, omega):
25     q, p = y
26     dqdt = p
27     dpdt = - (omega ** 2) * q - beta * p
28     return dqdt, dpdt
29
30 # integration
31 t = np.arange(t0, T, dt) # times
32 y0 = q0, p0 # set initial conditions
33 trajectory = odeint(oscillator, y0, t, args=(beta, omega))
34 q, p = trajectory.T
35
36 plt.figure()
37 plt.plot(q, p, label='orbit')
38 plt.title("ODE integration")
39 plt.xlabel('position')
40 plt.ylabel('momentum')
41 plt.legend()

```

2 Métodos elementares de integração

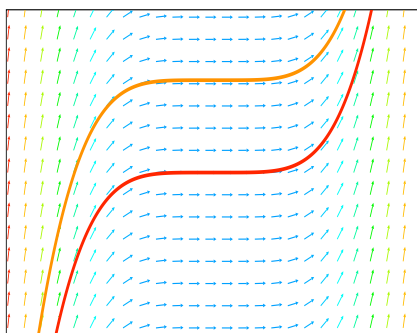
2.1 EDOs simples

12 fev 2024

Integração de EDOs simples. A equação diferencial mais simples é do gênero

$$\dot{x} = v(t) \quad (2.1)$$

onde o campo de direções $v(t)$ depende apenas do tempo t , e não da própria função incógnita x . Se $x(t)$ é solução de (2.1) então também $x(t) + c$ é solução, para todas as constantes $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, as soluções diferem por uma constante aditiva, determinada pela condição inicial.



Três soluções da EDO simples $\dot{x} = t^3 \sin(t)$ que diferem por uma constante aditiva.

O teorema (fundamental do cálculo) de Newton e Leibniz¹³ afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s) ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto,

Teorema 2.1. Se $v(t)$ é um campo de direções contínuo definido num intervalo de tempos I , então a solução $x(t)$ da EDO simples (2.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$, com $t_0, t \in I$, é determinada por meio de uma integração, ou seja, é dada por

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds \quad (2.2)$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo, a derivada da (2.2) é $\dot{x}(t) = v(t)$, e o seu valor no instante t_0 é $x(t_0) = x_0$, pois o integral $\int_{t_0}^{t_0} v(s) ds$ é nulo. A unicidade é um exercício. $\square$

Por causa deste teorema, as equações diferenciais simples são ditas *integráveis*, e “integrar” (uma equação diferencial) é usado como sinónimo de “resolver”.

ex: Integre (ou seja, determine a solução geral) as seguintes EDOs, definidas em oportunos intervalos de tempo

$$\dot{x} = 2 - t + 3t^2 + 5t^6 \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = 1/t$$

ex: Determine $x(t)$ sabendo que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{2t} & \text{e} & & x(0) &= 6 \\ \dot{x} &= \sin(t) & \text{e} & & x(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

¹³A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é “*Data aequatione quocunque fontes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*”.

ex: Mostre que a solução do teorema 2.1 é única (considere duas soluções, calcule a derivada da diferença, e utilize o teorema do valor médio ...)

Foguetão. Se um foguetão de massa $m(t)$ no espaço vazio (ou seja, sem forças gravitacionais!) expulsa combustível a uma velocidade relativa constante $-V$ e a uma taxa constante $\dot{m} = -\alpha$, (com $\alpha > 0$) então a sua trajetória num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = \dot{m}(v - V), \quad \text{e portanto} \quad , \quad m\dot{v} = -\alpha V.$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$ é a velocidade e $q(t)$ a posição.

ex: Resolva a EDO $\dot{m} = -\alpha$ para a massa do foguetão, com massa inicial $m(0) = m_0$, e substitua o resultado na equação de Newton, obtendo

$$\dot{v} = \frac{\alpha V}{m_0 - \alpha t}$$

(desde que $0 \leq t < m_c/\alpha$, onde $m_c < m_0$ é a massa inicial do combustível). Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, válida para tempos t inferiores ao tempo necessário para acabar o combustível.

ex: Se $q(t)$ representa a altura e o foguetão está sujeito à força gravitacional próximo da superfície da Terra, então a equação de movimento fica

$$m\dot{v} = -\alpha V - mg$$

Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, e determine a altura atingida no instante $\bar{t} = m_c/\alpha$ em que o combustível acaba.

Elementos R , C ou L num circuito alimentado com tensão alternada. Consideramos um circuito alimentado por uma fonte de tensão alternada (AC), com uma força electromotriz

$$V(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

de frequência angular ω e amplitude E_0 . Se o circuito é composto apenas de uma resistência R , então a corrente $I(t)$ satisfaz a equação $V = RI$, e portanto é uma oscilação

$$I(t) = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t)$$

em fase com a tensão. Se o circuito é composto por apenas um condensador de capacidade C e tem resistência (praticamente) nula, então a carga $Q = \int I$ no condensador, suposta inicialmente nula, satisfaz $V = Q/C$. Consequentemente, a corrente satisfaz a equação $\frac{1}{C}I(t) = \dot{V}$. Isto diz que a corrente é uma oscilação

$$I(t) = -\omega C E_0 \sin(\omega t) = \omega C E_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

avanzada $\pi/2$ em relação à tensão. Finalmente, se o circuito é composto por apenas uma bobina de indutância L e tem resistência (praticamente) nula, então a corrente $I(t)$ satisfaz a EDO

$$L\dot{I} = V$$

A solução com condição inicial nula é uma oscilação

$$I(t) = \frac{E_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{E_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

atrasada de um ângulo $\pi/2$ relativamente à tensão.

Braquistócrona. A **braquistócrona** é a curva ao longo da qual uma partícula inicialmente em repouso desliza, sem atrito e sujeita à gravidade, entre dois pontos de um plano vertical em um tempo menor possível (Bernoulli, Newton, Leibniz). De acordo com a solução genial de Johann Bernoulli (que podem ler em [Si91] ou também ver e ouvir em [3Blue1Brown](#) explicada por Steven Strogatz), a velocidade escalar v da partícula e o ângulo φ que a curva forma com a vertical satisfazem

$$\frac{\sin \varphi}{v} = \frac{1}{\alpha}$$

para alguma constante α (a velocidade escalar máxima atingida no ponto de altura mínima da curva, quando $\varphi = \pi/2$), por analogia com o “princípio de Fermat” da óptica geométrica, logo a “lei de Snell” sobre os ângulos de refração. Por outro lado, pela conservação da energia a velocidade escalar é proporcional a

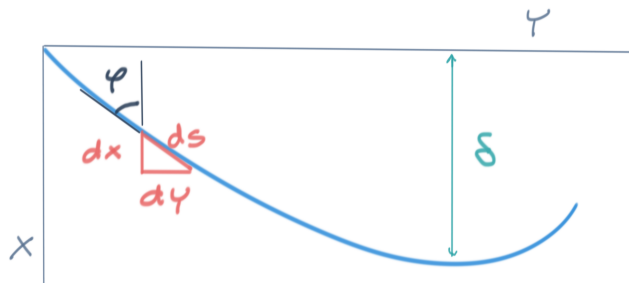
$$v = \sqrt{2gx}$$

se x denota a queda da partícula e g a aceleração gravitacional. Consequentemente, a braquistócrona é a curva que satisfaz a identidade

$$\sin \varphi = \sqrt{x/\delta}$$

onde $\delta = \alpha^2/2g$ denota a queda máxima, atingida quando a velocidade escalar é máxima. Se $y(x)$ denota a distância horizontal percorrida enquanto função da queda x , então $\sin \varphi = dy/ds$ com $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Finalmente, depois de alguma ginástica, a braquistócrona é definida pela EDO

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{\delta - x}} \quad (2.3)$$



ex: Use a substituição trigonométrica $x = \rho(1 - \cos \theta)$ com $\rho = \delta/2$ (observe que x varia entre 0 e δ) e a identidade $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ para calcular uma primitiva do segundo membro da (2.3). Deduza que a braquistócrona é a curva paramétrica

$$x(\theta) = \rho(1 - \cos \theta) \quad y(\theta) = \rho(\theta - \sin \theta)$$

ou seja, uma **cicloide** gerada por uma roda de raio ρ .

ex: A lei horária pode ser calculada integrando $dt = ds/v$. Verifique que a partícula, inicialmente em $x = 0$, atinge a posição $x = \delta$, o mínimo da curva, no tempo

$$t = \sqrt{\rho/g} \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{\delta x - x^2}} = \pi \sqrt{\rho/g}$$

(para calcular o integral, é útil usar a substituição trigonométrica anterior).

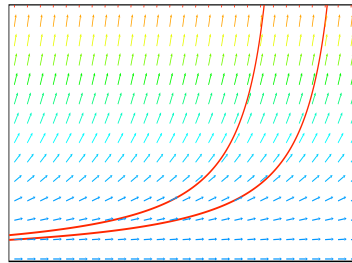
ex: Calcule a lei horária de uma partícula que se desloca ao longo de uma braquistócrona, a partir de um ponto arbitrário com velocidade inicial nula. Verifique que a partícula atinge o mínimo da curva no tempo $\pi \sqrt{\rho/g}$, independentemente da posição inicial (e portanto a cicloide é uma **curva tautocrônica**).

2.2 EDOs autónomas

Campos de vetores e EDOs autónomas na reta. Um campo de vetores $v : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x). \quad (2.4)$$

A palavra “autónoma” indica que o campo $v(x)$ não depende explicitamente do tempo. Se $x(t)$ é solução de (2.4), então também $x(t-c)$ é solução, para todos os tempos $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a física modelada por uma EDO autónoma é invariante para translações no tempo. Em particular, podemos sempre considerar, sem perda de generalidade, as condições iniciais dadas no tempo $t_0 = 0$.

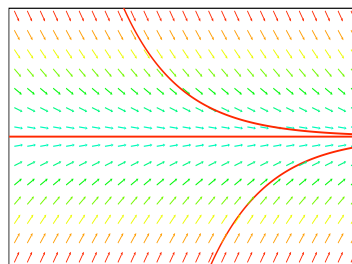


Duas soluções da EDO autónoma $\dot{x} = x^2$ que diferem por uma translação no tempo.

Se x_0 é um *ponto singular* do campo de vetores, ou seja, um ponto onde $v(x_0) = 0$, então a trajetória constante

$$x(t) = x_0$$

para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária*, ou *de equilíbrio*, da equação diferencial autónoma (2.4).



Equilíbrio e outras duas soluções da EDO autónoma $\dot{x} = -x$.

Se x_0 é um ponto *regular* do campo contínuo $v(x)$, ou seja, se $v(x_0) \neq 0$ (e portanto, pela continuidade, $v(x)$ é diferente de zero numa vizinhança de x_0), então uma solução local de (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada “separando as variáveis”, ou seja, fazendo formalmente

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{v(x)} = dt$$

e integrando os dois membros,

$$\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$$

entre limites de integração apropriados. Ou seja,

Teorema 2.2. *Se x_0 é um ponto regular do campo contínuo $v(x)$, então a única solução local da EDO autónoma (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é dada implicitamente por*

$$\boxed{\int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0} \quad (2.5)$$

num intervalo de tempos suficientemente pequeno em torno de t_0 .

Demonstração. Assumimos que o campo de velocidades v é contínuo, e seja $J = (x_-, x_+)$ o intervalo maximal contendo x_0 onde v é diferente de zero. Definimos a função $H : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(t, x) = t - t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}.$$

Se $t \mapsto \varphi(t)$ é uma solução do problema de Cauchy, então um cálculo mostra que $\frac{d}{dt}H(t, \varphi(t)) = 0$ para todo tempo t . Consequentemente H é constante ao longo das soluções do problema de Cauchy. Sendo $H(t_0, x_0) = 0$, concluímos que o gráfico de toda solução pertence ao conjunto de nível $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J \text{ s.t. } H(t, x) = 0\}$. A função H é derivável, e o seu diferencial $dH = dt - dx/v(x)$ não é nulo. De facto, as duas derivadas parciais $\partial H/\partial t$ e $\partial H/\partial x$ são sempre diferentes de zero. Pelo teorema da função implícita o conjunto de nível Σ é, numa vizinhança $I \times J$ do ponto (t_0, x_0) , o gráfico de uma função diferenciável $x \mapsto t(x)$, assim como o gráfico de uma função diferenciável $t \mapsto x(t)$, a função inversa de $t(x)$, que é uma solução do problema de Cauchy. De facto, a sua derivada é, pelo teorema da função inversa,

$$\dot{x}(t) = 1 / \left(\frac{dt}{dx}(x(t)) \right) = v(x)$$

e a condição inicial é $x(t_0) = x_0$. □

Observe que a função $t(x) - t_0$ tem a interpretação do “tempo necessário para ir de x_0 até x ”.

É possível também provar a unicidade das soluções estacionárias usando a hipótese de derivabilidade do campo. A primeira observação é o resultado “óbvio”, que diz que “quem anda mais devagar não vai mais longe”.

Teorema 2.3 (teorema de comparação). *Sejam $v(x)$ e $w(x)$ dois campos vetoriais contínuos tais que $v(x) < w(x)$ para todo x . Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções, definidas num mesmo intervalo de tempos (a, b) (com a e b possivelmente infinitos), das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$, respetivamente, com a mesma condição inicial $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ para algum $a < t_0 < b$. Então*

$$x(t) \leq y(t)$$

para todo tempo $t \geq t_0$ (e $x(t) \geq y(t)$ para todo tempo $t \leq t_0$).

Demonstração. Seja τ o supremo dos tempos c entre $t_0 \leq c < b$ tais que $x(t) \leq y(t)$ para todo $t \in (t_0, c)$. Se $\tau < b$, pela continuidade das soluções $x(\tau) = y(\tau)$ e, neste ponto, $\dot{x}(\tau) < \dot{y}(\tau)$ pela hipótese sobre os campos. Mas isto implica que $x(t) < y(t)$ para todos tempos $t > \tau$ suficientemente próximos de τ (porquê?), o que contraria a definição de τ . O absurdo implica que $\tau = b$. A outra afirmação é obtida ao inverter o sentido do tempo. □

Finalmente, temos o seguinte resultado de unicidade das soluções de uma EDO autónoma nos pontos singulares (a condição de diferenciabilidade pode ser enfraquecida, apenas é necessário que os integrais $\int_{x_0}^x dy/v(y)$ sejam divergentes).

Teorema 2.4. *Seja x_0 um ponto singular do campo diferenciável $v(x)$. Então a solução estacionária $x(t) = x_0$ é a única solução de $\dot{x} = v(x)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$.*

Demonstração. A ideia é simples. Podemos assumir que o ponto crítico é a origem, ou seja, $x_0 = 0$, e que $t_0 = 0$. Pela diferenciabilidade, o campo é limitado por um campo linear

$$|v(x)| < \lambda|x|$$

com $\lambda > 0$ numa vizinhança da origem. Assumimos que exista uma solução de $\dot{x} = v(x)$ com condição inicial $x(0) = 0$ que passe por $x(\tau) = c > 0$ para algum tempo $\tau > 0$ (os outros casos, com τ negativo e/ou c negativo, podem ser tratados da mesma maneira). A solução de $\dot{y} = ky$ com condição inicial $y(\tau) = c$ é $y(t) = ce^{k(t-\tau)}$. Como $v(x) < kx$ quando $x > 0$, pelo teorema de comparação $x(t) \geq y(t)$ quando $t < \tau$. Como $y(t)$ não atinge a origem num tempo finito, $x(t)$ também não pode passar pela origem quando $t = 0$, contrariamente à hipótese. $\square$

e.g. Exponencial. Consideramos a equação diferencial autónoma

$$\dot{x} = \lambda x$$

com $\lambda \neq 0$ (que já sabemos resolver). A solução de equilíbrio é $x(t) = 0$. A solução com condição inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$ é obtida separando as variáveis,

$$\frac{dx}{x} = \lambda dt$$

e integrando, de acordo com

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y} = \lambda \int_{t_0}^t ds \quad \Rightarrow \quad \log |x/x_0| = \lambda(t - t_0)$$

Se $x_0 \neq 0$, então por continuidade o sinal de $x(t)$ é igual ao sinal de x_0 para tempos suficientemente pequenos (e também para tempos grande, pois pelo teorema de unicidade (1.3) a única solução que assume o valor nulo em algum tempo é a solução de equilíbrio). Podemos então tirar o valor absoluto, calcular o exponencial, e obter finalmente

$$x(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

Por acaso, esta fórmula também inclui a solução de equilíbrio quando $x_0 = 0$.

ex: Considere as seguintes EDOs autónomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x^2 & \dot{x} &= x^2 + 1 & \dot{x} &= \sqrt{x} \\ \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= (x-1)(x-2) & \dot{x} &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

definidas em intervalos convenientes. Encontre, caso existam, as soluções estacionárias. Desenhe os respectivos campos de vetores e conjecture sobre o comportamento das soluções. Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine, quando possível, umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

Atrito e tempo de relaxamento. O atrito pode ser modelado, em primeira aproximação (ou seja, para velocidades pequenas), como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$

onde $\gamma > 0$ é o “coeficiente de atrito”. A velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$

onde $\tau = m/\gamma > 0$. A solução é $v(t) = e^{-t/\tau}v(0)$, assim que τ é um “tempo de relaxamento”, o tempo necessário para reduzir a velocidade de um factor $1/e$. A energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T,$$

e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$.

ex: Calcule a solução de $m\ddot{q} = -\gamma q$ com posição inicial $q(0) = q_0$ e velocidade inicial $\dot{q}(0) = v_0$.

ex: A tensão $V(t)$ sobre o capacitor num filtro/circuito RC é modelada pela lei de Kirchoff

$$C\dot{V} + \frac{1}{R}V = 0$$

Verifique que a solução com tensão inicial $V(0) = V_0$ é

$$V(t) = V_0 e^{-RCt}$$

Ou seja, a corrente decai exponencialmente com um tempo característico $\tau = 1/(RC)$.

Queda livre com atrito. A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre em presença de atrito pode ser então modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $q(t)$ é a altura no instante t , $m > 0$ é a massa, $g \simeq 9.80 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\gamma > 0$ é um coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -\gamma v - mg.$$

A solução de equilíbrio é $v = -v_\infty$, onde $v_\infty := mg/\gamma$. As outras soluções com $v(0) = v_0$ podem ser encontradas separando as variáveis,

$$\frac{dv}{v + v_\infty} = -\frac{dt}{\tau}$$

e integrando, tendo definido $\tau = m/\gamma$. O resultado é

$$v(t) = -v_\infty + (v_0 + v_\infty) e^{-t/\tau}$$

Ou seja, a velocidade inicial é “esquecida” e é atingida exponencialmente a velocidade assintótica $-v_\infty$ num tempo típico da ordem de τ .

ex: Utilize a solução encontrada para determinar a trajetória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = q_0 > 0$.

ex: Considere um elétron de massa m e carga $-e$ num sólido, sujeito a um campo elétrico constante E . A sua velocidade $v(t)$ é então modelada pela equação de Newton

$$m\dot{v} = -\gamma v - eE$$

se γ é um coeficiente de atrito que depende da estrutura do sólido e das impurezas (no cobre, a temperaturas baixas $T \simeq 4K$, o tempo de relaxamento é $\tau = m/\gamma \approx 10^{-9} \text{ s.}$). Calcule a velocidade assintótica v_∞ do elétron. Mostre que a “condutividade”, a razão entre a “densidade de corrente”

$$j = (\text{densidade de número}) \times (\text{carga elétrica}) \times (\text{velocidade}) = n \cdot e \cdot v_\infty$$

e o campo elétrico E , é dada pela fórmula $\sigma = n\tau e^2/m$.

Atrito a grandes velocidades. Quando a velocidade não é pequena, o atrito que um fluido exerce sobre um corpo macroscópico é melhor modelado como sendo uma força contrária à velocidade e proporcional ao seu quadrado (efeito de colisões elásticas de uma grande quantidade de moléculas microscópicas do fluido sobre um objeto macroscópico). A equação de Newton da queda livre com atrito (por exemplo a queda de um paraquedista) fica portanto

$$m\dot{v} = -\alpha v|v| - mg,$$

onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito (que um modelo microscópico simples estima ser da ordem $\alpha \sim S\rho$, sendo S a superfície do objeto em movimento e ρ a densidade do fluido). A solução estacionária é $v = -v_\infty$, onde $v_\infty = \sqrt{mg/\alpha}$. As outras soluções com velocidade $v(t) \leq 0$ (é claro que uma velocidade inicial positiva é um fenómeno transiente) podem ser obtidas separando as variáveis,

$$\frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{g}{v_\infty^2} dt$$

Mas

$$\frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{1}{2v_\infty} \left(\frac{1}{v - v_\infty} - \frac{1}{v + v_\infty} \right) dv = \frac{1}{2v_\infty} d \log \left(\frac{v - v_\infty}{v + v_\infty} \right)$$

Finalmente, a solução com condição inicial $v(0) = 0$ é implicitamente dada por

$$\frac{1}{2v_\infty} \log \left(\frac{v(t) - v_\infty}{v(t) + v_\infty} \right) = \frac{g}{v_\infty^2} t$$

ou, com algum trabalho, explicitamente por

$$v(t) = -v_\infty \tanh(gt/v_\infty)$$

Também neste caso, a velocidade atinge o valor assintótico $-v_\infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Logística. Um modelo mais realista da dinâmica de uma população $N(t)$ num meio ambiente limitado é dado pela *equação logística*¹⁴

$$\dot{N} = \lambda N (1 - N/M)$$

onde a constante positiva M é a população máxima permitida e $\lambda > 0$. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow M$. A “população relativa” $x(t) := N(t)/M$ satisfaz a equação logística “adimensional”

$$\dot{x} = \lambda x (1 - x). \quad (2.6)$$

As soluções de equilíbrio são $\bar{x} = 0$ (população ausente) e $\bar{x} = 1$ (ou seja, $\bar{N} = M$, população máxima). A solução de (2.6) com condição inicial $x(0) = x_0 \neq 0, 1$ pode ser determinada separando as variáveis e integrando, e é dada em forma implícita por

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y(1-y)} = \int_0^t \lambda ds$$

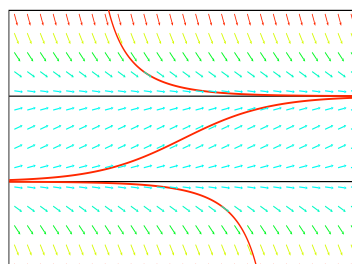
ex: Use a identidade

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

e deduza que a solução de (2.6) com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ (fora deste intervalo o modelo não faz sentido físico) é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right) e^{-\lambda t}}.$$

ex: Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.



¹⁴Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

Epidemias. Num surto epidémico, a taxa de crescimento do número $I(t)$ de indivíduos infetados, dentro de uma população total constante N , é proporcional ao produto do número de indivíduos infetados e o número $S(t) = N - I(t)$ de indivíduos saudáveis (e portanto susceptíveis de serem infetados), ou seja,

$$\dot{I} = \lambda I (N - I)$$

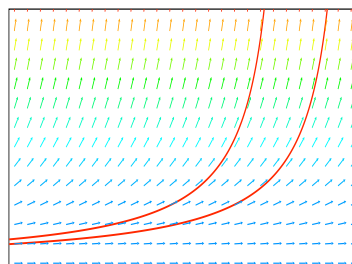
com $\lambda > 0$.

ex: Determine a lei de crescimento da população infetada relativa $x(t) := I(t)/N$, e discuta o comportamento assintótico de $x(t)$.

Crescimento super-exponencial/explosão. Um outro modelo de dinâmica de uma população em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N^2,$$

ou seja, a taxa de crescimento é proporcional aos pares de indivíduos contidos na população. A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$.



ex: Mostre que a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = \frac{1}{N_0^{-1} - \lambda t},$$

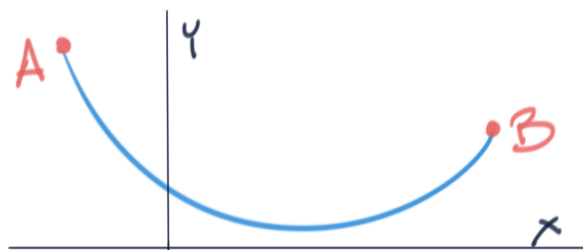
definida para tempos $t < 1/\lambda N_0$. Este modelo prevê uma catástrofe (população infinita, explosão) após um intervalo de tempo finito!

Catenária. A *catenária*, é a curva descrita, num plano vertical, por uma corrente flexível fixada pelas extremidades e sujeita apenas à gravidade (Leonardo da Vinci, Galileo, ... Huygens, Leibniz e os Bernoulli). A equação diferencial para a altura $y(x)$ é

$$\lambda \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

onde $\lambda = \alpha \rho g / t$ é uma constante que depende da seção α e da densidade ρ da corda, da aceleração gravitacional g e da tensão t . O declive $z = dy/dx$ satisfaz então a EDO de primeira ordem

$$\lambda \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$



ex: Separe as variáveis e mostre que

$$\log(z + \sqrt{1 + z^2}) = \frac{x}{\lambda}$$

é a solução implícita com condição inicial $z(0) = y'(0) = 0$, assim que $x = 0$ é o ponto onde a altura atinge o mínimo. Deduza que $z = \sinh(x/\lambda)$ e portanto, ao integrar, que a catenária é um coseno hiperbólico

$$y(x) = \lambda \cosh(x/\lambda) + c$$

Tractrix. A **tractrix** é a curva descrita, num plano horizontal, por um objeto, sujeito ao atrito, fixado a uma extremidade de um segmento cuja outra extremidade desliza ao longo de uma reta (Perrault, Newton, Huygens e Leibniz). Num referencial conveniente, é o gráfico de uma função $y(x)$ determinada pela EDO

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\ell^2 - y^2}{y^2}$$

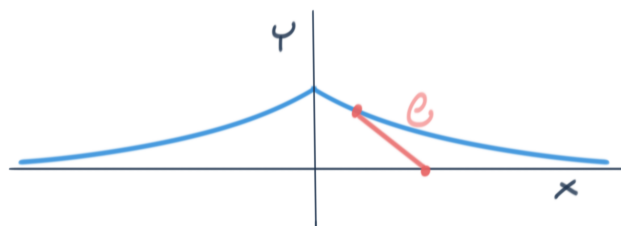
com condição inicial $y(\ell) = 0$, onde $\ell > 0$ denota o comprimento do segmento.

ex: Resolva para a derivada de acordo com

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\ell^2 - y^2}}{y}$$

separe as variáveis e mostre que a curva é descrita por

$$y(x) = \pm \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - x^2}}{x} - \sqrt{\ell^2 - x^2} \right)$$



Fazer modelos. Escreva equações diferenciais que modelam cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

ex: A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.

ex: A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.

ex: A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

ex: Uma esfera de gelo derrete a uma taxa proporcional à sua superfície.

ex: A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

2.3 EDOs separáveis

Produto direto de EDOs. O *produto direto* das EDOs autônomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$ é o sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ \dot{y} = w(y) \end{cases} \quad (2.7)$$

definido no plano. As soluções do sistema são os caminhos $t \mapsto (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções das EDOs autônomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$, respectivamente.

Se (x_0, y_0) é um ponto singular para o sistema (2.7), ou seja, um ponto onde $v(x_0) = 0$ e $w(y_0) = 0$, então $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ é uma solução estacionária do sistema. Se x_0 é um ponto singular para v e y_0 é um ponto regular para w , então é claro que as curvas de fases do sistema que passam por (x_0, y_0) são segmentos verticais no plano. Vice-versa, se x_0 é um ponto regular para v e y_0 é um ponto singular para w , então é claro que as curvas de fases do sistema que passam por (x_0, y_0) são segmentos horizontais no plano.

Consideramos finalmente o caso genérico de um ponto regular (x_0, y_0) para os dois campos, onde $v(x_0) \neq 0$ e $w(y_0) \neq 0$. A solução de (2.7) que passa no instante t_0 pelo ponto (x_0, y_0) é determinada implicitamente por

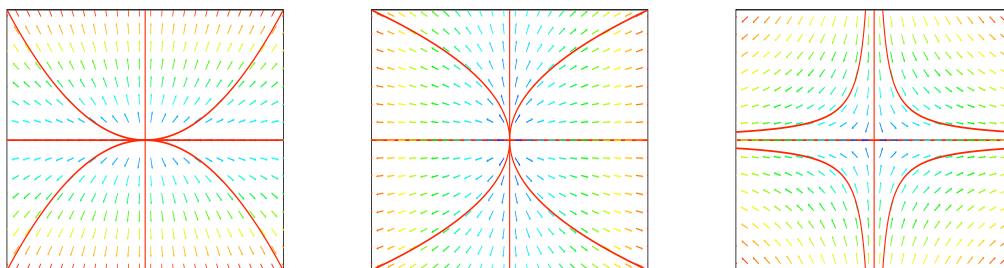
$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = t - t_0 \quad \text{e} \quad \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)} = t - t_0$$

A curva de fases é obtida eliminando o tempo $t - t_0$, e é portanto definida pela equação cartesiana

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)}$$

Pelo teorema da função implícita (válido desde que os campos v e w sejam suficientemente regulares), esta curva é localmente o gráfico de uma função $x \mapsto y(x)$ ou de uma função $y \mapsto x(y)$ que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{v(x)}{w(y)}$$



ex: Determine as soluções e esboce as curvas de fases do sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases}$$

ao variar os “valores próprios” (da matriz diagonal subentendida) λ e μ .

EDOs separáveis. Uma equação diferencial do gênero

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \quad (2.8)$$

onde o campo de direções é um produto de uma função da variável independente e uma função da variável dependente (a função incógnita) é dita *separável*. Casos particulares são EDOs simples e autônomas.

De acordo com a discussão anterior, estas equações diferenciais podem ser consideradas equações diferenciais que definem as curvas de fases de um produto direto de duas EDOs autônomas. A

solução de (2.8) com condição inicial $y(x_0) = y_0$ tal que $v(x_0) \neq 0$ e $w(y_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)}} \quad (2.9)$$

Assim, a integração de uma EDO separável consiste em calcular primitivas.

e.g. Por exemplo, consideramos a EDO separável

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\theta^2}$$

no primeiro quadrante, ou seja, com $r > 0$ e $\theta > 0$. As soluções são obtidas integrando

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{d\theta}{\theta^2} \quad \Rightarrow \quad \log r = c - 1/\theta$$

e são do género $r = Ce^{-1/\theta}$ para algumas constantes positiva $C = e^c$.

ex: Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\begin{array}{lllll} \frac{dy}{dx} = -x/y & \frac{dy}{dx} = x/y & \frac{dy}{dx} = kx^\alpha y^\beta & \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y} & \\ \dot{x} = tx^3 & t\dot{x} + t = t^2 & \dot{x} = t^3/x^2 & x\dot{x} = e^{x+3t^2}t & \dot{x} = e^{t-x} \\ \dot{x} = \frac{t-1}{x^2} & \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 & (t^2+1)\dot{x} = 2tx & \dot{x} = t(x^2-x) & \end{array}$$

Allometric laws. If two organs/tissues/components of a living body/organism/community grow with different (but both constant!) relative growth rates α and β , say

$$\dot{x} = \alpha x \quad \text{and} \quad \dot{y} = \beta y$$

(the independent variable t may be time, or a linear dimension, or something else), then they satisfy the relation

$$\frac{1}{\beta y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha x} \frac{dx}{dt}$$

Eliminating “ dt ”, we get the linear/separable/homogeneous ODE

$$\frac{dy}{dx} = (\beta/\alpha) \frac{y}{x},$$

Its solution is the *allometric law* ^{15 16}

$$y = c \cdot x^\gamma \quad \text{or, equivalently,} \quad \log y = \gamma \cdot \log x + \log c,$$

with “scaling exponent” $\gamma = \beta/\alpha$, and some constant $c = x_0/y_0$ related to the initial conditions $x(t_0) = x_0$ and $y(t_0) = y_0$.

A famous example is *Kleiber’s law* ¹⁷ (*mouse-to-elephant curve*)

$$\text{BMR} = c \cdot M^{3/4}$$

which relates the basal metabolic rate BMR to the mass M of an animal.

¹⁵W. D’Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 1917, 2nd ed. 1942 [Cambridge University Press, 1992].

¹⁶Julian S. Huxley, *Problems of Relative Growth* (2nd ed.), Dover, 1972.

¹⁷M. Kleiber, Body size and metabolism, *Hilgardia* **6** (1932), 315-351. M. Kleiber, Body size and metabolic rate, *Physiological Reviews* **27** (1947), 511-541.

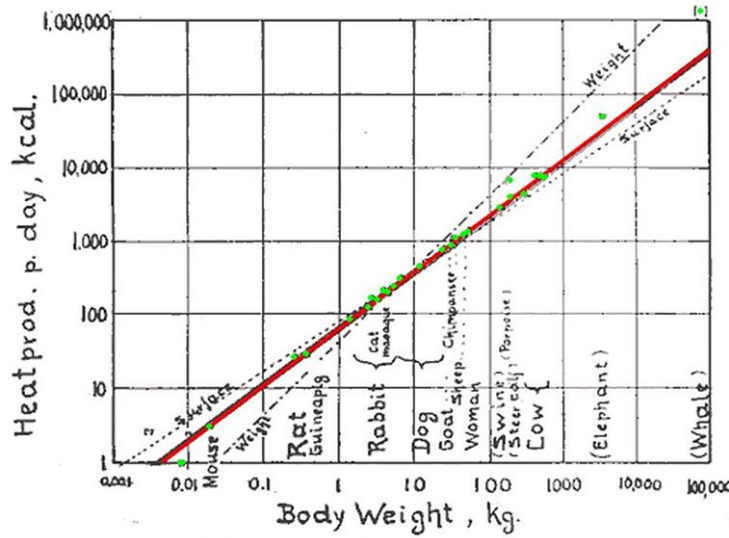


Fig. 1. Log. metabol. rate/log body weight

Original graph of body size versus metabolic rate hand-drawn by Max Kleiber
(source [Wikipedia](#))

The heart rate T and the mass M of an animal are related by the allometric law

$$T = c \cdot M^{1/4}$$

Sistemas autónomos no plano e “EDOs exatas”. Consideramos agora um sistema autónomo genérico em dimensão dois, não necessariamente separável,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = -g(x, y) \end{cases} \quad (2.10)$$

definido pelo campo vetorial $\mathbf{v}(x, y) = (f(x, y), -g(x, y))$ (o sinal negativo apenas simplifica uma expressão mais à frente). Encontrar as soluções pode ser mesmo difícil, se não impossível. Apenas sabemos tratar o caso linear, ao calcular o exponencial de uma matriz (mas este assunto não faz, lamentavelmente, parte do nosso programa de CAM). As imagens das trajetórias são curvas no plano x - y , localmente soluções (de pelo menos uma) das equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (2.11)$$

(dependendo das raízes de f e g) obtidas ao eliminar formalmente os “ dt ” na (2.10).

Parece natural, para recuperar a simetria entre as duas variáveis, reformular o problema como

$$g(x, y) dx + f(x, y) dy = 0 \quad (2.12)$$

A grande parte dos manuais que podem encontrar nas bibliotecas dizem que esta “é uma das formas canónicas das EDOs (2.11)”. O problema é que a (2.12) não é uma equação diferencial! O lado esquerdo é uma “forma diferencial de grau um”

$$\omega := g(x, y) dx + f(x, y) dy \quad (2.13)$$

uma função que associa a cada ponto (x, y) do plano um funcional linear definido sobre o espaço tangente ao plano neste ponto, que é uma cópia de $\mathbb{R}^2$ (o valor da forma $\alpha dx + \beta dy$ sobre o vetor tangente $a \partial/\partial x + b \partial/\partial y \approx (a, b)$ sendo $\alpha a + \beta b$). A equação $\omega = 0$ é uma expressão que literalmente define os pontos do plano onde a forma é nula, nada de interessante. O que sim faz sentido considerar é o campo de direções definido pelo núcleo de ω (o conjunto dos vetores tangentes que anulam a forma) em cada ponto do plano. O núcleo de ω no ponto (x, y) é a reta

paralela ao vetor $((f(x, y), -g(x, y)))$, e este campo de direções coincide naturalmente com as EDOs (2.11).

É claro que multiplicar por um mesmo factor não nulo $q(x, y)$ as duas componentes do campo de vetores $\mathbf{v}(x, y)$ muda a lei horária mas não muda as curvas de fases do sistema (2.10) (pois apenas afeta a velocidade com que estas curvas são percorridas). Esta operação transforma ω na forma proporcional $q\omega$, que define o mesmo campo de direções, logo a mesma equação diferencial, se a função q não assume o valor zero.

Pode acontecer então que uma escolha particularmente feliz da função $q(x, y)$ transforme a forma (2.13) num “diferencial exato”

$$dH = q\omega = q(x, y)g(x, y) dx + q(x, y)f(x, y) dy$$

de alguma função $H(x, y)$, no sentido em que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = q(x, y)g(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = q(x, y)f(x, y)$$

Consequentemente, a função H é uma constante do movimento do sistema, pois

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= q(x, y)g(x, y)f(x, y) - q(x, y)f(x, y)g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

ao longo das soluções de (2.10). As curvas de fases do sistema (2.10) são então, localmente, as curvas de nível da função $H(x, y)$. Ou seja, cada curva de nível $H(x, y) = c$ define localmente uma solução implícita da equação diferencial (2.11) definida pelo núcleo da forma ω . A função $q(x, y)$ é chamada *fator integrante* (da equação diferencial).¹⁸

A existência de um factor integrante numa vizinhança de um ponto regular do campo $\mathbf{v}$ é de facto garantida pelo teorema de rectificabilidade de um campo vetorial numa vizinhança de um ponto regular (o resultado básico sobre equações diferenciais ordinárias [Ar85], e um caso particular do teorema de Frobenius). A existência de um fator integrante global depende, por outro lado, da estrutura das órbitas do sistema. Encontrar um fator integrante pode ser, no entanto, tão difícil como integrar uma equação diferencial. De facto, de acordo com o “lema de Poincaré”, uma forma $q\omega = Adx + Bdy$ é localmente exata sse é fechada, ou seja, sse $\partial B/\partial x = \partial A/\partial y$, e esta última condição é uma equação às derivadas parciais para a função q . Não conheço nenhuma equação diferencial interessante da física-matemática que apenas pode ser integrada usando um fator integrante (aconselho ler a discussão deste assunto em [Ar85]). Por esta razão, não me parece útil propor exercícios sobre o assunto.

O único “fator integrante” fundamental que conheço é o inverso $\beta = 1/T$ da “temperatura absoluta” de um sistema termodinâmico, que transforma a variação de calor δQ num diferencial exato, o da entropia $S = \int \delta Q/T$. Mas esta é outra história.

e.g. Oscilador harmónico. Por exemplo, o oscilador harmónico é o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q \end{aligned}$$

As suas órbitas no plano q - p são soluções da EDO separável

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{q}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{dq}{dp} = -\frac{p}{q}$$

logo são tangentes ao núcleo da forma $\omega = qdq + pdp$. Esta forma é claramente exata, sendo o diferencial da função

$$H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2)$$

chamada “energia”. É um exercício verificar que a energia é uma constante do movimento. Os seus conjuntos de nível são circunferências centradas na origem. Como veremos na próxima seção 3.4 e podem verificar com um cálculo, as órbitas são de facto as circunferências parametrizadas $t \mapsto (r \cos(t - t_0), r \sin(t - t_0))$, onde $r = \sqrt{2H}$.

¹⁸Lamentavelmente, muitos manuais chamam $q\omega = 0$ “equação diferencial exata”, como se $q\omega = 0$ e $\omega = 0$ fossem duas equações diferenciais diferentes! Este é claramente um abuso de linguagem histórico e pedagógico, herança de uma matemática oitocentista anterior à moderna visão geométrica de Poincaré...

ex: Considere o sistema linear

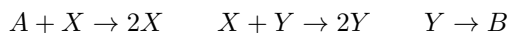
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

cujas curvas de fases são tangentes ao núcleo da forma $\omega = -ydx + xdy$. Mostre que o sistema não admite constantes do movimento diferentes da função constante (uma constante do movimento deve ser constante ao longo de cada trajetória, logo de cada semireta que sai da origem, e portanto deve ser igual, por continuidade, ao seu valor na origem). Consequentemente, a equação definida pelo núcleo de ω não admite um fator integrante global (ou seja, definido em todo o plano).

Lotka-Volterra. O modelo de Lotka-Volterra é o sistema não linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra¹⁹ para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka²⁰ para modelar o comportamento cíclico de certas reações químicas como

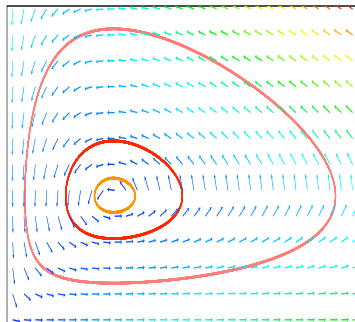


As presas crescem exponencialmente e morrem a uma taxa proporcional à probabilidade de serem capturada pelos predadores (logo proporcional ao produto das duas populações), enquanto os predadores decaem exponencialmente e crescem com uma taxa proporcional à probabilidade de capturar presas. A única solução de equilíbrio é $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ (na região interessante onde as duas populações são positivas, o primeiro quadrante).

É imediato verificar que a forma diferencial $\omega = (\gamma y - \delta xy)dx + (\alpha x - \beta xy)dy$, ingenuamente associada ao sistema, não é exacta. No entanto, a forma $q\omega = (\delta - \gamma/x)dx + (\beta - \alpha/y)dy$, obtida usando o fator integrante $q(x, y) = 1/xy$, é claramente exacta, sendo o diferencial da função

$$H(x, y) = \delta x + \beta y - \gamma \log x - \alpha \log y$$

Isto significa que $H(x, y)$ é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$. Consequentemente, as órbitas do sistema de Lotka-Volterra estão contidas (e de facto são) nas curvas de nível de H , as curvas fechadas esboçadas na seguinte figura. A conclusão é que as populações de presas e predadores oscilam em torno da posição de equilíbrio.



Retrato de fases do sistema de Lotka-Volterra.

2.4 EDOs lineares de primeira ordem

[Ap69] Vol. 1, 8.1-7

¹⁹V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. V. Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

²⁰A.J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc.* **27** (1920), 1595. A.J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

EDOs lineares de primeira ordem. Uma EDO linear de primeira ordem é uma lei

$$\dot{x} + p(t)x = q(t) \quad (2.14)$$

para o observável $x(t)$, onde os “coeficientes” $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas definidas num intervalo de tempos (por exemplo, em toda a reta real). É claro que o caso interessante é quando pelo menos um dos coeficientes $p(t)$ e $q(t)$ não é constante, pois caso contrário esta é uma EDO autónoma, facilmente integrável.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem (2.4), então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da *equação homogénea associada*

$$\dot{y} + p(t)y = 0 \quad (2.15)$$

que é uma EDO separável. O espaço das soluções da equação homogénea (2.15) é um espaço vetorial de dimensão 1, uma reta $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}$ gerada, por exemplo, pela solução

$$y_1(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \quad (2.16)$$

que vale $y_1(t_0) = 1$ no instante inicial t_0 . Portanto, o espaço das soluções da equação linear (2.4) é uma reta afim $z + \mathcal{H}$, onde $z(t)$ é uma solução particular de (2.4).

A solução da EDO linear (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada usando o método da “variação das constantes/dos parâmetros”. O primeiro passo consiste em determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogénea (2.15) (por exemplo, a solução (2.16), que tem valor 1 no instante inicial). O segundo passo consiste em substituir a “conjetura”

$$x(t) = \lambda(t)y(t)$$

(o factor λ é o parâmetro que varia!) na equação não-homogénea (2.4), deduzir a EDO simples

$$\dot{\lambda}y + \lambda\dot{y} + p\lambda y = q \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}y = q$$

(porque $\lambda\dot{y} + p\lambda y = 0$, sendo y uma solução da homogénea) para o parâmetro $\lambda(t)$, e integrar

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{q(s)}{y(s)} ds,$$

usando a condição inicial $x_0 = \lambda(t_0)y(t_0)$. Observe que se $y(t_0) = 1$, como sugerido, então $x_0 = \lambda(t_0)$. O resultado é a seguinte receita (mas é mais fácil lembrar o método!).

Teorema 2.5. A solução da (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u) du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u) du} q(s) ds \right). \quad (2.17)$$

Inversão de operadores diferenciais de primeira ordem. O caso mais importante é quando a função $p(t)$ é uma constante, por exemplo $-\lambda$. A equação diferencial é portanto do género

$$\dot{x} - \lambda x = f(t)$$

Isto significa que o “vetor” x é uma solução do problema linear

$$(D - \lambda)x = f \quad (2.18)$$

Esta é uma versão, em dimensão infinita, de uma equação linear do género $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde A é uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ são vetores, que estudamos em Álgebra Linear. Agora os vetores $x(t)$ e $f(t)$ vivem, por exemplo, no espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente deriváveis definidas na reta real, e $D - \lambda$ é um operador (diferencial) definido neste espaço. O que procuramos, ao resolver (2.18), é um “operador inverso” $(D - \lambda)^{-1}$, de maneira tal que formalmente

$$x = (D - \lambda)^{-1}f$$

É natural conjecturar que o inverso de um operador diferencial seja um operador “integral”, definido por meio de uma integração. Como no caso das matrizes, sabemos que a solução de (2.18), se existe, não é única, pois é sempre possível somar vetores do núcleo de $D - \lambda$. O teorema 1.1 diz que o núcleo de $D - \lambda$ é a reta formada pelas funções do género $x_0 e^{\lambda t}$, com x_0 constante. A fórmula (2.17) diz então que as soluções de (2.18) são

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \quad (2.19)$$

soma de uma solução particular, definida pelo integral, e da solução geral da homogénea. Esta fórmula define o operador $(D - \lambda)^{-1}$. Naturalmente, o caso $\lambda = 0$ é o teorema fundamental do cálculo. A parte interessante da fórmula (2.19) é evidentemente o integral, que representa a “resposta” do sistema, inicialmente em repouso, a uma “força/input” $f(t)$. Esta resposta é linear em f , e é obtida integrando o produto de $f(s)$ vezes um núcleo $e^{\lambda s}$ deslocado no tempo. O factor $e^{\lambda(t-s)}$ “pesa” a contribuição da entrada $f(s)$ ao valor da resposta no tempo t .

ex: Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad \text{com } x(1) = 3 \text{ e } t > 0$$

$$\dot{x} + tx = t \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad \text{com } r(0) = 1 \text{ e } t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Circuito RL. A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

As soluções da equação homogénea, ou seja, com $V(t) = 0$ (circuito desligado), são

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

se $I(0) = I_0$ denota a corrente inicial e $\tau = L/R$ denota o tempo de relaxamento.

Se o circuito é alimentado com tensão constante $V(t) = E$, então a solução estacionária é a $\bar{I} = E/R$ (lei de Ohm). A diferença $x(t) = I(t) - \bar{I}$ é solução de $\dot{x} = -x/\tau$, e portanto a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = \bar{I} + e^{-t/\tau} (I_0 - \bar{I}) ,$$

assimptótica à lei de Ohm.

Quando a tensão que alimenta o circuito é variável, então, de acordo com a (2.19), a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = e^{-t/\tau} I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t e^{(s-t)/\tau} V(s) ds .$$

A primeira parte é uma solução transiente, solução da equação homogénea, que depende da corrente inicial mas decai exponencialmente, logo é desprezável para tempos grandes $t \gg \tau$. A segunda parte é a solução estacionária, a solução observada para tempos grandes, que é independente da condição inicial.

ex: Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Verifique que a solução com corrente inicial $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

onde $\tau = L/R$ é o tempo de relaxamento e $\phi = \arcsin(\omega L / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2})$ é uma fase que depende de ω , L e R . Observe que a solução estacionária é uma oscilação com a mesma frequência da tensão que alimenta o circuito, mas desfasada de um tempo ϕ , cuja amplitude é $\rho E/R$, onde $\rho = R/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ é um fator adimensional inferior a um que multiplica a corrente esperada de acordo com a lei de Ohm.

Lei do arrefecimento de Newton. Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ pode ser modelada pela *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k(T - M(t))$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo). A solução com condição inicial $T(0) = T_0$ é, de acordo com a (2.19),

$$T(t) = e^{-kt} \left(T_0 + k \int_0^t e^{ks} M(s) ds \right).$$

ex: Se a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$, então a diferença $x(t) := T(t) - M$ satisfaz a EDO

$$\dot{x} = -kx.$$

Determine $T(t)$ e diga o que acontece quando $t \rightarrow \infty$

ex: Determine a solução assintótica (ou seja, quando t é grande) quando a temperatura do meio ambiente é a função periódica $M(t) = M_0 \sin(\omega t)$.

ex: Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

2.5 Substituições

Substituições. Assim como pode ajudar a calcular primitivas, uma mudança de variáveis pode ajudar a transformar uma equação diferencial aparentemente complicada numa mais simples. Consideramos a EDO

$$\dot{x} = v(x, t)$$

para uma variável escalar $x(t)$. Se definimos uma nova variável

$$y = f(x, t)$$

então, pela regra da cadeia, a sua derivada em ordem ao tempo é

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Consequentemente, a variável $y(t)$ satisfaz a EDO

$$\dot{y} = w(y, t)$$

onde o campo de direções é

$$w(y, t) = v(x, t) \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

Esta substituição ajuda se o novo campo de direções corresponde a uma EDO integrável, por exemplo separável ou linear. Acertar a substituição que resolve uma equação diferencial pode ser muito difícil. Às vezes a substituição é sugerida pela própria equação diferencial, como já vimos no caso do decaimento com reposição, e como ilustrado no seguinte exemplo.

e.g. Por exemplo, consideramos o problema

$$\dot{x} = (x + t)^2$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$. A substituição óbvia é $y(t) = x + t$, que transforma a equação diferencial para x na equação diferencial separável

$$\dot{y} = y^2 + 1$$

para y . Então

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \arctan(y) - \arctan(y_0) = t - t_0$$

Finalmente, obtemos a solução implícita

$$\arctan(x + t) = \arctan(x_0 + t_0) + t - t_0$$

ou seja,

$$x(t) = \tan(t + c_0) - t$$

para alguma constante $c_0 = \arctan(x_0 + t_0) - t_0$.

ex: Determine soluções das seguintes ODEs

$$\dot{x} = (t - x)^2 \quad \dot{x} = \sin(x + t) \quad \dot{x} = \sqrt{x + t}$$

Equações de Bernoulli. Uma EDO da forma

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^n, \quad (2.20)$$

onde p e q são funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $n \neq 0, 1$ (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação (diferencial) de Bernoulli*. É claro que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio. As outras soluções (positivas) podem ser determinadas usando a substituição

$$y = x^k$$

com $k = 1 - n$, que transforma a (2.20) na EDO linear

$$\dot{y} + k p(t) y = k q(t)$$

Equações de Euler-Cauchy.

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2 (\cos t - \sin t) \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2} x = x^2 \log t \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

3 EDOs lineares homogêneas

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.8-14 ; [MW85] Vol. 2, 12.6-7

3.1 Exponencial complexo e oscilações

Os números complexos formam um corpo que estende o corpo dos números reais, e cujas operações refletem a geometria euclidiana, ou melhor, conforme, do plano.

O corpo dos números complexos. Do ponto de vista algébrico/abstrato, o corpo dos *números complexos* é $\mathbb{C} := \mathbb{R}(i)$, onde $i^2 = -1$. Ou seja, é a extensão do corpo dos reais obtida acrescentando um elemento i cujo quadrado é igual ao oposto da unidade.

Mais compreensível é dizer que é o quociente

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[X] / \langle X^2 + 1 \rangle$$

do anel $\mathbb{R}[X]$ dos polinômios na incógnita X com coeficientes reais módulo o ideal gerado pelo polinômio $X^2 + 1$. Um polinômio arbitrário na incógnita X é uma expressão formal do género $p(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, com coeficientes reais $a_k \in \mathbb{R}$. Somas e produtos entre polinômios são definidos da forma natural. No quociente, dois polinômios $p(X)$ e $q(X)$ são identificados se diferem por um polinômio da forma $f(X)(X^2 + 1)$, onde $f(X)$ é um polinômio arbitrário. Isto significa que podemos simplificar e substituir cada fator $X^2 + 1$ por 0, ou seja, cada segunda potência X^2 por -1 . Mas então também podemos substituir $X^3 = X X^2 = -X$, depois $X^4 = X X^3 = -X^2 = 1$, $\dots$. É claro portanto que todo polinômio pode ser identificado, no quociente, com um polinômio de grau apenas um, do género $a + bX$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O número complexo que tradicionalmente chamamos i , cujo quadrado satisfaz $i^2 + 1 = 0$, é precisamente a imagem de X no quociente.

Na prática, para seres humanos, $\mathbb{C}$ é o conjunto das expressões formais

$$z = x + iy$$

com $x, y \in \mathbb{R}$, que chamamos (e pensamos) “números complexos”, munido das operações binárias “soma” e “multiplicação” definidas usando as usuais regras algébrica dos polinômios com coeficientes reais na incógnita “ i ” e no fim usando a substituição $i^2 = -1$. O resultado é que a soma é definida por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (3.1)$$

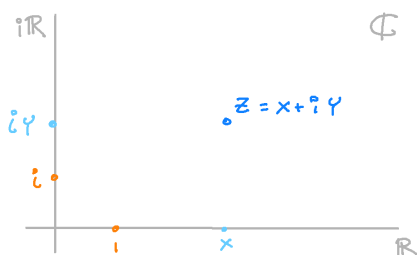
e a multiplicação é definida por

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

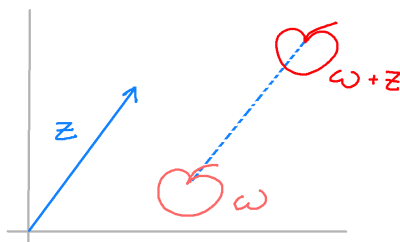
É subentendido que dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são (considerados) iguais sse $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. É também conveniente denotar simplesmente $x + i0 = x$ e $0 + iy = iy$. Em particular, $x \mapsto x + i0$ define uma inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, e as operações definidas acima são as usuais operações no corpo dos reais.

Se $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$, então $i \cdot i = -1$, ou seja, $\pm i$ são (as únicas) “raízes quadradas de -1 ”. De facto (e esta é a origem das fórmulas acima, que portanto não devem ser decoradas), somas e multiplicações entre números complexos podem ser manipuladas como as correspondentes operações entre números reais (ou seja, usando as propriedades associativas, comutativas e distributivas), e depois substituindo $i \cdot i$ por -1 .

É natural identificar os números complexos $z = x + iy$ com os pontos/vetores (x, y) do plano $\mathbb{R}^2$, e denotar a correspondência com $x + iy \approx (x, y)$. A reta real $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é naturalmente identificada com o eixo dos x 's em $\mathbb{R}^2$, e a reta “imaginária” $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é naturalmente identificada com o eixo dos y 's.



Então a soma $z_1 + z_2$ corresponde à soma dos vetores $z_1 \approx (x_1, y_1)$ e $z_2 \approx (x_2, y_2)$ do plano. O conjunto $\mathbb{C}$, munido da operação $+$ definida em (3.1), é um grupo abeliano aditivo, cujo elemento neutro é $0 := 0 + i0$. O oposto do número complexo $z = x + iy$ é o número complexo $-z = (-x) + i(-y)$ (denotado simplesmente por $-z = -x - iy$), que verifica $z + (-z) = 0$. Somar um número complexo z , i.e. fazer $w \mapsto w + z$, corresponde a fazer uma translação no plano.



Todo $z = x + iy \neq 0$ admite um único inverso multiplicativo, um número complexo $1/z$ tal que $z \cdot (1/z) = (1/z) \cdot z = 1$, dado por

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.3)$$

como é fácil verificar (observe que $z \neq 0$ sse $x^2 + y^2 > 0$). Portanto, o conjunto $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munido da operação $\cdot$ definida em (3.2), é um grupo abeliano, o grupo multiplicativo dos números complexos invertíveis, cujo elemento neutro é $1 := 1 + i0$.

As potências inteiras de um número complexo são definidas por recorrência: $z^{n+1} := z \cdot z^n$, se $n \geq 1$, sendo $z^0 := 1$. Se $z \in \mathbb{C}^\times$, então as potências negativas são definidas por $z^{-n} := (1/z)^n$. Por exemplo, $i^2 = -1$, e $i^{-1} = 1/i = -i$.

A propriedade distributiva $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$, que implicitamente foi usada na definição da multiplicação e que portanto é válida para todos ternos de números complexos, mostra finalmente que $\mathbb{C}$ é um corpo. Em particular, um produto de dois números é nulo, ou seja, $zw = 0$, sse pelo menos um dos fatores é nulo, ou seja, $z = 0$ ou $w = 0$.

O corpo dos números complexos contém, como subcorpos, o corpo dos reais $\mathbb{R}$, que por sua vez contém o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais. No entanto, não é possível estender a ordem de $\mathbb{R}$ a uma ordem de $\mathbb{C}$ que seja compatível com as operações: o corpo dos números complexos não é um corpo ordenado.

ex: Calcule

$$(2 + i3) + (3 - i2) \quad (1 - i) \cdot (2 - i) \quad (1 + i) + (1 - i) \cdot (2 - i5)$$

ex: Na identificação $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ definida por $x + iy \approx (x, y)$, o produto $(a + ib)(x + iy)$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em particular, se $a + ib \neq 0$, então o produto é

$$\sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde θ é um ângulo tal que $\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sin \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$. Esta fórmula revela o significado geométrico da multiplicação: a multiplicação por um número complexo $a + ib$ diferente de zero corresponde a uma rotação de um ângulo θ e uma homotetia de razão $\sqrt{a^2 + b^2}$.

ex: Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexos

$$i^3 \quad \frac{1}{1+i} \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i)^2 \quad i^{17} \quad (2 \pm i)^3$$

ex: Verifique que, dado $z = x + iy \neq 0$, a única solução de $(x + iy)(a + ib) = 1$ é dada pela fórmula (3.3), ou seja, $a = x/(x^2 + y^2)$ e $b = -y/(x^2 + y^2)$ (por exemplo, resolvendo um sistema de 2 equações lineares nas incógnitas a e b).

ex: Ao acrescentar a raiz quadrada de -1 aos números reais acontece um primeiro milagre: todo número complexo (não necessariamente real e positivo) admite umas raízes quadradas. Verifique que o quadrado de

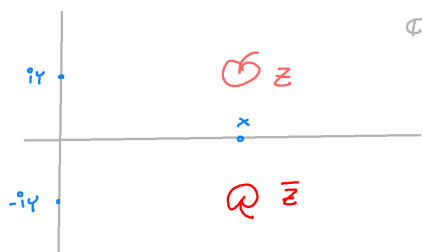
$$\sqrt{\frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)}$$

e do seu oposto é igual a $z = x + iy$.

Conjugação, norma e valor absoluto. Os corpo números complexos também admitem uma involução (uma transformação que é a própria inversa) que respeita as operações algébricas. O *conjugado* de $z = x + iy$ é

$$\boxed{\bar{z} := x - iy,}$$

ou seja, a imagem do ponto $x + iy \approx (x, y)$ pela reflexão na reta $y = 0$ do plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. Em particular, i e o seu conjugado $\bar{i} = -i$ são as duas raízes de -1 .



A conjugação é um “automorfismo” de $\mathbb{C}$, ou seja, respeita soma e produtos:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{e} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (3.4)$$

(a segunda identidade não é óbvia, mas um “milagre” que relaciona multiplicação e geometria euclidiana do plano). Observe também que a conjugação é uma involução, ou seja, $\bar{\bar{z}} = z$.

Os números reais

$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$, respetivamente. Observe que $z = \bar{z}$ sse z é real, i.e. sse $\Im(z) = 0$.

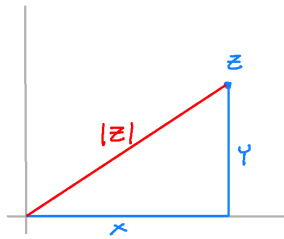
A conjugação permite definir a *norma* (no sentido da teoria de números) do número complexo $z = x + iy$ como

$$N(z) := z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad (3.5)$$

que, sendo uma soma de quadrados de números reais, é um número real não-negativo. O *módulo*, ou *valor absoluto*, de $z = x + iy$ é a raiz quadrada de $N(z)$, ou seja,

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.6)$$

De acordo com o teorema de Pitágoras, é igual à norma euclidiana do vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Em particular, $|z| = 0$ sse $z = 0$.



É claro que $|z| = |\bar{z}|$. Menos evidente, consequência da segunda das (3.4), é que o valor absoluto é multiplicativo, ou seja,

$$|zw| = |z| |w| \quad (3.7)$$

Consequentemente, $|1/z| = 1/|z|$ se $z \neq 0$, e, mais em geral, $|z/w| = |z|/|w|$ se $w \neq 0$. O inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0$ é então

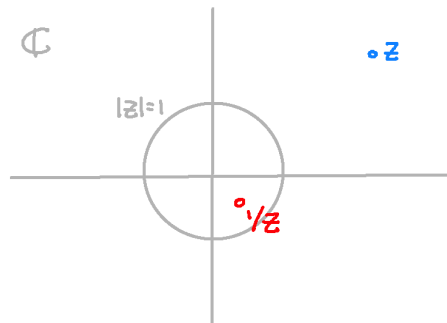
$$1/z = \bar{z}/|z|^2.$$

Os números complexos “unitários”, ou seja, de módulo igual a um, definem a *circunferência unitária*

$$\mathbf{S} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

Pela (3.7), o produto de dois números complexos unitários é ainda unitário. Assim, $\mathbf{S}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$, isomorfo ao grupo $U(1)$ das transformações unitárias do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}$.

Portanto, a inversão $z \mapsto 1/z$ de um número complexo não nulo corresponde a uma “reflexão” na circunferência unitária, a transformação $z \mapsto z^* := z/|z|^2$, seguida por uma conjugação $z^* \mapsto \bar{z}^*$, uma reflexão na reta real.



ex: Verifique a (3.7).

ex: Mostre que $|\Re z| \leq |z|$ e $|\Im z| \leq |z|$.

Inteiros gaussianos, somas de quadrados e ternos pitagóricos. Os *inteiros gaussianos* são os números complexos da forma $z = a + ib$ com a e b inteiros. Formam o subconjunto $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, identificado ao reticulado $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ dos pontos do plano com coordenadas inteiras. É evidente, pelas fórmulas (3.1) e (3.2), que somas e produtos entre inteiros gaussianos também são inteiros gaussianos, ou seja, que os inteiros gaussianos formam um anel. É também evidente, pela (3.5), que a norma, ou seja, o quadrado do módulo de um inteiro gaussiano é um número inteiro, soma de dois quadrados.

Sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$ dois inteiros gaussianos. Se calculamos o quadrado em (3.7), e usamos a própria definição (3.6), obtemos

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad (3.8)$$

Esta fórmula é conhecida como *identidade de Diofanto*, ou de *Brahmagupta-Fibonacci*. Diz que “um produto de duas somas de dois quadrados é também uma soma de dois quadrados”.

Em particular, quando $z = w = a + ib$, temos (lendo a fórmula acima de direita para esquerda)

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \quad (3.9)$$

Esta fórmula é conhecida como *fórmula de Euclides*.²¹ Ao variar os inteiros $a > b \geq 1$, produz uma infinidade de “ternos pitagóricos” $m^2 + n^2 = p^2$ (e, de facto, todos os ternos pitagóricos “primitivos”, ou seja, os ternos (m, n, p) sem fatores comuns!).

Raízes de polinómios reais de grau dois. Um polinómio de grau dois com coeficiente reais é uma função do género $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Para calcular as suas raízes, ou seja, os pontos onde $f(x) = 0$, podemos dividir por a , e considerar o polinómio mónico (ou seja, tal que o termo de grau maior tem coeficiente unitário)

$$f(z) = z^2 + 2\alpha z + \beta$$

com $2\alpha = b/a$ e $\beta = c/a$ (coloquei o fator 2 para simplificar os cálculos seguintes). Ao “completar o quadrado”, observamos que

$$\begin{aligned} z^2 + 2\alpha z + \beta &= z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 - \alpha^2 + \beta \\ &= (z + \alpha)^2 + (\beta - \alpha^2) \end{aligned}$$

e portanto as raízes são soluções de

$$(z + \alpha)^2 = \alpha^2 - \beta.$$

O número $\delta := \alpha^2 - \beta$ é chamado *discriminante* do polinómio. Se $\delta \geq 0$, temos duas raízes reais $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\delta}$, eventualmente coincidentes quando $\delta = 0$. Em termos dos coeficientes originais a, b, c , esta é a famosa *fórmula resolvente*

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $\delta < 0$, e portanto $\delta = -\omega^2$ para algum $\omega > 0$, o polinómio não admite raízes reais. No entanto, podemos observar que $(\pm i\omega)^2 = \delta$. Então temos duas raízes complexas e conjugadas

$$z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega.$$

Nos dois casos, o polinómio mónico fatoriza como produto

$$f(z) = (z - z_+)(z - z_-)$$

de duas raízes, iguais se $\delta = 0$, e simétricas em relação ao eixo real se $\delta < 0$.

²¹Euclides, *Elementos*, Livro X, Proposição XXIX.

ex: Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

Representação polar. A fórmula de Euler revela a relação entre o produto entre números complexo e as homotetias e as rotações do plano. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

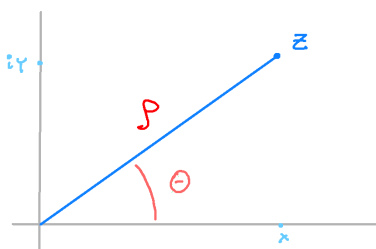
onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ é o módulo de z , $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é um *argumento* de z , ou seja, um ângulo tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$ (logo definido a menos de múltiplos inteiros de 2π), e o número complexo unitário $e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ é (provisoriamente) definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta). \quad (3.10)$$

à custa, portanto, das funções trigonométricas $\cos$ e $\sin$, supostas definidas anteriormente (e.g. num curso de cálculo). Observe que

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Pode ser útil escolher um valor do argumento, e chamar *argumento principal* de um número z o único argumento que satisfaz $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.



Se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então as fórmulas de adição para seno e cosseno mostram que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.11)$$

Por exemplo, o quadrado de um número complexo $z = \rho e^{i\theta}$ é $z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$. Também, se $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Estas fórmulas mostram que o grupo multiplicativo dos complexos diferentes de zero é um produto $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbf{S}$ do grupo multiplicativo dos reais positivos e da circunferência unitária. Também revelam, mais uma vez, o significado geométrico da multiplicação entre números complexos.

Uma primeira consequência é que o inverso do número complexo $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$, é $z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$. Outra é que a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$, no plano $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, ou seja, a transformação $w \mapsto zw$, corresponde a uma homotetia $w \mapsto \rho w$ de razão $|z| = \rho > 0$ (uma dilatação ou contração se $\rho \neq 1$) e uma rotação $w \mapsto e^{i\theta} w$ de um ângulo θ .



Em particular, a multiplicação por um número complexo de módulo um, ou seja, da forma $e^{i\theta}$ com θ real, corresponde a uma rotação anti-horária de um ângulo θ . Por exemplo, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é uma “raiz quadrada” da rotação $z \mapsto e^{i\pi}z = -z$ de um ângulo π , logo uma rotação de um ângulo $\pi/2$ (chamada “rotação de Wick” pelos físicos).

Raízes. Se $n = 1, 2, 3, \dots$, então cada número complexo $w \neq 0$ possui exatamente n raízes n -ésimas, ou seja, n números complexos z que resolvem

$$z^n = w.$$

Para encontrar estas raízes, é conveniente usar as coordenadas polares. Se $w = \rho e^{i\theta}$, com $\rho \neq 0$, então $z = r e^{i\varphi}$ satisfaz $z^n = w$ se

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$$

Isto quer dizer que r é a raiz n -ésima (positiva) do número positivo ρ , e que $n\varphi = \theta + 2\pi k$, onde k é um inteiro arbitrário. Os valores de k que diferem por múltiplos de n dão origem às mesmas soluções. Consequentemente, as raízes n -ésimas de $w = \rho e^{i\theta}$ são os n números complexos

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2\pi k)/n}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Particularmente importante é o caso $w = 1$. Os números complexos

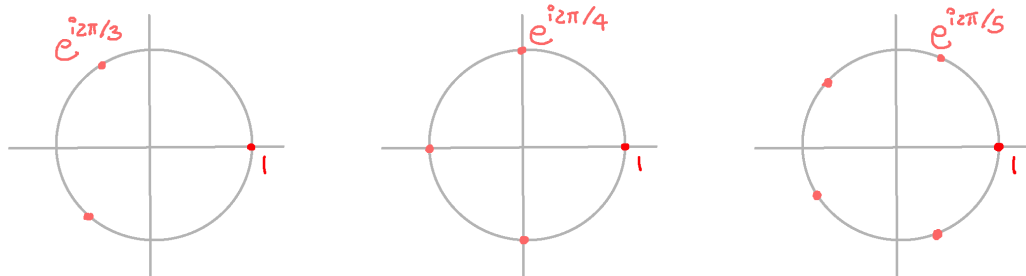
$$\zeta_k := e^{i2\pi k/n}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, que resolvem $(\zeta_k)^n = 1$, são chamados *raízes n -ésimas da unidade*. Formam os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência unitária. Observe que $\zeta_k = (\zeta_1)^k$, onde $\zeta_1 = e^{i2\pi/n}$ é uma raiz “primitiva”. Também, $\zeta_k \zeta_{n-k} = 1$, ou seja, $\zeta_{n-k} = 1/\zeta_k$. Consequentemente, as raízes n -ésima da unidade formam um subgrupo de ordem n do grupo multiplicativo $\mathbf{S}$. A identidade elementar

$$(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1) = z^n - 1$$

mostra que as raízes n -ésimas da unidade diferentes de um, ou seja, as ζ_k com $k = 1, 2, \dots, n-1$, são raízes também do polinômio mônico

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$$



ex: Represente na forma polar os seguintes números complexos:

$$-i \quad i-1 \quad 1+i \quad 3-4i$$

ex: Verifique que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

ex: Calcule

$$e^{i\pi} \quad e^{-i\pi/2} \quad \sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i} \quad \sqrt[4]{i}$$

ex: Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^5 = 1$ e $z^3 = 81$.

ex: Verifique que $(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$, e portanto, se $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Considere $z = e^{i\theta}$ com $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$ e real, calcule a parte real e deduza

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2 \sin(\theta/2)}$$

ex: Mostre que se ω é uma raiz n -ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

ex: Use a representação polar e a fórmula de Euler (3.13) para provar a fórmula de Moivre

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (3.12)$$

Deduza fórmulas

$$\cos(n\theta) = \dots \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \dots$$

para valores pequenos de n .

ex: Deduza que existem polinômios algébricos $T_n(x)$ de grau $n \geq 0$, (chamados *polinômios de Chebyshev*) tais que

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

(observe que as potências pares de $\sin \theta$ podem ser substituídas por potências pares de $\cos \theta$ usando a identidade trigonométrica), e calcule os primeiros.

ex: Calcule

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)^{13} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)^{17}$$

Exponencial complexo e oscilações. A função exponencial, definida pela série de potências (1.4), é a (única) solução da equação diferencial $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. As funções $e^{\alpha t}$, obtidas com uma reparametrização do tempo, descrevem um decaimento ou um crescimento exponencial, dependendo do sinal do parâmetro real α .

As séries de potências das funções trigonométricas,

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots \quad \text{e} \quad \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots$$

parecem ser formadas pelas partes par e ímpar do exponencial, respectivamente, mas têm sinais alternados. Uma maneira, aparentemente artificial, de obter os sinais alternados consiste em considerar uma reparametrização do tempo do gênero $t \mapsto it$, onde i é um “número imaginário” que satisfaz $i^2 = -1$ (este truque é chamado “rotação de Wick” pelos físicos teóricos modernos). Se definimos $z(t) := e^{it}$ e calculamos a sua derivada de acordo com as regras algébricas usuais, observamos que esta função é solução da equação diferencial $\dot{z} = iz$ (que não tem significado físico, pois contém o número imaginário i). No entanto, ao derivar uma segunda vez, chegamos a

$$\ddot{z} = -z,$$

12 fev 2024

que é a equação diferencial do oscilador harmónico, cuja soluções são as funções trigonométricas! De facto, a substituição do tempo real t pelo tempo imaginário it na série de potências que define o exponencial, mostra que formalmente

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}it^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}it^5 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots\right) + i \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots\right), \end{aligned}$$

Esta é a famosa *fórmula de Euler*,²²

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t} \quad (3.13)$$

A fórmula de Euler (3.13) permite definir o *exponencial* de um número complexo arbitrário $z = x + iy$ como

$$\boxed{e^z := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)} \quad (3.14)$$

Assim, o módulo de e^z é igual ao número real e^x , que é estritamente positivo, e um argumento de e^z é igual a y , a parte imaginária de z . Em particular, $e^z \neq 0$. É imediato então verificar que o exponencial complexo satisfaz a regra do produto

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

Em particular, o exponencial de um número complexo não é nulo, e o inverso multiplicativo de e^z é

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Uma curva $t \mapsto (x(t), y(t))$ no plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ pode ser pensada, usando a notação complexa, como a função complexa de uma variável real $t \mapsto z(t) = x(t) + i y(t)$. A sua velocidade, o campo vetorial $v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ (pensado aplicado no ponto $z(t)$), é então $\dot{z}(t) := \dot{x}(t) + i \dot{y}(t)$, e a sua aceleração $\ddot{z}(t) = \ddot{x}(t) + i \ddot{y}(t)$.

Dado ω real e positivo, a função

$$z(t) = e^{i\omega t}$$

descreve um ponto que percorre a circunferência unitária do plano complexo no sentido anti-horário com “frequência angular” ω , ou seja, uma rotação cada período $T = 2\pi/\omega$, e portanto frequência $\nu = \omega/(2\pi)$ (medida em Hertz, rotações por segundo).

Mais em geral, se $\alpha = \rho e^{i\varphi}$ é um parâmetro complexo, a função

$$z(t) = \alpha e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

descreve um ponto que percorre a circunferência de raio $|\alpha| = \rho$ no sentido anti-horário, com posição inicial $z(0) = \rho e^{i\varphi}$. Um cálculo elementar mostra que a velocidade desta curva (3.15) é $\dot{z}(t) = i\omega \alpha e^{i\omega t}$, ou seja, $z(t)$ satisfaz a equação diferencial linear

$$\dot{z} = i\omega z$$

que contém o número imaginário i , e portanto não tem sentido físico (mas diz que a velocidade $\dot{z}$ é ortogonal a z , pois a multiplicação por i corresponde a uma rotação de um ângulo $\pi/2$). Mais interessante é derivar uma segunda vez, e observar que a curva $z(t)$ também satisfaz

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \quad (3.16)$$

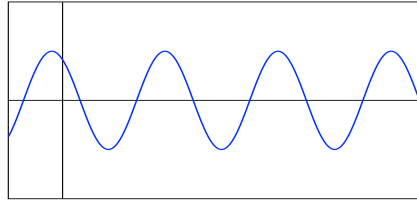
com condições iniciais $z(0) = \alpha$ e $\dot{z}(0) = i\omega \alpha$. Consequentemente, a parte real e a parte imaginária de $z(t)$,

$$q(t) := \Re[z(t)] = \rho \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad p(t) := \Im[z(t)] = \rho \sin(\omega t + \varphi)$$

²²Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748.

são solução reais da equação diferencial do (3.16), chamada “oscilador harmónico”. De facto, as duas curvas $e^{\pm i\omega t}$ são soluções de $\ddot{z} = -\omega^2 z$, e as soluções trigonométricas podem ser obtidas ao fazer combinações lineares complexas

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad \text{e} \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$



Oscilação $q(t) = \rho \cos(\omega t + \phi)$.

ex: Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ enquanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.

ex: Determine as constantes complexas α e β tais que a curva $z(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$ seja solução de $\ddot{z} = -\omega^2 z$ com condições iniciais $z(0) = a$ e $\dot{z}(0) = b$ (por exemplo reais).

ex: Considere uma sobreposição

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

com coeficientes reais a e b . Se a ou b é diferente de zero, então $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ é um número positivo. Então $(a/\rho, b/\rho)$ é um ponto da circunferência unitária do plano, portanto do género $(\cos \phi, \sin \phi)$ ou $(\sin \varphi, \cos \varphi)$ para alguns ângulos ϕ e φ (definidos a menos de múltiplos de 2π). Deduza que

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \rho \cos(\omega t - \phi)$$

ou também

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \rho \sin(\omega t + \varphi)$$

Sobreposições e batimentos. Consideramos uma sobreposição de duas oscilações com frequências angulares diferentes $\omega_1 > \omega_2 > 0$, assim que

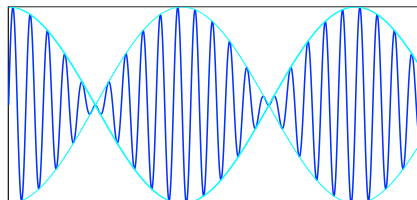
$$\omega_1 = \omega + \varepsilon \quad \text{e} \quad \omega_2 = \omega - \varepsilon$$

com $\omega > 0$ e $\varepsilon > 0$. A sobreposição das duas oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$ pode ser representada como

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} \\ &= e^{i\omega t} (e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}) = 2e^{i\omega t} \cos(\varepsilon t) \end{aligned}$$

O seu valor absoluto $|z(t)|$ é máximo quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínimo quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).

Em particular, se $\varepsilon \ll \omega$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.



Sobreposição $q(t) = \sin(0.95 \cdot t) + \sin(1.05 \cdot t)$.

Oscilações amortecidas. A curva definida no plano complexo pela função

$$z(t) = e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

com α e ω reais e ω positivo, descreve um ponto no plano complexo que percorre uma espiral centrada na origem com velocidade angular ω . Se α é negativo, então sua parte real e a sua parte imaginária,

$$q(t) = e^{\alpha t} \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad p(t) = e^{\alpha t} \sin(\omega t)$$

descrevem umas oscilações amortecidas.

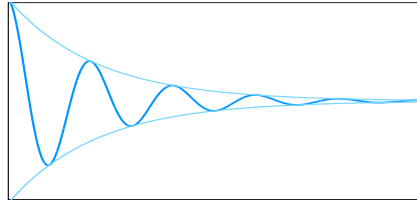


Gráfico de $e^{-t} \sin(6t)$.

Velocidade e aceleração da curva $z(t)$ são

$$\dot{z} = (\alpha + i\omega)e^{(\alpha+i\omega)t} \quad \text{e} \quad \ddot{z} = (\alpha + i\omega)^2 e^{(\alpha+i\omega)t}$$

respetivamente. É possível obter uma relação linear “real” entre aceleração, velocidade e posição observando que

$$\ddot{z} - 2\alpha\dot{z} = (\alpha^2 - \omega^2 + i2\alpha\omega - 2\alpha(\alpha + i\omega)) e^{(\alpha+i\omega)t} = -(\omega^2 + \alpha^2) e^{(\alpha+i\omega)t}$$

Consequentemente, esta curva $z(t)$ é uma solução da EDO de segunda ordem

$$\ddot{z} - 2\alpha\dot{z} + \Omega^2 z = 0$$

onde $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$, chamada “oscilador amortecido” (no caso físico) quando $\alpha < 0$.

Vice-versa, uma primitiva de $z(t)$ é

$$\int e^{(\alpha+i\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha + i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}$$

Ao separar parte real e parte imaginária obtemos

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha t} \cos(\omega t) dt + i \int e^{\alpha t} \sin(\omega t) dt &= \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) + i \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Desta forma, conseguimos calcular as primitivas

$$\int e^{\alpha t} \cos(\omega t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) \quad (3.17)$$

$$\int e^{\alpha t} \sin(\omega t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \quad (3.18)$$

sem necessidade de usar duas integrações por partes.

Força de Coriolis. Consideramos um referencial inercial $x-y$ no plano, $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, e usamos a notação complexa $z = x + iy$ para descrever os seus pontos. Consideramos agora um segundo referencial $X-Y$ em movimento circular uniforme relativamente ao primeiro com velocidade angular ω , assim que se $Z = X + iY$ é um ponto no segundo referencial, $z = e^{i\omega t} Z$. Seja $t \mapsto z(t)$ a trajetória de uma partícula de massa unitária no referencial inercial, sujeita a uma força $F = \ddot{z}$. Então a trajetória no referencial em rotação é $Z(t) = e^{-i\omega t} z(t)$. Derivando temos que $\dot{z} = e^{i\omega t} (i\omega Z + e^{i\omega t} \dot{Z})$ e $\ddot{z} = e^{i\omega t} (-\omega^2 Z + 2i\omega \dot{Z} + \ddot{Z})$, e portanto

$$\ddot{Z} = e^{i\omega t} \ddot{z} + \omega^2 Z - 2i\omega \dot{Z}$$

Isto significa que, além da força $e^{i\omega t} F$, a partícula no referencial não inercial também sente uma “força centrífuga” $\omega^2 Z$ e uma “força de Coriolis” $-2i\omega \dot{Z}$, ortogonal à velocidade.

3.2 EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes

Equação de Newton em um potencial quadrático. A equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q \quad (3.19)$$

determina a trajetória de uma partícula (de massa unitária) no campo de forças gerado por um potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$. Uma solução de equilíbrio é a solução trivial $q(t) = 0$ para todo tempo t , e é a única se $\beta \neq 0$.

Se $\beta = 0$, é evidente que as soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = 0$$

que neste caso é a equação da partícula livre, são

$$q(t) = a + bt$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias, que descrevem movimentos retilíneos uniformes.

Se $\beta = \omega^2 > 0$, um cálculo elementar mostra que duas soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

chamada *oscilador harmónico*, são $\varphi_+(t) = \cos(\omega t)$ e $\varphi_-(t) = \sin(\omega t)$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição

$$q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias, que descrevem oscilações de frequência angular ω , logo período $T = 2\pi/\omega$, em torno da posição de equilíbrio.

Se $\beta = -k^2 < 0$, um cálculo elementar mostra que duas soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = k^2 q$$

chamada *oscilador invertido*, são $q_{\pm}(t) = e^{\pm kt}$, ou também, ao fazer uma mudança de base, $\varphi_+(t) = \cosh(kt) = (e^{kt} + e^{-kt})/2$ e $\varphi_-(t) = \sinh(kt) = (e^{kt} - e^{-kt})/2$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição

$$q(t) = ae^{kt} + be^{-kt} = c \cosh(kt) + d \sinh(kt)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias. As soluções genéricas (com $a \neq 0$) se afastam do equilíbrio, e de facto divergem, quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Partícula nem um potencial quadrático com atrito. O atrito é modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. A equação de Newton de uma partícula num potencial quadrático com atrito é portanto da forma

$$\ddot{q} = -\gamma \dot{q} - \beta q, \quad (3.20)$$

onde $\gamma = 2\alpha$ é um coeficiente de atrito (positivo ou nulo no mundo real, também negativo nos manuais de matemática). Um cálculo elementar mostra que a função $q(t) = e^{-\alpha t} y(t)$ é uma solução da equação de Newton (3.20) sse $y(t)$ é uma solução da equação de Newton sem atrito

$$\ddot{y} = -\delta y$$

com $\delta = \beta - \alpha^2$, que já sabemos resolver. Consequentemente, soluções de (3.20) são

$$q(t) = e^{-\alpha t}(a + bt)$$

se $\alpha^2 = \beta$ (um caso muito particular), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t}(ae^{kt} + be^{-kt})$$

se $0 < \alpha^2 - \beta = k^2$ (atrito grande), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

se $0 < \beta - \alpha^2 = \omega^2$ (atrito pequeno). Todas as soluções decaem exponencialmente, ou seja, satisfazem $|q(t)| \leq Ce^{-\gamma t}$ para algumas constantes C e $\gamma > 0$.

Problema com valores iniciais. A intuição física, ou melhor, a nossa ideia de “determinismo” implícita na física newtoniana, diz que uma equação de Newton $m\ddot{q} = F$ determina univocamente o futuro e o passado se são dadas a posição $q(0) = q_0$ e a velocidade $\dot{q}(0) = v_0$ iniciais da partícula. No caso da partícula num potencial quadrático com atrito, ou seja, das equações lineares homogêneas (3.20), encontramos espaços de soluções dependendo de dois parâmetros, gerados por pares de soluções. Duas soluções, $q_+(t)$ e $q_-(t)$, são suficientes se conseguirmos representar toda solução como combinação linear $q(t) = a q_+(t) + b q_-(t)$. Mas isto significa que o sistema linear

$$\begin{aligned} a q_+(0) + b q_-(0) &= q_0 \\ a \dot{q}_+(0) + b \dot{q}_-(0) &= v_0 \end{aligned}$$

admite uma única solução para todo vetor (q_0, v_0) de condições iniciais, e portanto que o determinante $q_+(0) \dot{q}_-(0) - \dot{q}_+(0) q_-(0)$ é diferente de zero. É imediato verificar que este é o caso dos pares de soluções encontradas no parágrafo anterior. É claro também que o tempo inicial $t_0 = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo, sendo a equação de Newton invariante por translações no tempo.

Independência linear e Wronskiano. Fixado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, consideramos o espaço linear $\mathcal{C}^1(I)$ das funções reais $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ com derivada $f'(t)$ contínua. O (*determinante*) *Wronskiano* entre duas funções $f(t)$ and $g(t)$ deste espaço é a função

$$W_{f,g}(t) := \text{Det} \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} = f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t)$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente dependentes existem constantes α e β , com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, tais que $\alpha f(t) + \beta g(t) = 0$ para todos os tempos $t \in I$. Derivando, também temos que $\alpha \dot{f}(t) + \beta \dot{g}(t) = 0$. Isto implica que o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite uma solução não trivial, e portanto que o determinante $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos. Consequentemente,

Teorema 3.1. *Se $W_{f,g}(t_0) \neq 0$ em algum ponto $t_0 \in I$ então $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes.*

Num intervalo onde $g(t) \neq 0$, o determinante Wronskiano é o “numerador” da derivada do quociente $f(t)/g(t)$, sendo o “denominador” $g(t)^2 \neq 0$. Consequentemente, é nulo sse o quociente é constante, logo se $f(t)$ é proporcional a $g(t)$.

No entanto, duas funções podem ser independentes e ter determinante Wronskiano nulo em algum ponto, ou até em todos os pontos!, como mostra o exemplo de Peano²³ das funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t|t|$. O problema é que duas funções podem ser independentes num intervalo I mas linearmente dependentes se pensadas apenas em sub-intervalos $J \subset I$ (é o caso do exemplo). Isto pode acontecer quando pelo menos uma das funções não é analítica, assim que a informação local,

²³G. Peano, Sur le déterminant Wronskien, *Mathesis* **9** (1889), 75-76.

os valores num subintervalo (arbitrariamente pequeno), não determina o comportamento global, os valores em intervalos grandes.

No caso das soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem coisas são mais simples. Sejam ϕ_+ e ϕ_- são duas funções de classe $\mathcal{C}^2$ no intervalo I , soluções da mesma EDO linear

$$\ddot{x} + p(t) \dot{x} + q(t) x = 0$$

(com coeficientes não necessariamente constantes!). Um cálculo elementar mostra que o Wronskiano satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} W_{\phi_+, \phi_-}(t) = -p(t) W_{\phi_+, \phi_-}(t),$$

Ao integrar, obtemos a *identidade de Abel*

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} W_{\phi_+, \phi_-}(t_0).$$

onde $t_0 \in I$ é um tempo inicial arbitrário. Em particular, o determinante Wronskiano é ou identicamente nulo ou sempre diferente de zero.

ex: Calcule os determinantes Wronskianos

$$W_{e^{-\alpha t}, t e^{-\alpha t}}, \quad W_{e^{-\alpha t} e^{kt}, e^{-\alpha t} e^{-kt}} \quad \text{e} \quad W_{e^{-\alpha t} \sin(\omega t), e^{-\alpha t} \cos(\omega t)},$$

quando $k \neq 0$ e $\omega \neq 0$, e verifique que as soluções encontradas no parágrafo anterior são pares de soluções independentes da equação linear homogênea com coeficientes constantes genérica $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$.

ex: Verifique que as funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t|t|$ não são linearmente independentes enquanto funções definidas na reta real (mas são idênticas na semi-reta positiva, e proporcionais, logo linearmente dependentes, na semi-reta negativa). No entanto, o Wronskiano é $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos t .

Unicidade das soluções. Uma equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes genérica é uma equação

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0$$

onde os coeficientes a , b e c são números reais (e, nos casos físicos, positivos!). Sendo $a \neq 0$ (caso contrário trata-se de uma equação de ordem um), é claro que a equação é equivalente a

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0 \tag{3.21}$$

com $2\alpha = b/a$ e $\beta = c/a$, que depende de apenas dois parâmetros. Os exemplos anteriores mostram que admite sempre um par de soluções independentes, e portanto uma solução para cada condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Esta solução é única, como segue do teorema de Picard.

No entanto, é interessante provar a unicidade usando uma ideia no mesmo tempo mais elementar e mais profunda. Já vimos que $x(t) = e^{-\alpha t} y(t)$ é solução de (3.21) sse $y(t)$ é solução de $\ddot{y} = \lambda y$, com $\lambda = \alpha^2 - \beta$. Portanto, é suficiente provar o teorema de unicidade para esta equação.

O operador *laplaciano* em dimensão um é o operador $\Delta := D^2$, onde $D = d/dt$ denota o operador *derivada*, que envia $f(t)$ em $(Df)(t) := f'(t)$. A equação $f'' = \lambda f$ pode portanto ser escrita

$$\Delta f = \lambda f, \tag{3.22}$$

e diz que $f(t)$ é um vetor próprio do laplaciano, com valor próprio λ . O teorema de unicidade é uma consequência imediata do seguinte resultado, caso particular de um teorema profundo sobre os operadores diferenciais “elípticos”.

Uma função $f(t)$ é dita *analítica* se a sua série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t - t_0)^n$, centrada em um ponto arbitrário t_0 do seu domínio e definida pelos coeficientes $c_n = f^{(n)}(t_0)/n!$, tem raio de convergência positivo, e converge para a própria função dentro do disco de convergência.

O ingrediente essencial da prova é a seguinte observação, caso particular de um fenómeno chamado “bootstrap”. A identidade (3.22) implica que $f(t)$ admite derivadas de todas as ordens, e que podemos calcular enquanto funções apenas das primeiras duas. De facto, a terceira derivada é $f''' = (f'')' = \lambda f'$, a quarta derivada é $f'''' = (f''')' = (\lambda f')' = \lambda f'' = \lambda^2 f$, ... e, por indução, as derivadas de ordens par ou ímpar são

$$f^{(2n)} = \lambda^n f \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)} = \lambda^n f', \quad (3.23)$$

respetivamente.

Teorema 3.2. *As funções próprias do laplaciano na reta real são funções analíticas.*

Demonstração. Seja $f(t)$ uma função própria do operador laplaciano com valor próprio λ , ou seja, uma função duas vezes derivável, definida na reta real, que satisfaz a equação diferencial (3.22). As identidades (3.23) implicam que existem constantes C e D tais que as derivadas de f na origem são limitadas por

$$|f^{(n)}(0)| \leq C \cdot D^n$$

Por exemplo, é possível escolher $C = \max\{|f(0)|, |f'(0)|\}$ e $D = \max\{1, \sqrt{|\lambda|}\}$. Consequentemente, os coeficientes da série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ de f centrada na origem são limitados por

$$|c_n| \leq C \frac{D^n}{n!}$$

Pela fórmula de Hadamard, o raio de convergência da série é ∞ , pois $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0$. Consequentemente, a série de Taylor converge em toda a reta real.

Falta então provar que converge para a própria função f . Fixado um intervalo limitado $[-R, R]$, seja K o máximo de $|f(t)|$ e $|f'(t)|$ quando $|t| \leq R$ (que existe porque f e f' são contínuas). Então, sempre usando as (3.23), as derivadas de f são limitadas por

$$|f^{(n)}(t)| \leq K D^n$$

quando $|t| \leq R$. Seja $P_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k$ o polinómio de Taylor de grau $n-1$. Pela fórmula de Taylor com resto

$$f(t) - P_{n-1}(t) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} t^n$$

onde c é um ponto entre 0 e t . Consequentemente, quando $|t| \leq R$, o erro é limitado por

$$|f(t) - P_{n-1}(t)| \leq K \frac{D^n R^n}{n!}$$

que tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$. Isto prova que a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ converge para $f(t)$ para todo t , e uniformemente em cada intervalo compacto. $\square$

Teorema 3.3. *O espaço das soluções de uma equação linear homogênea de ordem 2 com coeficientes constantes (3.21) é um espaço linear de dimensão 2.*

Demonstração. Como visto, é suficiente provar o resultado para a equação $\ddot{x} = \lambda x$. Usando a linearidade, é suficiente provar que a única solução com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ é a solução trivial $x(t) = 0$. As fórmulas (3.23) implicam então que todas as derivadas de $x(t)$ em $t = 0$ são nulas. Isto quer dizer que todos os coeficientes da série de Taylor de $x(t)$ centrada em 0 são nulos. Pela analiticidade, o teorema 3.2, a função $x(t)$ é identicamente nula. $\square$

3.3 Soluções exponenciais e polinómio caraterístico

EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes, polinómio caraterístico. O uso dos exponenciais complexos permite uma leitura unificada e conceptualmente mais elegante dos três casos tratados acima, que estende de forma natural às equações homogêneas de ordem superior.

Consideramos uma equação linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0 \quad (3.24)$$

onde α e β são coeficientes reais (mas também é possível considerar coeficientes complexos). A ideia, de Euler²⁴, é que

as suas soluções são (sobreposições de) exponenciais complexos $x(t) = e^{zt}$

pelo menos no caso genérico. Isto acontece porque as derivadas de um exponencial são proporcionais ao próprio exponencial, e consequentemente uma equação homogênea com coeficientes constantes para um exponencial e^{zt} é uma equação algébrica para a sua “frequência” z . De facto, ao substituir a conjectura $x(t) = e^{zt}$ na (3.24) temos que

$$z^2 e^{zt} + 2\alpha z e^{zt} + \beta e^{zt} = (z^2 + 2\alpha z + \beta) e^{zt} = 0.$$

Observando que os exponenciais são diferentes de zero, temos que $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) de (3.24) se z é uma raiz do *polinómio caraterístico*

$$P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta$$

A equação $P(z) = 0$, que determina as raízes, é também chamada *equação caraterística*. As suas raízes são

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

e são reais ou complexas conjugadas dependendo do sinal do discriminante $\delta = \alpha^2 - \beta$. Como estamos interessados em soluções reais, temos que analisar separadamente os dois casos, assim como o caso singular de uma raiz dupla.

Se $\delta > 0$, logo $\alpha^2 - \beta = k^2$ para algum $k > 0$, então as duas raízes são reais: $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm k$. Duas soluções independentes são os exponenciais reais $x_{\pm}(t) = e^{\lambda_{\pm}t} = e^{-(\alpha \pm k)t}$. A solução geral é portanto uma combinação linear

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} (a e^{kt} + b e^{-kt}) \\ &= e^{-\alpha t} (c \cosh(kt) + d \sinh(kt)) \end{aligned}$$

se $c = a + b$ e $d = a - b$.

Se $\delta < 0$, logo $\alpha^2 - \beta = -\omega^2$ para algum $\omega > 0$, então as duas raízes não são reais e são complexas conjugadas: $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$. Duas soluções independentes são os exponenciais complexos $x_{\pm}(t) = e^{\lambda_{\pm}t} = e^{-(\alpha \pm i\omega)t}$. Neste caso, duas soluções reais, logo a solução geral com significado físico, podem ser obtidas usando a fórmula de Euler e a paridade das funções trigonométricas, pois

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} (a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-\alpha t} (a \cos(\omega t) + ia \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) - ib \sin(\omega t)) \\ &= e^{-\alpha t} (c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

se $c = a + b$ e $d = i(a - b)$. Estas soluções são reais se c e d são coeficientes reais.

Se $\delta = 0$, ou seja, $\alpha^2 = \beta$, então o polinómio caraterístico tem uma raiz dupla $\lambda = -\alpha$, que é real. O método fornece apenas a solução $x(t) = e^{-\alpha t}$. Para encontrar uma segunda solução independente temos que compreender o limite de um plano gerado por $x_{\lambda}(t) = e^{\lambda t}$ e $x_{\lambda+\varepsilon}(t) = e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ quando

²⁴L. Euler, De integratione aequationum differentialium altiorum gradum, *Miscellanea Berolinensia* 7 (1743).

$\varepsilon \rightarrow 0$. Se $\varepsilon \neq 0$, o plano contém a sobreposição $(e^{(\lambda+\varepsilon)t} - e^{\lambda t})/\varepsilon$. No limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, esta sobreposição converge para a derivada em ordem a λ da nossa primeira solução, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{(\lambda+\varepsilon)t} - e^{\lambda t}}{\varepsilon} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = t e^{\lambda t}$$

A posteriori, podemos verificar que $te^{\alpha t}$ também é solução da equação diferencial, que neste caso pode ser escrita $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0$. Assim, o espaço das soluções é um plano gerado pelas duas soluções independentes $e^{-\alpha t}$ e $t e^{-\alpha t}$, e a solução geral é uma sobreposição

$$x(t) = e^{-\alpha t} (a + bt) .$$

Resumindo, temos portanto a seguinte receita: o espaço das soluções de (3.24) é um espaço linear real $\mathcal{H}$ de dimensão 2 gerado por

$e^{(-\alpha+k)t}$	e	$e^{(-\alpha-k)t}$	se $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raízes reais e distintas)
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	se $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raízes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$t e^{-\alpha t}$	se $\lambda_{\pm} = -\alpha$ (raiz dupla)

Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de $\mathcal{H}$, então a “solução geral” é

$$x(t) = c_+ \phi_+(t) + c_- \phi_-(t)$$

onde $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Sendo as $\phi_{\pm}$ independentes, estas constantes são univocamente determinadas pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, ao resolver um sistema linear determinado. É claro que o tempo inicial $t = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo t_0 .

Factorização de operadores. Do ponto de vista abstrato, a equação homogênea (3.24) pode ser escrita como

$$(D^2 + 2\alpha D + \beta) x = 0$$

onde $D = d/dt$ denota o operador derivação, que envia $f(t) \mapsto (Df)(t) = f'(t)$. As suas soluções formam o núcleo do operador diferencial $L = D^2 + 2\alpha D + \beta$. A factorização do polinómio característico $z^2 + 2\alpha z + \beta = (z - \lambda_+)(z - \lambda_-)$ corresponde então à factorização do operador

$$L = (D - \lambda_+)(D - \lambda_-)$$

Os factores comutam, portanto o núcleo do operador L contém os núcleos de $D - \lambda_{\pm}$. Pelo teorema 1.1, o núcleo do operador $D - \lambda$ é uma reta gerada pelo exponencial $e^{\lambda t}$. Se as raízes $\lambda_{\pm}$ são distintas, os núcleos de $D - \lambda_+$ e $D - \lambda_-$ geram um espaço de dimensão dois, o espaço das soluções da equação homogênea (quando as raízes são complexas conjugadas, é preciso considerar oportunas combinações lineares para obter um plano de soluções reais). No caso de uma única raiz, o operador factoriza como $L = (D - \lambda)^2$. É um exercício verificar que o seu núcleo é formado por funções do género $f(t)e^{\lambda t}$, onde $f(t)$ é um polinómio de grau ≤ 1 .

e.g. Por exemplo, consideramos o problema de resolver a EDO linear homogênea

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 5$ e $\dot{x}(0) = -7$. A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução da equação diferencial se

$$z^2 e^z + 4z e^z + 5e^z = 0$$

e portanto se a “frequência” z satisfaz a equação algébrica $z^2 + 4z + 5 = 0$. As duas raízes são $\lambda_{\pm} = -2 \pm i$. Como

$$e^{(-2 \pm i)t} = e^{-2t} (\cos t \pm i \sin t)$$

a solução geral é uma combinação linear

$$x(t) = e^{-2t} (a \cos t + b \sin t)$$

com certos coeficientes a e b . As condições iniciais dizem que

$$x(0) = e^0 (a \cos 0 + b \sin 0) = a = 5$$

e

$$\dot{x}(0) = -2e^0 (a \cos 0 + b \sin 0) + e^0 (-a \sin 0 + b \cos 0) = -2a + b = -7$$

Este é um sistema linear para os coeficientes a e b , cuja solução única é $a = 5$ e $b = 3$. Finalmente, a solução do problema é

$$x(t) = e^{-2t} (5 \cos t + 3 \sin t)$$

e.g. Por exemplo, consideramos a EDO linear homogênea

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$$

Pode ser escrita como $(D^2 + 4D + 3)x = 0$. O polinómio $z^2 + 4z + 3$ factoriza como $(z + 1)(z + 3)$, e consequentemente

$$(D^2 + 4D + 3) = (D + 1)(D + 3)$$

O núcleo de $D + 1$ é a reta gerada por e^{-t} , e o núcleo de $D + 3$ é a reta gerada por e^{-3t} . Finalmente, as soluções formam o plano

$$x(t) = ae^{-t} + be^{-3t}$$

com a, b constantes arbitrárias.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs homogêneas:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2x = 0 & \quad \ddot{x} + 9x = 0 & \quad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 & \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 & \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0. \end{aligned}$$

ex: Resolva os seguintes problemas com condições iniciais (ou problemas de Cauchy).

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2 \\ \ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1 \\ \ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 & \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0 \\ \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9 \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 & \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1. \end{aligned}$$

ex: Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$\begin{aligned} e^{2t} \quad e^{-2t}, & \quad e^{-t} \sin(2t) \quad e^{-t} \cos(2t), & \quad \sinh(t) \quad e \quad \cosh(t), \\ e^{-3t} \quad e^{-t} e^{-3t}, & \quad \sin(2t + 1) \quad e \quad \cos(2t + 2), & \quad 3 \quad e \quad 5t. \end{aligned}$$

ex: Verifique que se $x(t) = p(t)e^{\lambda t}$ então

$$((D - \lambda)x)(t) = p'(t)e^{\lambda t}$$

Deduz a que o núcleo do operador $(D - \lambda)^n$, com $n \geq 1$, é o espaço dos quase-polinómios $p(t)e^{\lambda t}$, onde $p(t)$ é um polinómio de grau $\deg p \leq n - 1$.

EDOs equidimensionais. Uma equação diferencial da forma

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (3.25)$$

é dita *equidimensional*, pois é invariante por homotetias $x \mapsto \lambda x$, com $\lambda > 0$. A reparametrização $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) := y(x(t))$. De facto,

$$\dot{z} = \frac{dy}{dx} \dot{x} = \frac{dy}{dx} x \quad \text{e} \quad \ddot{z} = \frac{d^2y}{dx^2} \dot{x} x + \frac{dy}{dx} \ddot{x} = \frac{d^2y}{dx^2} x^2 + \frac{dy}{dx} x = x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \dot{z}$$

e portanto a (3.25) é equivalente a

$$a\ddot{z} + (a+b)\dot{z} + cz = 0$$

ex: Resolva a equação

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

na semireta $x > 0$.

3.4 Oscilador harmónico

Oscilador harmónico. As pequenas oscilações de um pêndulo matemático em torno da posição de equilíbrio estável são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \quad (3.26)$$

onde $\omega > 0$ é a “frequência (angular) característica” (pois $\sin \theta \simeq \theta$ se o ângulo θ é pequeno). Esta é uma equação universal, pois descreve as pequenas oscilações de qualquer sistema Newtoniano unidimensional numa vizinhança de um equilíbrio estável genérico.²⁵

Por exemplo, a corrente $I(t)$ que circula num circuito LC (com resistência nula, algo que não existe!) satisfaz a equação $L\ddot{I} + I/C = 0$, assim que a frequência própria do circuito é $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Outro exemplo são as oscilações de um objeto de massa m sujeito a uma força de Hooke de constante elástica k , cujas oscilações são descritas pela equação de Newton $m\ddot{x} = -kx$ se x é o deslocamento da posição de equilíbrio. Neste caso a frequência própria é $\omega = \sqrt{k/m}$.

No espaço de fases $\mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases} \quad (3.27)$$

A solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

As trajetórias $q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ podem ser escritas como

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos coeficientes a e b , ou seja, dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (usando as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$). Mais simples é usar exponenciais complexos, e observar que, por exemplo, $A \cos(\omega t + \phi)$ é a parte real de $Ae^{i(\omega t + \phi)}$.

A energia

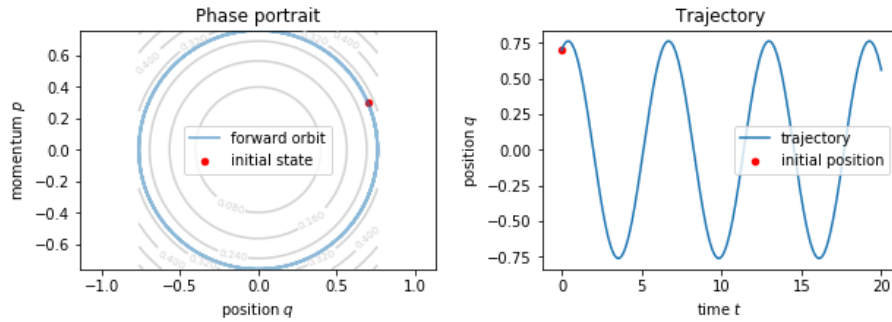
$$E(q, p) := \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento. Ou seja, se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(q(t), p(t)) &= \frac{\partial E}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial E}{\partial p} \dot{p} = p \dot{p} + \omega^2 q \dot{q} \\ &= p(\dot{p} + \omega^2 q) = 0 \end{aligned}$$

para todo o tempo t . Consequentemente, as órbitas do oscilador harmónico estão contidas (de facto, são iguais!) nas curvas de nível da energia E , que são elipses.

²⁵ “The harmonic oscillator, which we are about to study, has close analogs in many other fields; although we start with a mechanical example of a weight on a spring, or a pendulum with a small swing, or certain other mechanical devices, we are really studying a certain *differential equation*. This equation appears again and again in physics and other sciences, and in fact is a part of so many phenomena that its close study is well worth our while. Some of the phenomena involving this equation are the oscillations of a mass on a spring; the oscillations of charge flowing back and forth in an electrical circuit; the vibrations of a tuning fork which is generating sound waves; the analogous vibrations of the electrons in an atom, which generate light waves; the equations for the operation of a servosystem, such as a thermostat trying to adjust a temperature; complicated interactions in chemical reactions; the growth of a colony of bacteria in interaction with the food supply and the poison the bacteria produce; foxes eating rabbits eating grass, and so on; ...”



ex: Determine a energia enquanto função da amplitude e da frequência das oscilações.

Oscilações amortecidas. Consideramos a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -\beta\dot{q} - \omega^2 q \quad (3.28)$$

onde ω é a *frequência própria* do oscilador (em ausência de atrito) e $\beta > 0$ é um coeficiente de atrito (com as dimensões do inverso de um tempo).

Por exemplo, a corrente $I(t)$ que circula num circuito RLC satisfaz a equação $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$. Assim, a frequência própria do circuito é $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e o coeficiente de atrito é $\beta = R/L$.

Outro exemplo são as oscilações de um objeto de massa m sujeito a uma força de Hooke de constante elástica k e a uma força de atrito proporcional e contrária à velocidade por um factor γ . A equação de Newton que determina o deslocamento x da posição de equilíbrio é $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$. Neste caso, a frequência própria é $\omega = \sqrt{k/m}$ e o coeficiente de atrito é $\beta = \gamma/m$.

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação (3.28) assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q - \beta p \end{cases}.$$

A energia

$$E(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

não é uma constante do movimento, mas decresce, ou seja, é “dissipada”, a uma taxa proporcional à energia cinética, pois

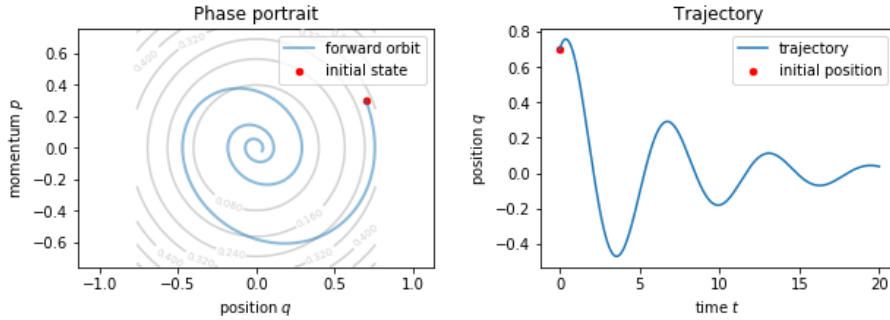
$$\frac{d}{dt}E = \frac{\partial E}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial E}{\partial p}\dot{p} = p(\dot{p} + \omega^2 q) = -\beta p^2 \leq 0.$$

É conveniente definir $\alpha = \beta/2$, chamado *coeficiente de amortecimento*. A equação característica da (3.28) é $(z + \alpha)^2 = -(\omega^2 - \alpha^2)$, e portanto a natureza das suas raízes dependem do sinal de $\omega^2 - \alpha^2$.

O sistema é dito *sub-crítico* se $\alpha^2 < \omega^2$, ou seja, se o atrito é pequeno (quando comparado com a frequência própria). Neste caso, as soluções são oscilações

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (3.29)$$

de frequência $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ cuja amplitude decai com tempo característico $\tau = 1/\alpha$. Sendo $\Omega < \omega$, o período $2\pi/\Omega$ das oscilações é superior ao período próprio $2\pi/\omega$. Se o atrito é muito pequeno, ou seja, $\alpha \ll \omega$, então em primeira aproximação a frequência é $\Omega \simeq \omega - \alpha^2/2\omega^2 + \dots$. Por outro lado, a frequência Ω tende para zero (e, conseqüentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \rightarrow \omega^-$.



Quando $\alpha \ll \omega$, e portanto $\Omega \simeq \omega$, é útil quantificar a perda de energia $\Delta E = E(t) - E(t+T)$ ao longo de um período $T \simeq 2\pi/\omega$. Um cálculo mostra que a energia total é aproximadamente $E(t) \simeq \frac{1}{2}A^2\omega^2 e^{-\beta t}$ (se desprezamos termos com média nula ao longo de um período e termos de ordem α^2 comparados com termos da ordem ω^2). Então a perda relativa de energia ao longo de um período é

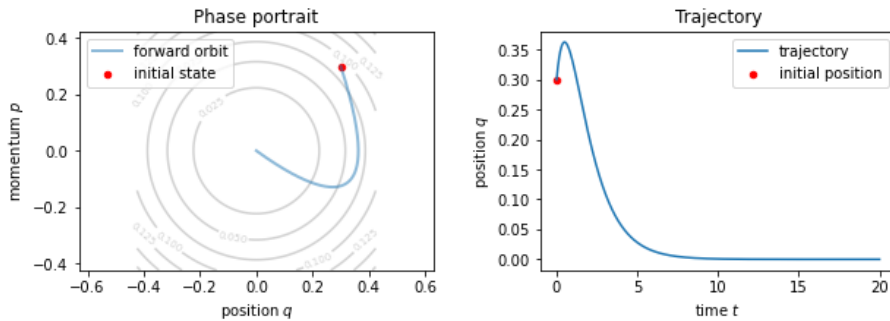
$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

onde o *Q-factor* é definido por $Q := \omega/\beta$.

O sistema é dito *super-crítico* se $\alpha^2 > \omega^2$, ou seja, se o atrito é grande. Neste caso, as soluções são

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sinh(kt + \varphi)$$

onde $k = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Observe que $k < \alpha$, e portanto $q(t) \rightarrow 0$ exponencialmente, e sem oscilar, quando $t \rightarrow \infty$.



O caso intermédio é o caso *crítico*, quando $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!). A equação característica admite uma única raiz, $-\alpha$, e as soluções são

$$q(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}.$$

Também neste caso, as trajetórias decaem sem oscilar.

Equação de Schrödinger estacionária. Considere a equação de Schrödinger estacionária

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J.s.

ex: Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

4 EDOS lineares não homogêneas

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.15-19 ; [MW85] Vol. 2, 12.6-7

4.1 EDOS lineares não homogêneas

26 fev 2024

EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes. Uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes é uma lei

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = f(t) \quad (4.1)$$

para a trajetória $x(t)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são coeficientes constantes, e $f(t)$ é uma função dada, uma *força externa* dependente do tempo, definida num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções de (4.1), então a diferença $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é uma solução da EDO homogênea associada

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \beta y = 0 \quad (4.2)$$

obtida de (4.1) ao fazer $f(t) = 0$ (i.e. força nula). Portanto, a solução geral de (4.1) pode ser representada como uma soma

$$x(t) = z(t) + y(t),$$

onde $z(t)$ é uma (apenas uma!) “solução particular” de (4.1) e $y(t) = c_+ \phi_+(t) + c_- \phi_-(t)$ é a solução geral da EDO homogênea associada (4.2), combinação linear de duas soluções independentes $\phi_{\pm}(t)$ com coeficientes arbitrários $c_{\pm} \in \mathbb{R}$. Em particular,

Teorema 4.1. *O espaço das soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes é um plano afim $z + \mathcal{H}$, modelado sobre o espaço linear $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}^2$ das soluções da equação homogênea associada.*

Portanto, o problema de resolver uma equação diferencial linear com coeficientes constantes é reduzido ao problema de determinar apenas uma solução, por exemplo, a solução com condições iniciais triviais, dita “resposta do sistema” a força $f(t)$.

Adivinhar. O método mais simples e mais utilizado é “adivinhar” soluções, ou melhor, conjecturar soluções particulares, seguindo o instinto, a experiência, ou exemplos importantes e recorrentes (os ingleses dizem “educated guess”).

Partícula num campo de forças dependente do tempo. Consideramos a equação de Newton

$$\ddot{x} = f(t)$$

de uma partícula de massa unitária sujeita a uma força dependendo do tempo $f(t)$. Esta equação diz que $x(t)$ é uma primitiva de uma primitiva de $f(t)$, ou seja,

$$x(t) = \int_a^t \left(\int_b^s f(\tau) d\tau \right) ds$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Quando a força é particularmente simples, é possível adivinhar logo as soluções. De facto, é suficiente encontrar apenas uma solução, e depois somar uma genérica solução da equação homogênea $\ddot{x} = 0$.

A equação da partícula livre $\ddot{x} = 0$ tem soluções $x(t) = a + bt$, que descrevem um movimento inercial, ou seja, retilíneo uniforme. Como esperado, formam um espaço linear de dimensão dois, gerado pelas soluções 1 e t .

Se a força é constante, por exemplo $f(t) = g$ (a aceleração gravitacional próximo da superfície da terra, ou um campo elétrico constante), as soluções são as parábolas

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + a + bt,$$

obtidas somando ao movimento inercial a solução particular $gt^2/2$.

Outro caso interessante é uma força periódica como $f(t) = F \cos(\omega t)$, com amplitude F e frequência ω . É claro que uma solução particular é também periódica, do mesmo período (pois a segunda derivada de um cosseno ou de um seno é proporcional à própria função), e de facto é imediato verificar que uma solução é

$$x(t) = -\frac{F}{\omega^2} \cos(\omega t) + a + bt.$$

Também simples, embora pouco interessante na prática, é resolver o caso de uma força polinomial, ou exponencial, ou produto de polinómios e exponenciais ...

Carga num campo elétrico alternado. A equação de Newton

$$m\ddot{x} = qE \sin(\omega t)$$

descreve o movimento de uma partícula de massa m e carga q (que pode ser positiva ou negativa) num campo elétrico alternado $E \sin(\omega t)$ [KKR62]. A solução com posição e velocidades iniciais nulas $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ é

$$x(t) = \frac{qE}{m\omega} t - \frac{qE}{m\omega^2} \sin(\omega t)$$

ou seja, a trajetória da partícula é a soma de uma oscilação e de um movimento retilíneo uniforme! Em particular, a velocidade não muda nunca de sinal e oscila entre 0 e $2qE/m\omega$.

ex: Considere a equação de Newton

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + f(t)$$

onde $\gamma := 1/\tau \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, determine a trajetória quando a força é constante $f(t) = g$, linear $f(t) = ct$, ou periódica $f(t) = F \cos(\omega t)$.

Princípio de sobreposição. A procura de uma solução particular de (4.1) pode ser simplificada usando o *princípio de sobreposição*, consequência da linearidade do problema. Se $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ são soluções das EDOs lineares

$$\ddot{x}_k + 2\alpha \dot{x}_k + \beta x_k = f_k(t) \quad \text{com} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

(observe que α e β são sempre os mesmos!) então a “sobreposição”

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

é solução da EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t).$$

A ideia é utilizar a estratégia dos romanos (ou dos macedónios?), DIVIDE ET IMPERA. Ao dividir a força $f(t)$ em parcelas simples $f_k(t)$, podemos esperar resolver o problema aparentemente difícil juntando as soluções $x_k(t)$ dos problemas mais simples.

ex: Determine a solução geral de

$$\ddot{x} = \sin(t) \quad \ddot{x} + \dot{x} = t \quad \ddot{x} + x = e^{-t}$$

ex: Determine uma solução particular de

$$\ddot{x} = 1 + t + t^2 \quad \ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} - e^{-2t}$$

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares.

$$\ddot{x} + x = t \quad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 \quad \ddot{x} - 4x = e^{-2t}$$

4.2 Quase-polinómios e método dos coeficientes indeterminados

Quase-polinómios e coeficientes indeterminados. Um *quase-polinómio* é um produto

$$\varphi(t) = p(t) e^{\lambda t}$$

de um polinómio $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k$ vezes um exponencial $e^{\lambda t}$ (real ou complexo, ou seja, um produto de um exponencial real $e^{\rho t}$ e funções trigonométricas, $\cos(\omega t)$ e/ou $\sin(\omega t)$, se $\lambda = \rho \pm i\omega$). O grau do quase-polinómio é o grau de $p(t)$, e o seu expoente é λ . Os polinómios são quase-polinómios com expoente nulo.

Ao aplicar o operador diferencial $D = d/dt$ a um quase-polinómio $\varphi(t) = p(t)e^{\lambda t}$ de grau g o resultado é

$$(D\varphi)(t) = (p'(t) + \lambda p(t))e^{\lambda t},$$

que é também um quase-polinómio com o mesmo expoente λ e grau $\leq g$. Mais em geral, um operador diferencial linear com coeficientes constantes $L = \sum_{k=0}^n a_k D^k$ envia um quase-polinómio $\varphi(t) = P(t)e^{\lambda t}$, com expoente λ e grau g , num quase-polinómio

$$(L\varphi)(t) = p(t) e^{\lambda t}$$

com o mesmo expoente λ e grau $\leq g$ (mas pode produzir senos e cosenos a partir de apenas um seno ou um cosseno).

Consideramos uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes, por exemplo de segunda ordem,

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \quad (4.3)$$

(mas as mesmas considerações permitem tratar o caso de ordem n arbitrária), que pode ser escrita $(Lx)(t) = f(t)$, se definimos o operador diferencial $L = aD^2 + bD + cI$. Se o segundo membro, que representa uma força externa, é um quase-polinómio

$$f(t) = e^{\rho t} (p(t) \cos(\omega t) + q(t) \sin(\omega t)) ,$$

com expoente $\lambda = \rho + i\omega$ e onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinómios de grau $\leq k$ (usando o princípio de sobreposição, é suficiente considerar os casos dos monómios t^k , naturalmente), então é claro que a equação (4.3) admite uma solução particular da forma

$$z(t) = e^{\rho t} (P(t) \cos(\omega t) + Q(t) \sin(\omega t)) ,$$

onde $Q(t)$ e $P(t)$ são polinómios de grau $\leq k + 2$.

De facto, é possível provar que, se λ é uma raiz do polinómio característico $az^2 + bz + c$ da equação homogénea com multiplicidade $n \leq 2$, é suficiente considerar polinómios da forma $Q(t) = t^n \tilde{Q}(t)$ e $P(t) = t^n \tilde{P}(t)$, onde $\tilde{Q}(t)$ e $\tilde{P}(t)$ são polinómios de grau $\leq k$. Em particular, no caso genérico (não ressonante) em que λ não é uma raiz do polinómio característico, basta considerar polinómios $Q(t)$ e $P(t)$ de grau $\leq k$.

Os “coeficientes indeterminados” dos polinómios $P(t)$ e $Q(t)$ são obtidos ao igualar os termos de mesmo grau na (4.3), e portanto ao resolver um sistema linear de $2(k+1)$ equações em $2(k+1)$ incógnitas (no caso geral em que $\omega \neq 0$, ou a metade se $\omega = 0$). Por esta razão, este método é chamado *método dos coeficientes indeterminados*.

Usando o princípio de sobreposição, é possível determinar soluções particulares quando o segundo membro $f(t)$ é uma combinação linear de quase-polinómios.

e.g. Por exemplo, uma solução particular da equação

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = F_0 e^{-t}$$

pode ser determinada da forma $x(t) = ae^{-t}$. De facto, ao substituir esta conjectura obtemos $(a + 3a + 2a)e^{-t} = F_0 e^{-t}$, e portanto $a = F_0/6$. Uma solução particular é portanto $x(t) = \frac{1}{6}F_0 e^{-t}$.

Por outro lado, se consideramos a equação diferencial

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = F_0 e^t$$

e experimentamos a conjectura $x(t) = be^t$, obtemos $(b - 3b + 2b)e^{-t} = e^{-t}$, o que é impossível. Isto acontece porque $\lambda = 1$ é uma raiz do polinómio caraterístico $z^2 - 3z + 2$, e portanto e^t é uma solução da equação homogénea associada (e, como tal, anula o primeiro membro da equação). Uma segunda tentativa pode ser $x(t) = cte^t$. Ao substituir esta conjectura, e com alguma paciência, obtemos $(c(2+t) - 3c(1+t) + 2ct)e^t = F_0 e^t$, ou seja, $-ce^t = F_0 e^t$, e portanto $c = -F_0$. Uma solução particular é portanto $x(t) = -F_0 e^t$.

O caso pior é quando o expoente da força corresponde a uma raiz dupla do polinómio caraterístico. Um exemplo é a equação diferencial

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = F_0 e^t$$

A única raiz do polinómio caraterístico é $\lambda = 1$, e a solução geral da equação homogénea é portanto $(a + bt)e^t$. Neste caso, as tentativas $x(t) = ae^t$ e $x(t) = bte^t$ falham (justamente porque resolvem a equação homogénea!). No entanto, se substituirmos a conjectura $x(t) = ct^2 e^t$ obtemos finalmente $2ce^t = F_0 e^t$, e portanto $c = F_0/2$. Uma solução particular é portanto $x(t) = \frac{1}{2}F_0 t^2 e^t$.

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= t^3 e^{-t} + e^t & \ddot{x} + x &= \sin(t) & \ddot{x} + 4x &= 2t \cos(t) \\ \ddot{x} + 9x &= \sin(\pi t) & \ddot{x} + 4x &= \cos(2t) & \ddot{x} - 4x &= te^{-2t} & \ddot{x} + 4x &= te^{-t} \cos(2t) \\ \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x &= 10 \sin t & \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x &= \cos(2t) & \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x &= e^{-t} & \ddot{x} - \dot{x} &= e^t \end{aligned}$$

EDOs lineares de ordem superior. Pode existir um universo paralelo ao nosso, onde a equação de Newton (se calhar um senhor com 3 cabeças) assume a forma

$$m\ddot{\ddot{x}} = F,$$

sendo a força uma função $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, t)$ da posição x , da velocidade $\dot{x}$, da aceleração $\ddot{x}$ e da “arrancada” (em inglês, *jerk*) $\ddot{\ddot{x}}$ da partícula, e, possivelmente, do tempo t . O espaço de fases tem, neste universo, dimensão 4. Engenheiros, físicos e matemáticos deste universo teriam, justamente, interesse em resolver equações diferenciais lineares de ordem 4, do género

$$\ddot{\ddot{x}} + \alpha \ddot{\ddot{x}} + \beta \ddot{\ddot{x}} + \gamma \dot{x} + \delta x = f(t).$$

A boa notícia é que engenheiros, físicos e matemáticos do nosso planeta já conhecem as técnicas para resolver este tipo de equações, pois são as mesmas que usamos no planeta Terra: conjectura e^{zt} para resolver a equação homogénea (e agora o polinómio caraterístico terá grau 4), e método dos coeficientes indeterminados para determinar uma solução particular quando a força é um quase-polinómio.

Isto vale, naturalmente, para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes de ordem arbitrário. Apenas para satisfazer a nossa curiosidade matemática, consideramos uma EDO linear homogénea de grau n , do género

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

onde os a_k são coeficientes reais. Pode ser escrita simbolicamente como

$$P(D)x = 0$$

se P denota o polinómio mónico $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ e $D = d/dt$ o operador derivação. Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio factoriza num produto

$$P(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$$

sendo os λ_k 's as n raízes, em geral complexas e não necessariamente distintas. Como os coeficientes de P são reais, as raízes não reais ocorrem em pares de números complexos conjugados. Juntando as raízes repetidas, temos finalmente que o polinómio factoriza num produto de factores

$$(z - k)^m$$

onde os k 's são as diferentes raízes reais e os m 's as suas multiplicidades algébricas, e factores

$$(z - \lambda_+)^d (z - \lambda_-)^d = (z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \omega^2))^d$$

onde os $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\omega$ são os diferentes pares de raízes não reais, logo complexas conjugadas, e os d 's as suas multiplicidades algébricas. A soma $\sum m + 2 \sum d$ é igual ao grau n . Consequentemente, também o operador diferencial $P(D)$ factoriza num produto de operadores do género

$$(D - k)^m \quad (4.4)$$

e

$$(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \omega^2))^d \quad (4.5)$$

Estes factores comutam, e portanto o núcleo do operador $P(D)$, ou seja, o espaço das soluções da equação homogénea, contém os núcleos de todos estes factores. É um exercício verificar que o núcleo do operador (4.4) é o espaço dos quase-polinómios $p(t)e^{kt}$ de expoente k e grau $\deg p \leq m - 1$, cuja dimensão é m . Também é um exercício verificar que o núcleo de (4.5) é o espaço dos quase-polinómios $(p(t)\cos(\omega t) + q(t)\sin(\omega t))e^{\alpha t}$ de expoente α , frequência ω e grau $\deg p, \deg q \leq d - 1$, cuja dimensão é $2d$. Finalmente, é possível verificar (por exemplo, generalizando a definição de determinante wronskiano) que as soluções assim encontradas geram um espaço vetorial real de dimensão n , e portanto todo o espaço das soluções da equação homogénea.

Consideramos agora o problema de determinar uma solução da EDO linear não homogénea

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f(t)$$

logo o problema não homogéneo

$$P(D)x = f$$

Se $f(t)$ é um quase-polinómio, é claro que o método dos coeficientes indeterminados pode funcionar. Outra possibilidade é considerar a factorização

$$P(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)$$

e aplicar repetidamente a fórmula (2.19) para calcular o inverso $(D - \lambda_k)^{-1}$ de cada factor. Simbolicamente, uma solução particular é

$$x = (D - \lambda_1)^{-1} (D - \lambda_2)^{-1} \dots (D - \lambda_n)^{-1} f$$

Existem receitas mais práticas e úteis, como a transformada de Laplace ou teoria as funções de Green. Ainda melhor é transformar a equação diferencial de ordem n num sistema de ordem um, logo num fluxo num espaço de fases, e usar as técnicas explicadas na última seção ??.

Oscilador harmónico tralfamadoriano. Por exemplo, o oscilador harmónico no planeta Tralfamador²⁶ deste universo paralelo pode ser do género (o factor 4 apenas simplifica as fórmulas sucessivas)

$$\ddot{x} = -4\omega^4 x.$$

com $\omega > 0$. A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução se z é uma raiz do polinómio caraterístico $z^4 + 4\omega^4$. As quatro raízes são $\pm(\omega \pm i\omega)$. A solução geral é portanto uma sobreposição

$$x(t) = A_+ e^{+\omega t} \cos(\omega t + \phi_+) + A_- e^{-\omega t} \cos(\omega t + \phi_-),$$

onde os parâmetros $A_{\pm}$ e $\phi_{\pm}$ dependem das condições iniciais. A origem é um “equilíbrio hiperbólico”: as soluções genéricas (com $A_+ \neq 0$) divergem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, e as soluções com $A_+ = 0$ decaem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Não há como fazer relógios de pêndulo no planeta Tralfamador.

So it goes.

²⁶Kurt Vonnegut, *Slaughterhouse-Five, or The Children's Crusade*, Delacorte, 1969.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares homogêneas:

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} - x = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} + x = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} + \ddot{x} = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} + 2\ddot{x} + x = 0$$

ex: Determine umas soluções particulares das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\ddot{\ddot{x}} - 2\ddot{\ddot{x}} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t - 1 \quad \ddot{\ddot{x}} + x = \sin(t) \quad \ddot{\ddot{x}} + 4\ddot{x} = e^{-t}$$

4.3 Oscilações forçadas

Oscilações forçadas, batimentos e ressonância. Consideramos a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = F_0 \cos(\gamma t) \quad (4.6)$$

onde ω é a frequência própria do oscilador e γ é a frequência de uma força periódica.

O sistema homogêneo é um oscilador harmônico, e portanto as suas soluções são oscilações $A \cos(\omega t + \phi)$, onde A e ϕ são constantes arbitrárias. A intuição sugere que o efeito da força seja uma oscilação adicional de frequência γ .

Quando $\gamma^2 \neq \omega^2$, uma solução pode ser determinada usando a conjectura $x(t) = a \cos(\gamma t)$, e um cálculo elementar mostra que a solução geral é

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t)$$

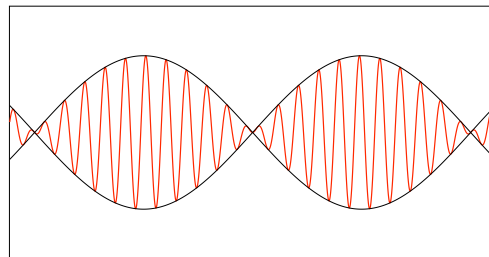
Em particular, a solução com condições iniciais triviais pode ser escrita

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)) \\ &= \frac{F_0}{2\Omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

onde $\Omega = (\omega + \gamma)/2$ é a média das frequências, e $\varepsilon = (\omega - \gamma)/2$ a semi-diferença (usando as fórmulas de adição trigonométricas). Quando $|\varepsilon| \ll |\omega|$, e portanto $\Omega \simeq \omega$, podemos estimar

$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \sin(\omega t).$$

Portanto, a resposta do oscilador à força externa de frequência γ próxima (mas diferente) da frequência própria ω é uma “modulação” lenta (de período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) de uma oscilação com frequência própria ω . Este fenómeno é chamado *batimentos* (em inglês, *beats*), e pode ser ouvido ao tocar contemporaneamente duas cordas de um instrumento de cordas afinadas com duas frequências muito próximas mas diferentes.



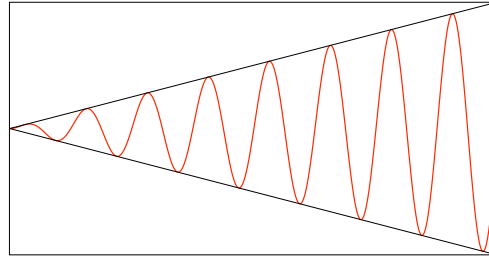
Para tempos t que satisfazem $\varepsilon t \ll 1$, podemos aproximar a modulação $\sin(\varepsilon t)$ com o seu polinómio de Taylor de ordem 3, e escrever a solução como

$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega} \sin(\omega t) \left(t - \frac{1}{6} \varepsilon^2 t^3 + \dots \right)$$

No limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos finalmente

$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) \quad (4.7)$$

Ou seja, quando $\gamma \rightarrow \omega$, a frequência dos batimento decresce para zero, o que significa que o período dos batimentos tende para o infinito, e apenas vemos a “parte inicial” do seno $\sin(\varepsilon t)/\varepsilon$, que é essencialmente uma reta t . Este fenómeno, uma resposta cuja amplitude cresce linearmente no tempo, é chamado *ressonância*.



ex: Deduza a fórmula (4.7) da ressonância usando a conjectura $x(t) = bt \sin(\omega t)$ e o método dos coeficientes indeterminados.

Oscilações forçadas em notação complexa. A equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t).$$

admite uma solução particularmente simples e elegante em notação complexa. A variável complexa $z := p + i\omega q$, onde $p := \dot{q}$ é o momento linear, satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$\dot{z} - i\omega z = f(t).$$

Uma solução não trivial da EDO homogênea associada $\dot{y} - i\omega y = 0$ é $y(t) = e^{i\omega t}$. Por outro lado, o produto $z(t) = \lambda(t) e^{i\omega t}$ é uma solução de $\dot{z} - i\omega z = f(t)$ se λ é solução de $\dot{\lambda} = f(t) e^{-i\omega t}$. Consequentemente, uma solução com condição inicial $z(0) = z_0$ é

$$z(t) = e^{i\omega t} \left(z_0 + \int_0^t f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right).$$

Em particular, a solução com condições iniciais triviais $q(0) = 0$ e $p(0) = 0$, ou seja, a “resposta do oscilador” inicialmente em equilíbrio a uma força que começa a agir no tempo $t = 0$ pode ser representada pelo integral

$$z(t) = \int_0^t f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau$$

O deslocamento $q(t)$ pode ser obtido ao calcular a parte imaginária deste integral, e resulta (sendo a força real)

$$q(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t-\tau)) d\tau$$

A função $\sin(\omega t)/\omega$, que neste integral multiplica a força, é chamada “resposta impulsiva”, ou também “função de Green”, do oscilador, e pode ser obtida de forma mais sistemática usando a teoria da transformada de Laplace.

A energia do oscilador,

$$E = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2} |z|^2,$$

é conservada se a força é nula. Uma força $f(t)$, atuando do tempo $t = a$ até ao tempo $t = b$, fornece ao oscilador (inicialmente em repouso) uma energia

$$\Delta E = E(b) - E(a) = \frac{1}{2} \left| \int_a^b f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

No limite quando $a \rightarrow -\infty$ e $b \rightarrow \infty$, este valor é [LL78]

$$E(\infty) - E(-\infty) = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2,$$

proporcional ao quadrado do valor absoluto da “transformada de Fourier” de $f(t)$ calculada na frequência ω .

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força constante f_0 que age apenas no intervalo $[0, T]$ (ou seja, nula fora deste intervalo). O que acontece no limite quando $T \rightarrow 0$ e $f_0 \rightarrow \infty$ mantendo constante o produto $h = f_0 T$?

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força inicialmente nula, que cresce linearmente de 0 até f_0 no intervalo $[0, T]$, e é mantida constante e igual a $f(t) = f_0$ se $t \geq T$.

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força igual a $f(t) = \sin(\gamma t)$ no intervalo $[0, 2\pi/\gamma)$ e nula fora deste intervalo.

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força inicialmente nula e igual a $f(t) = \sin(\gamma t)$ se $t \geq 0$. Analise o limite da resposta quando $\gamma \rightarrow \omega$.

Oscilações forçadas amortecidas. Consideramos a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} + \beta \dot{q} + \omega^2 q = F_0 \cos(\gamma t) \quad (4.8)$$

onde ω é a frequência própria do oscilador, $\beta = 2\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, e a força também oscila, com frequência γ . Um exemplo é um circuito *RLC* sujeito a uma força eletromotriz periódica.

A solução geral da homogênea é chamada solução *transiente*, porque decai exponencialmente e portanto é desprezável para grandes valores do tempo. Por exemplo, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), então a solução transiente é $x_0(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi)$. Representa uma oscilação com frequência $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ que decai exponencialmente com tempo característico $\tau = 1/\alpha$ (logo é desprezável quando $t \gg \tau$).

Sendo a força um quase-polinómio, uma solução particular da (4.8) pode ser determinada usando o método dos coeficientes indeterminados, e é claro que é da forma $a \cos(\gamma t) + b \sin(\gamma t)$ (pois $\pm i\gamma$ não são raízes do polinómio característico da equação homogênea). Um cálculo mostra que os coeficientes a e b são soluções do sistema linear determinado

$$\begin{cases} (\omega^2 - \gamma^2) a + \beta \gamma b = F_0 \\ -\beta \gamma a + (\omega^2 - \gamma^2) b = 0 \end{cases}$$

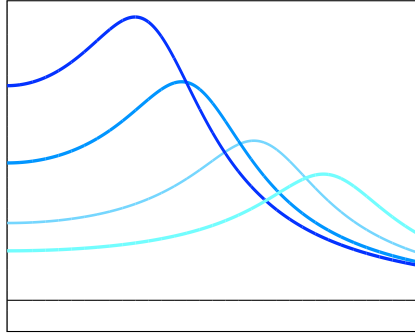
Consequentemente, uma solução particular é

$$x_\infty(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + (\beta \gamma)^2}} \cos(\gamma t - \phi)$$

onde a fase ϕ satisfaz $\tan \phi = (\beta \gamma)/(\omega^2 - \gamma^2)$. É chamada solução *estacionária*, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função

$$R(\gamma) := \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + (\beta \gamma)^2}}$$

o factor de proporcionalidade entre a amplitude da força e da resposta, é dita *curva de ressonância* do sistema, e o seu gráfico é do género



ao variar ω e β . A curva de ressonância atinge um máximo para o valor $\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}/2$ da frequência, chamada *frequência de ressonância*. Se o atrito é pequeno, ou seja, se $\alpha \ll \omega$, então a frequência de ressonância é $\gamma_r \simeq \omega - (\alpha/\omega)^2 + \dots$, muito próxima da frequência própria do oscilador.

ex: Discuta também o caso crítico $\alpha^2 = \omega^2$ e super-crítico $\alpha^2 > \omega^2$.

ex: [LL78] V.26

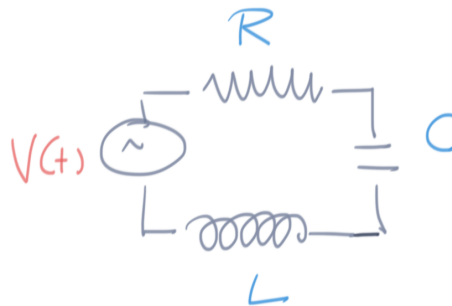
Circuito RLC. Os elementos de um circuito elétrico são definidos pelas leis empíricas $V_R = IR$, a lei de Ohm que define a *resistência* de um resistor, $V_C = Q/C$, que define a *capacitância* de um condensador, e $V_L = L\dot{I}$, que define a *indutância* de um indutor/bobina. Nas fórmulas, as V 's representam as diferenças de potencial aplicadas aos elementos, Q é a carga elétrica, e $I = \dot{Q}$ a corrente. De acordo com a lei de Kirchhoff, a força eletromotriz, ou voltagem, $V(t)$ aplicada a um circuito com os três elementos em série é igual a soma dos $V_L + V_R + V_C$, o que produz a equação diferencial

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

para a carga elétrica. Derivando, deduzimos a equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}$$

para a corrente que circula no circuito.



ex: Verifique que a frequência própria de um circuito ideal com resistência nula é $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Estime a frequência própria quando a resistência é pequena.

ex: Verifique que o tempo característico de decaimento da corrente transiente (a solução geral da equação homogênea, ou seja, a corrente do circuito alimentado com voltagem nula) num circuito RLC é $\tau = 2L/R$.

ex: Determine a corrente estacionária num circuito RLC alimentado com uma voltagem constante $V(t) = V_0$ (compare com a equação das oscilações amortecidas).

ex: Determine a corrente estacionária num circuito RLC alimentado com uma voltagem alternada $V(t) = V_0 \cos(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas, mas observe que a intensidade F_0 da força também depende da frequência γ).

ex: Determine a frequência de ressonância do circuito RLC .

Impedância complexa. A análise dos circuitos elétricos é imensamente simplificada se idealizamos correntes e voltagens usando exponenciais complexos. Consideramos um circuito elétrico alimentado por uma força eletromotriz (voltagem) “harmônica” com intensidade V_0 e frequência ω , por exemplo $V_0 \cos(\omega t)$. A ideia é substituir esta expressão por um exponencial complexo $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$, assim que a voltagem física é a sua parte real. É claro (por exemplo, de acordo com o método dos coeficientes indeterminados) que a resposta estacionária (ou seja, assintótica) do circuito é uma corrente também harmônica e do mesmo período, mas possivelmente desfasada, ou seja, da forma $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$. O quociente

$$Z := \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} e^{i\varphi}$$

que não depende do tempo mas pode depender da frequência ω , é chamado *impedância (complexa)* do circuito. Assim, a resposta estacionária do circuito, por quanto “complexo” mas linear!, é descrita por uma “lei de Ohm”

$$V(t) = Z \cdot I(t)$$

e é determinada apenas por um número complexo $Z = |Z|e^{i\varphi}$, ou seja, por um valor absoluto $|Z| = V_0/I_0$, chamado *reatância*, e uma *fase* φ .

Se o circuito é formado por apenas uma resistência R , então a lei de Ohm $V = RI$ diz que a sua impedância é real e igual a

$$Z_R = R$$

Se o circuito é formado por apenas uma bobina de indutância L , então a lei $V = L\dot{I}$ implica que $V_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i\omega t}$, e portanto a sua impedância é

$$Z_L = i\omega L$$

um número imaginário puro com fase $\varphi_L = \pi/2$. Finalmente, se o circuito é formado por apenas um condensador de capacitância C , então a carga acumulada $Q = \int I dt$ satisfaz a lei $Q = CV$. Ao derivar em ordem ao tempo, temos $I = C\dot{V}$, e portanto $I_0 e^{i\omega t} = i\omega C V_0 e^{i\omega t}$. Assim, a impedância de um condensador é

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

um número imaginário puro com fase $\varphi_C = -\pi/2$. Pela lei de Kirchhoff, a impedância de um circuito em série RLC é uma soma

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Em particular, a reatância é mínima, logo a resposta é máxima, quando a parte imaginária da impedância é nula, ou seja, quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$, a frequência de ressonância do circuito.

Mais em geral, se uns circuitos de impedância $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ estão em séries, então a tensão total é uma soma $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots = Z_1 I + Z_2 I + Z_3 I + \dots$, pois a corrente I é a mesma. Assim, o circuito resultante tem impedância

$$Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$

Por outro lado, se uns circuitos de impedância $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ estão em paralelo, então a corrente é uma soma $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$ e a tensão $V = Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = Z_3 I_3 = \dots$ é a mesma. Consequentemente, a impedância total do circuito $Z_{\text{paralelo}} = V/I$ é a média harmónica entre as impedâncias dos elementos, ou seja,

$$1/Z_{\text{paralelo}} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + \dots$$

Também interessante é a potência $P = VI$ dissipada pelo circuito, ou, melhor, a sua média $\langle P \rangle$ calculada ao longo de um período $T = 2\pi/\omega$. Neste cálculo é necessário usar as quantidades físicas, ou seja, as partes reais dos exponenciais complexos, os cosenos. Então a potência instantânea é $P(t) = (V_0^2/|Z|) \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$, e a sua média ao longo de um período T é

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{|Z|} \cos \varphi$$

inversamente proporcional à reatância do circuito e proporcional ao coseno da fase. Em particular, a potência dissipada é máxima quando $\varphi = 0$ (por exemplo, apenas uma resistência), e é nula quando $\varphi = \pm\pi/2$ (por exemplo, apenas uma bobina ou uma capacidade).

ex: Calcule a impedância complexa de um circuito RLC e a sua frequência de ressonância.

4.4 Variação das constantes e funções de Green

Disclaimer. É tradição, em praticamente todos os manuais sobre equações diferenciais, contar aos alunos também a seguinte receita que produz fórmulas integrais que resolvem EDOs lineares de segunda ordem não homogêneas. O programa oficial desta UC menciona explicitamente o método, e por esta razão decidi deixar escrita esta seção. No entanto, como podem observar nos exercícios seguintes, é difícil arranjar exemplos de equações diferenciais “interessantes/realísticas” cuja solução possa ser obtida por este método de forma razoável. Nas palavras de Gian-Carlo Rota,²⁷ ‘**the much-trumpeted method of variation of parameters is pathetically useless**’. Por outro lado, é verdade que o contexto natural onde este método pode ser considerado um caso elementar é a teoria das “funções de Green”, bem mais geral e útil na física-matemática quando aplicada a equações diferenciais parciais. No contexto das EDOs, as funções de Green são chamadas “respostas impulsivas”, e tratadas mais propriamente dentro da teoria da transformada de Laplace.

Variação das constantes. Um método aparentemente elegante para resolver EDOs lineares é o seguinte. Consideramos uma EDO linear não homogênea

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = f(t) \quad (4.9)$$

com coeficientes constantes. Uma solução da homogênea $\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = 0$ é uma combinação linear $y(t) = \lambda_+ \phi_+(t) + \lambda_- \phi_-(t)$, onde $\phi_{\pm}(t)$ são duas soluções independentes e $\lambda_{\pm}$ são constantes arbitrárias. A ideia é procurar uma solução particular de (4.9) ao fazer “variarmos as constantes”, ou seja, ao fazer a conjectura

$$z(t) = \lambda_+(t) \phi_+(t) + \lambda_-(t) \phi_-(t) \quad (4.10)$$

onde agora $\lambda_{\pm}(t)$ são “coeficientes/parâmetros/constantes” variáveis. Um cálculo (e muita paciência) mostra que

$$\ddot{z} + 2\alpha \dot{z} + \beta z = \frac{d}{dt} (\dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_-) + \alpha (\dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_-) + (\dot{\lambda}_+ \dot{\phi}_+ + \dot{\lambda}_- \dot{\phi}_-)$$

(o β desaparece porque $\phi_{\pm}$ são soluções da homogênea). Em particular, (4.10) é solução de (4.9) se (mas não só se!) as derivadas $\dot{\lambda}_{\pm}$ dos coeficientes satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_- &= 0 \\ \dot{\lambda}_+ \dot{\phi}_+ + \dot{\lambda}_- \dot{\phi}_- &= f \end{cases}$$

²⁷G.-C. Rota, *Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations*, MAA meeting at Simons College, april 24, 1997. <https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf>

O determinante da matriz 2×2 que define o sistema é o Wronskiano

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = \phi_+(t) \dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t) \phi_-(t),$$

que é diferente de zero porque as ϕ_+ e ϕ_- são independentes. A única solução do sistema é

$$\dot{\lambda}_+ = -\frac{\phi_- f}{W_{\phi_+, \phi_-}} \quad \dot{\lambda}_- = \frac{\phi_+ f}{W_{\phi_+, \phi_-}},$$

e portanto os coeficientes são umas primitivas

$$\lambda_+(t) = -\int_0^t \phi_-(s) \frac{f(s)}{W_{\phi_+, \phi_-}(s)} ds, \quad \lambda_-(t) = \int_0^t \phi_+(s) \frac{f(s)}{W_{\phi_+, \phi_-}(s)} ds,$$

definidas a menos de constantes aditivas arbitrárias (que correspondem, em (4.10), a somar soluções da equação linear homogênea). É interessante observar que a fórmula final para uma solução particular é um integral

$$z(t) = \int_0^t g(t, s) f(s) ds$$

da força $f(s)$ vezes uma “função de Green”

$$g(t, s) = \frac{\phi_+(s) \phi_-(t) - \phi_-(s) \phi_+(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(s)}. \quad (4.11)$$

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em intervalos de tempo convenientes, utilizando o método de variação dos parâmetros.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 1/\sin(t) & \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= e^{-t} & \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x &= e^{-2t} \log t. \\ \ddot{x} + x &= \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} & \ddot{x} + x &= \tan(t) & \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x &= \frac{e^{2t}}{\cos(2t)}. \end{aligned}$$

Heurística das funções de Green. Consideramos uma equação diferencial ordinária linear não homogênea do género

$$(Lx)(t) = f(t) \quad (4.12)$$

onde L é um operador diferencial, que age num espaço de funções suficientemente regulares, e $f(t)$ é uma força. Um exemplo é $L = D^2 + 2\alpha D + \beta$, que corresponde ao problema das oscilações forçadas e amortecidas quando $\beta = \omega^2 > 0$ é o quadrado da frequência própria e $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito. Uma resposta formal é

$$x(t) = (L^{-1} f)(t)$$

onde L^{-1} é alguma inversa de L . O núcleo de L não é nulo, pois é feito das soluções do problema homogêneo $Lx = 0$, assim que L não é invertível. No entanto, pode admitir uma inversa direita, tal que $L \circ L^{-1}$ seja a identidade. Também natural é esperar que uma inversa direita de um operador diferencial seja um operador integral, logo que seja do género

$$(L^{-1} f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, s) f(s) ds \quad (4.13)$$

A função $g(t, s)$ que aparece neste integral é chamada “núcleo” do operador L^{-1} , ou também “função de Green” do operador L . É claro que, se existir, não é única, assim que a sua escolha dependerá do tipo de problema, de condições iniciais ou de contorno, assim como de outras considerações físicas. Se o operador L tem coeficientes constantes, logo é invariante por translações no tempo, então o núcleo deve depender apenas da diferença $t - s$, ou seja, deve ser da forma $g(t, s) = g(t - s)$. Neste caso o operador inverso é um integral do género

$$(L^{-1} f)(t) = (g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - s) f(s) ds$$

chamado *produto de convolução* do núcleo $g(t)$ com a força $f(t)$, e denotado por $(g * f)(t)$.

Também, $g(t)$ não deve necessariamente ter valores para todos os tempos t , mas apenas integrais. Ou seja, $g(t)$ não é uma função, mas define o que os matemáticos chamam uma “densidade”, um objeto que associa a cada função $f(t)$ suficientemente regular (por exemplo contínua) e a cada tempo t , um valor denotado simbolicamente por $\int g(t-s)f(s)ds$. Como o símbolo de integral sugere, esta correspondência deve ser linear em f . Também é conveniente considerar funções de prova $f(t)$ com suporte compacto (uma força aplicada apenas durante um tempo finito) ou pelo menos que decaem para zero quando $t \rightarrow \pm\infty$ mais rápido do inverso de qualquer potência. A condição $L \circ L^{-1} = I$ diz então que, se o operador comuta com o integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Lg)(t-s)f(s)ds = f(t)$$

ou seja, que Lg é igual à densidade $\delta(t)$ definida pela identidade formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)f(s)ds = f(t) \quad (4.14)$$

e chamada *delta de Dirac*. Finalmente, a função de Green é uma solução da equação diferencial

$$Lg = \delta \quad (4.15)$$

seja qual for o seu significado.

Naturalmente, não existe nenhuma função $\delta(t)$, no sentido usual, que satisfaz a identidade paradoxal (4.14) para toda $f(t)$. Uma tal função deve necessariamente ser nula quando $t \neq 0$, logo ser localizada na origem, e no mesmo tempo deve ter um integral diferente de zero, coisa claramente impossível. Seja como for, a identidade (4.14) diz que uma função contínua $f(t)$ pode ser representadas como uma sobreposição de deltas de Dirac $\delta(t-s)$ pesadas com os valores $f(s)$ da própria função. A (4.15) diz que a função de Green $g(t-s)$ é a resposta do sistema a uma força $\delta(t-s)$ localizada no ponto s . Consequentemente, a fórmula

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)f(s)ds \quad (4.16)$$

para a resposta do sistema, ou seja, uma solução da equação diferencial ordinária não homogênea (4.12), é uma manifestação do princípio de sobreposição: a resposta a uma sobreposição de forças é uma sobreposição das respostas às singulas forças.

Pode ser útil ter uma ideia menos abstrata/algébrica da delta de Dirac ...

Delta de Dirac discreta. Para um engenheiro, um sinal contínuo $f(t)$ pode ser substituído, sem grande perda de informação, por um sinal discreto $f[n]$, com $n \in \mathbb{Z}$ (por exemplo, observando o sinal original em tempos $t = n\tau$ múltiplos de um passo τ suficientemente pequeno). O *pulso unitário* é o sinal unitário localizado no tempo $n = 0$, ou seja,

$$\delta[n] := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Então é tautológico que todo sinal $f[n]$ pode ser representado como

$$f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta[n-k]f[k]$$

ou seja, como sobreposição de pulsos unitários $\delta[n-k]$ pesados com os valores $f[k]$. Esta é claramente uma versão discreta da (4.14) que faz todo o sentido matemático (pois a soma é de facto finita, sendo diferente de zero apenas um termo). Moral: num mundo discreto, a delta de Dirac é um objeto muito simples e compreensível. Esta ideia é importante na teoria do tratamento dos sinais digitais ...

Densidades, identidades aproximadas e delta de Dirac. De volta ao contínuo, o contexto natural para introduzir a delta de Dirac é o das “densidades”. Uma função real integrável $p(x)$ descreve uma “distribuição” de massas ou de cargas na reta real. O que é observável não são os valores $p(x)$ da densidade em particulares pontos x , mas apenas a massa/carga total contida num intervalo não trivial $[a, b]$, definida pelo integral

$$\int_a^b p(x) dx$$

ou, mais em geral, os valores médios

$$\langle p, f \rangle := \int_a^b p(x) f(x) dx$$

de funções integráveis $f(x)$, por exemplo contínuas, pensadas como observáveis. É claro que a correspondência $f \mapsto \langle p, f \rangle$ é linear. Se $p(x) \geq 0$ e o integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx$ é finito e igual a 1, então a densidade descreve uma distribuição de probabilidade na reta. Os integrais

$$\text{Prob}(\xi \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx$$

podem ser então interpretados como probabilidades de uma “variável aleatória” ξ ser observada no intervalo $[a, b]$. O integral impróprio $P(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy$ é então chamado “função distribuição acumulada”. A sua derivada, se existir, é a densidade $P'(x) = p(x)$.

Uma *identidade aproximada* é uma família de densidades $\delta_\varepsilon(t)$, dependendo de um parâmetro positivo ε , que satisfaz as seguintes condições (que podem ser enfraquecidas, mas não é importante):

IA1 são não-negativas, ou seja, $\delta_\varepsilon(t) \geq 0$ para todo t ;

IA2 o suporte de $\delta_\varepsilon(t)$ é contido no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, ou seja, $\delta_\varepsilon(t) = 0$ se $|t| > \varepsilon$;

IA3 as funções $\delta_\varepsilon(t)$ são integráveis, e têm toda integral unitário, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$$

Fisicamente, uma identidade aproximada com ε muito pequeno pode ser pensada como uma massa unitária concentrada num intervalo pequeno em torno da origem.

Uma “massa unitária concentrada na origem”, a famosa delta de Dirac $\delta(x)$, é então um limite da densidade $\delta_\varepsilon(x)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Isto significa que o valor médio/integral de uma função de prova contínua $f(x)$ é, por definição,

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx$$

Se ε é suficientemente pequeno, então os valores de $f(s)$ no suporte de $\delta_\varepsilon(s)$ não diferem muito de $f(0)$, pela continuidade da função. Consequentemente,

Teorema 4.2. *Seja $\delta_\varepsilon(x)$ uma identidade aproximada. Se $f(x)$ é uma função contínua, então*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(s) f(s) ds = f(0)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon'' > 0$. Pela continuidade de $f(x)$ na origem, existe um $\varepsilon' > 0$ tal que se $|x| \leq \varepsilon'$ então $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon''$. Então se $\varepsilon \leq \varepsilon'$, sendo $\delta_\varepsilon(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| f(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx \right| &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) |f(0) - f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon'' \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \varepsilon'' \end{aligned}$$

A arbitrariedade de $\varepsilon'' > 0$ implica o resultado. □

Um as mudanças de variáveis nos integrais que definem os valores médios permitem verificar as seguintes covariâncias por translações e homotetias. A primeira observação é que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-a) f(s) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(s-a) f(s) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(u) f(u+a) du = f(a)\end{aligned}$$

assim que a densidade $\delta_a(t) := \delta(t-a)$ representa uma massa unitária concentrada no ponto a . Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-s) f(s) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(-s) f(s) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\infty}^{-\infty} \delta_{\varepsilon}(u) f(-u) d(-u) = f(0)\end{aligned}$$

assim que $\delta(t)$ deve ser considerada uma “função” par. Também interessante é observar que, se $\lambda > 0$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda s) f(s) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) f(t/\lambda) dt / \lambda = \lambda^{-1} f(0)$$

e portanto que $\delta(t)$ deve ser considerada uma “função” homogênea de grau -1 , pois satisfaz $\delta(\lambda s) = \lambda^{-1} \delta(s)$.

Distribuições. As funções de Green satisfazem a equação diferencial $Lg = \delta$, logo devem poder ser derivadas em algum sentido. Como é possível? Se $g(t)$ é uma densidade derivável, e $f(t)$ uma função de prova com suporte compacto e também derivável, então uma integração por partes diz que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) f(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f'(t) dt$$

pois $f(t)$ se anula em $\pm\infty$. Isto sugere “definir” a derivada da densidade g como sendo a densidade Dg tal que o seu valor sobre uma função de prova $f(t)$ é

$$\langle Dg, f \rangle := - \langle g, Df \rangle$$

Ao fim de poder definir derivadas de ordem arbitrário, logo operadores diferenciais de ordem arbitrariamente grande, temos que considerar funções de prova que sejam infinitamente deriváveis e com suporte compacto. O espaço de tais funções é denotado por $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ ou também por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. As *distribuições*, ou *funções generalizadas* são então funcionais lineares $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (e Laurent Schwartz escolheu este nome para lembrar que representam, pelo menos nas ideias originais de Green, “distribuições de cargas ou dipolos elétricos”). A notação $\langle T, f \rangle$ diz então que este número é o valor do funcional T sobre a função de prova f .

A verdade é que o dual algébrico de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ é demasiado grande. Os matemáticos então definem uma “topologia” em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ou seja, uma noção de convergência, e finalmente definem o espaço das *distribuições* como sendo o espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Nesta introdução informal, podemos prescindir de qualquer definição rigorosa de distribuição. A final, o que procuramos são fórmulas integrais do género (4.16) que resolvam algumas EDOs interessantes. Uma vez descobertas, de uma forma ou de outra, podem sempre ser verificada por meios elementares.

A ideia de Green começa a ser não trivial e importante quando aplicada a equações diferenciais parciais como a equação de Poisson (o caso tratado pelo próprio Green), das ondas, de Klein-Gordon, ... Podem também queres saber que são funções de Green os propagadores da teoria dos campos relativística ... No entanto, tem piada calcular as funções de Green dos operadores que correspondem às EDOs elementares tratadas nestas notas.

e.g. Função salto unitário e função de Green da derivada. O operador diferencial mais simples é o operador derivação D . Uma função de Green de D resolve então $Dg = \delta$. A função *salto unitário* é definida por

$$\Theta(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

e define a distribuição

$$\langle \Theta, f \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt$$

Uma integração por parte mostra que a sua derivada é

$$\langle D\Theta, f \rangle = -\langle \Theta, Df \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) f'(t) dt = -\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(0)$$

E portanto, $D\Theta = \delta$. Consequentemente, uma solução da equação diferencial $\dot{x}(t) = f(t)$ é, como esperado,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

ex: Verifique que uma função de Green do operador $D + \beta$ é

$$g(t) = e^{-\beta t} \Theta(t)$$

Consequentemente, uma solução particular da equação diferencial $\dot{x} = -\beta x + f(t)$ (que descreve, por exemplo se $\beta > 0$, um decaimento radioativo com taxa de reposição variável) é

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} f(s) ds$$

e.g. Função de Green do laplaciano na reta. O laplaciano em dimensão um é o operador diferencial D^2 . A função $g(t) = t \Theta(t)$ define uma distribuição que satisfaz

$$\begin{aligned} \langle D^2 g, f \rangle &= \langle g, D^2 f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t \Theta(t) f''(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t f''(t) dt = -\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(0) \end{aligned}$$

ou seja, $D^2 g = \delta$. A equação diferencial $\ddot{x}(t) = f(t)$ descreve a trajetória de uma partícula num referencial inercial sujeita a uma força variável $f(t)$. Uma sua solução é portanto

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-s) \theta(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t (t-s) f(s) ds} \quad (4.17)$$

e.g. Resposta de um oscilador harmónico. Consideramos um oscilador forçado $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$. Uma função de Green do operador $L = D^2 + \omega^2$ é

$$g(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Theta(t)$$

onde $\Theta(t)$ é a função salto unitário. De facto, se $f(t)$ é uma função de prova,

$$\begin{aligned} \langle (D^2 + \omega^2)g, f \rangle &= \langle g, (D^2 + \omega^2)f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Theta(t) (f''(t) + \omega^2 f(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) (f''(t) + \omega^2 f(t)) dt = -\int_0^{\infty} \cos(\omega t) f'(t) dt + \int_0^{\infty} \omega \sin(\omega t) f(t) dt \\ &= [-\cos(\omega t) f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \omega \sin(\omega t) f(t) dt + \int_0^{\infty} \omega \sin(\omega t) f(t) dt \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Consequentemente, a resposta de um oscilador harmónico de frequência ω a uma força $f(t)$ pode ser representada pela fórmula integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds \quad (4.18)$$

uma “convolução” da função $\sin(\omega t)$ com a força $f(t)$. Esta fórmula pode ser verificada a posteriori com um cálculo elementar (cuidado, o tempo t aparece nos limite de integração mas também na função dentro do integral!).

ex: Considere um oscilador amortecido e forçado $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$ com atrito pequeno, ou seja, $\alpha^2 < \omega^2$. Verifique que uma função de Green do operador $L = D^2 + 2\alpha D + \omega^2$ é

$$g(t) = \frac{1}{\Omega} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t) \Theta(t)$$

onde $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. Consequentemente, a resposta do sistema é

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\Omega} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\Omega(t-s)) f(s) ds \quad (4.19)$$

ex: Calcule o limite da solução (4.18) quando $\omega \rightarrow 0$, e deduza a (4.17)

ex: Verifique e que uma solução particular da equação $\ddot{x} - k^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(s) \sinh(k(t-s)) ds.$$

(pode fazer uma rotação de Wick na fórmula (4.18), ou calcular uma função de Green do operador $D^2 - k^2$).

ex: Verifique que todas estas fórmulas (4.17), (4.18), (4.19), ... podem ser obtidas também usando o método da variação das constantes, logo a (4.11).

Referências

- [Ah78] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985. [*Ordinary Differential Equations*, Springer, 1992]
- [Ar87] V.I. Arnold, *Métodos matemáticos da mecânica clássica*, MIR, 1987. [*Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989]
- [Ar04] V.I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS, 2004.
- [Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989. [*Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1988]
- [Aro14] D. Arovas, *Lecture Notes on Classical Mechanics*, 2014.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Bi80] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, MIR, 1980.
- [Bl08] S.M. Blinder, *Guide to Essential Math, a review for Physics, Chemistry and Engineering Students*, Elsevier, 2008.
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].
- [Fe63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Fo92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Society, 1992.
- [GdF87] D. Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1987.
- [Ha69] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1969.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [KKR62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics Course, Vol. 1 - Mechanics*, McGraw-Hill, 1962.
- [Io05] V. Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.
- [MH99] J.E. Marsden and M.J. Hoffmann, *Basic complex analysis*, W.H. Freeman, 1999.
- [MW85] J.E. Marsden and A. Weinstein, *Calculus I & II*, Springer, 1985.
- [Na06] P.J. Nahin, *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*, Princeton University Press, 2006.
- [O'N99] P.V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1999.
- [Pi91] M.A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.

- [PPZ17] M. Petrini, G. Pradisi and A. Zaffaroni, *A Guide to Mathematical Methods for Physicists, with Problems and Solutions*, World Scientific, 2017.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2006.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [RS80] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Si91] G. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, 1991.
- [SG04] M. Stone and P. Goldbart, *Mathematics for Physics*, Cambridge University Press, 2004.
- [SS03] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis I, Princeton University Press, 2003.
- [St08] W. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2nd ed, Wiley, 2008.
- [TS81] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*, MIR, 1981.
- [Tr13] W.F. Trench, *Elementary Differential Equations*, 2013. Books and Monographs. Book 8.
<http://digitalcommons.trinity.edu/mono/8>

Índice

- aceleração, 8
- argumento, 54
 - principal, 54
- batimentos, 76
- braquistócrona, 32
- campo
 - completo, 17
 - de direções, 14
 - de forças, 8
- catenária, 38
- circunferência
 - unitária, 52
- condição
 - inicial, 15
- conjugação, 51
- constantes do movimento, 19
- curva de ressonância, 79
- curva integral, 14
- delta de Dirac, 83
- determinante
 - Wronskiano, 61
- discriminante, 53
- distribuição, 85
- energia, 9
- equação
 - de Newton, 8
- equação diferencial
 - autônoma, 16, 33
 - de Bernoulli, 48
 - equidimensional, 67
 - homogênea de segunda ordem, 62
 - homogênea, 45
 - linear de primeira ordem, 45
 - linear de segunda ordem, 71
 - ordinária, 14
 - separável, 40
- espaço
 - de fases, 14
- exponencial, 10
- fórmula
 - de Euler, 57
- factor integrante, 43
- fluxo
 - de fase, 17
- força
 - de Coriolis, 59
- fórmula
 - de de Moivre, 56
 - de Euclides, 53
 - de Euler, 54
- identidade
 - aproximada, 84
 - de Diofanto, 53
- impedência, 80
- inteiro gaussiano, 53
- método
 - de Euler, 26
 - de Runge-Kutta, 29
 - dos coeficientes indeterminados, 73
- módulo, 52
- mapa
 - de Picard, 24
- momento linear, 8
- número complexo, 49
- observável, 19
- oscilador
 - amortecido, 69
 - forçado, 76
 - forçado amortecido, 78
 - harmônico, 68
- parte imaginária, 51
- parte real, 51
- pêndulo matemático, 22
- período, 16
- polinómio, 53
- polinómio caraterístico, 64
- polinómios de Chebyshev, 56
- ponto regular, 33
- ponto singular, 16, 33
- princípio
 - das contrações, 24
 - de sobreposição, 72
- problema de valores iniciais, 15
- produto
 - direto de ODEs, 40
- quase-polinómio, 73
- raízes da unidade, 55
- raiz, 53
- reatância, 80
- repametrização, 17
- representação polar, 54
- ressonância, 77
- solução
 - estacionária, 16, 33
 - global, 14
 - local, 14
 - maximal, 14
 - periódica, 16

teorema

de Peano, 15

de Picard-Lindelöf, 15, 25

terno pitagórico, 53

tractrix, 39

valor absoluto, 52

velocidade, 8