6/11/2019 1º teste	Cálculo	☐ ☐	ENGFIS FIS

Nome ....**N**º ....

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Use a aproximação linear para determinar um valor aproximado de

$$\sqrt{4.0001}\,.$$

$$\sqrt{4.0001} \simeq \sqrt{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0.0001 = 2.000025\,.$$

2. *(2 valores)* Calcule as derivadas de

$$f(x) = \log\sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(\theta) = \sin(\cos\theta)\,.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \qquad \text{e} \qquad g'(\theta) = -\sin\theta\,\cos(\cos\theta)\,.$$

3. *(2 valores)* Determine uma equação da reta tangente à curva definida implicitamente pela equação $2x^2 + 2xy + y^2 = 8$ quando $x = 2$ e $y = 0$.

Numa vizinhaça de um ponto onde a equação define uma função $y = f(x)$, a derivada satisfaz

$$4x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0\,, \qquad \text{e portanto} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+y}$$

Em particular, se $x = 2$ e $y = 0$ a derivada vale $dy/dx = -2$. Então uma equação da reta tangente à curva no ponto $(2, 0)$ é

$$y = 4 - 2x\,.$$

4. *(2 valores)* O volume de uma gota de chuva esférica cresce a uma taxa proporcional à superfície. Mostre que a taxa de crescimento do raio da gota é constante.

Seja $r(t)$ o raio da gota, função do tempo t. O volume e a superfície são $V = (4/3)\pi r^3$ e $S = 4\pi r^2$, respetivamente. Se $\dot{V} = kS$, com k constante, então $4\pi r^2\dot{r} = k4\pi r^2$, e portanto $\dot{r} = k$.

5. *(2 valores)* Uma caixa com base quadrada tem um volume de 648 cm^3. O material das faces superior e inferior custa, por cada cm^2, três vezes o preço do material usado para as outras faces. Determine as dimensões da caixa que minimizam o custo total.

Se x denota o lado da base quadrada, e h denota a altura da caixa, então $x^2h = 648$. Se $p > 0$ denota o preço por cm^2 do material usado para as 4 faces laterais, então o preço total da caixa é

$$P = (3\,p)\cdot(2\,x^2) + p\cdot(4\,xh) = p\,(6\,x^2 + 2592/x)\,.$$

O ponto crítico de $P(x)$ é a raiz (positiva) de $P'(x) = p\,(12x - 2592/x^2) = 0$, ou seja, $x = \sqrt[3]{216} = 6$, e é claro que este ponto é um mínimo, pois $P(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ ou quando $x \to 0$. Portanto, as dimensões que minimizam o custo total da caixa são $x = 6$ cm e $h = 18$ cm.

6. *(2 valores)* Calcule a derivada $F'(1)$ da função

$$F(t) = \int_{t^2}^{0} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

$$F'(t) = -\frac{2t}{1+t^4}$$

Em particular, $F'(1) = -1$.

7. *(2 valores)* Calcule uma (apenas uma) das seguntes primitivas:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad\qquad \int \frac{t^2+t+2}{t}\,dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dx = -\sqrt{1-x^2} \qquad\qquad \int \frac{t^2+t+2}{t}\,dt = \frac{t^2}{2} + t + 2\log t\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais:

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\,\sin\theta\,d\theta \qquad\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\,dx\,.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\,\sin\theta\,d\theta = 0 \qquad\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\,dx = \log\sqrt{3}\,.$$

9. *(2 valores)* As parábolas $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ e $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ dividem o plano em cinco regiões, apenas uma das quais limitada. Calcule a área da região limitada.

A área da região limitada é igual ao integral

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{8}{3}\,.$$

10. *(2 valores)* Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos x com velocidade $v(t) = 1 + 2t$. Determine a posição $x(1)$ da partícula no instante $t = 1$, sabendo que a posição inicial é $x(0) = 1$.

A trajetória da partícula é

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)\,ds = 1 + t + t^2$$

Em particular, $x(1) = 3$.

8/1/2020 2º teste	Cálculo	☐ ☐	ENGFIS FIS

Nome ....**N**^{o} ....

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta \qquad\qquad \int x\,\log x\,dx$$

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \log|\sin\theta| \qquad\qquad \int x\,\log x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2\log x - \frac{1}{4}\,x^2\,.$$

2. *(2 valores)* Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx \qquad\qquad \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$$

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = 1 \qquad\qquad \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

3. *(2 valores)* A corrente $I(t)$ num circuito RC satisfaz a equação diferencial $\dot{I} + 2I = 3$. Determine a corrente assimptótica $\lim_{t\to\infty} I(t)$ sabendo que a corrente inicial é $I(0) = 0$.

A corrente é

$$I(t) = \frac{3}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)\,.$$

Em particular,

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 3/2\,.$$

4. *(2 valores)* Determine a solução $x(t)$ da equação diferencial $\ddot{x} + 9x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -2$.

$$x(t) = \cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t)\,.$$

5. *(2 valores)* Determine (sem calcular) um integral que represente o comprimento do gráfico de $y = x^3$ entre os pontos $x = 0$ e $x = 1$.

$$\int_0^2 \sqrt{1+9x^4}\,dx\,.$$

6. *(2 valores)* Esboce e calcule o volume do sólido de revolução obtido por uma rotação em torno ao eixo y da região do plano x-y limitada pelo gráfico da função $y = \sqrt{4-4x^2}$ e o eixo x no intervalo $0 \le x \le 1$.

$$2\pi\int_0^1 x\,\sqrt{4-4x^2}\,dx = \frac{4}{3}\,\pi\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - 3x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - 3x}{x^3} = -\frac{9}{2}\,.$$

8. *(2 valores)* Determine e justifique a convergência ou a divergência do integral impróprio

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}\,dx$$

O integral impróprio é convergente, pois

$$\frac{e^{-x}}{1+x} \leq e^{-x}$$

se $x \geq 0$, e

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\,.$$

9. *(2 valores)* Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{7}{2}$$

10. *(2 valores)* Determine e justifique a convergência ou a divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\,3^n}{n!}$$

É convergente, pelo teste da razão, pois

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0\,.$$