

1. (2 valores) Descreva em termos de intervalos o conjunto dos pontos x tais que

$$|x - 1|^2 \geq 2.$$

$$(-\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, \infty).$$

2. (2 valores) A altura de uma pedra que cai de uma falésia é

$$x(t) = 150 - 2t - 4.9t^2$$

metros, onde o tempo t é medido em segundos. Calcule a velocidade e a aceleração no instante $t = 3$ segundos.

$$\dot{x}(3) = -31.4 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \ddot{x}(3) = -9.8 \text{ m/s}^2.$$

3. (2 valores) Calcule a derivada de

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. (2 valores) Se

$$x^2 + y^2 = 3,$$

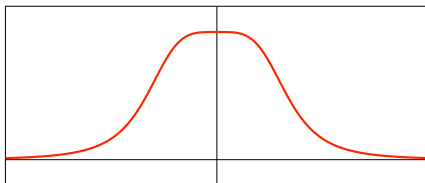
calcule a derivada dy/dx quando $x = 0$ e $y = \sqrt{3}$.

Numa vizinhança do ponto $(0, \sqrt{3})$ a circunferência $x^2 + y^2 = 3$ é o gráfico de $y = \sqrt{3 - x^2}$. O ponto $x = 0$ é um máximo local desta função, de consequência

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0.$$

5. (2 valores) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^4}.$$



6. (2 valores) Determine o perímetro mínimo dos retângulos de área 1.

Se x e y são os comprimentos da base e da altura do retângulo, respetivamente, então a área é $A = xy = 1$. Portanto o perímetro é $P = 2(x + y) = 2(x + 1/x)$. O único ponto crítico de $P(x) = 2(x + 1/x)$ é $x = 1$ (pois $P'(x) = 2(1 - 1/x^2)$ e os comprimentos não podem ser negativos), e é um mínimo porque $P''(1) = 4 > 0$. De consequência, o perímetro mínimo é

$$P(1) = 4.$$

7. (2 valores) Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$.

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

8. (2 valores) Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 2}{x^4} dx \qquad \int_0^\pi \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(2\theta) \right) d\theta.$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 2}{x^4} dx = \left. -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3x^3} \right|_1^2 = \frac{11}{6}.$$

$$\int_0^\pi (\sin(\theta/2) + \sin(2\theta)) d\theta = \left. -2 \cos(\theta/2) - \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right|_0^\pi = 2.$$

9. (2 valores) Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas

$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \qquad \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \qquad \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx = 2 \arcsin(x/3).$$

10. (2 valores) Determine a posição $x(2)$ de uma partícula no instante $t = 2$ sabendo que a velocidade é $v(t) = t^2 - \sqrt{t}$ e que a posição inicial é $x(0) = 1$.

$$x(1) = x(0) + \int_0^2 (t^2 - \sqrt{t}) dt = 1 + \frac{8}{3} - \frac{2}{3} 2^{3/2}.$$

1. (2 valores) Seja

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ t & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ -1 & \text{se } 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Calcule $\int_{-1}^3 f(t) dt$.

$$\int_{-1}^3 f(t) dt = 3.$$

2. (2 valores) Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas

$$\int \frac{dx}{x \ln(x)} \qquad \int x e^x dx$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) \qquad \int x e^{-x} dx = (x-1)e^x$$

3. (2 valores) Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx \qquad \int_1^2 x \ln(x) dx$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx = 1 \qquad \int_1^2 x \ln(x) dx = 2 \ln(2) - 3/4$$

4. (2 valores) Determine a solução da equação diferencial do oscilador harmónico

$$\ddot{x} + 9x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

$$x(t) = \frac{1}{3} \sin(3t).$$

5. (2 valores) Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

com condição inicial $y(1) = 1$.

Separando as variáveis temos que $dy/y^2 = dx$, e portanto $-1/y = x + c$. Sendo a condição inicial $y(1) = 1$, a solução é

$$y(x) = \frac{1}{2-x}$$

6. (2 valores) Calcule o volume do sólido de revolução obtido por uma rotação em torno ao eixo x da região do plano x - y limitada pelo gráfico da função $y = \cos(2x)$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq \pi/4$.

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x) dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. (2 valores) Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3x}{x^3} = -9/2.$$

8. (2 valores) Calcule o integral impróprio

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2} dx = 3.$$

9. (2 valores) Calcule o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n}{(n^2 - 2)/(n^2 + 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n}{(n^2 - 2)/(n^2 + 1)} = 2.$$

10. (2 valores) Calcule a soma da série

$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots = 7/6.$$