14/11/2018 1^o teste	Cálculo	☐ ENGFIS ☐ FIS

Nome ....**N**^{o} ....

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Use a aproximação linear para determinar um valor aproximado de

$$\sqrt{8.97}\,.$$

$$\sqrt{8.97} \simeq \sqrt{9} - \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0.03 = 2.995\,.$$

2. *(2 valores)* Determine uma equação da reta tangente à curva paramétrica

$$x = t^2 + 1 \qquad y = \frac{1}{t^4+1}$$

em $t = 2$.

As velocidades são $dx/dt = 2t$ e $dy/dt = -4t^3/(t^4+1)^2$, e de consequência

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4t^2}{2(t^4+1)^2}\,.$$

Em particular, no instante $t = 2$, $x = 5$, $y = 1/17$ e $dy/dx = -8/17^2$. Uma equação cartesiana da reta tangente à curva é

$$y = \frac{1}{17} - \frac{8}{17^2} \cdot (x-5)\,.$$

3. *(2 valores)* Calcule a derivada de

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}\,.$$

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,.$$

4. *(2 valores)* Se

$$x^4 + y^2 + y - 3 = 0\,,$$

calcule a derivada dy/dx quando $x = 1$ e $y = 1$.

Derivando em ordem a x a equação cartesiana da curva, temos

$$4x^3 + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0\,,$$

e portanto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3}{2y+1}\,.$$

Em particular, se $x = 1$ e $y = 1$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}\,.$$

5. *(2 valores)* Se $f'(x) = x^2$ e $f(1) = 0$, quanto vale $f(x)$?

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 1\right)\,.$$

6. *(2 valores)* Determine o ponto do arco de parábola $y = x^2$, com $0 \le x \le 1$, mais próximo do ponto $(0, 1)$ (sugestão: considere o quadrado da distância).

O quadrado da distância entre o ponto $(0, 1)$ e o ponto (x, x^2) do arco de parábola é

$$f(x) = x^2 + (x^2 - 1)^2 \,.$$

A derivada é $f'(x) = 2x(2x^2 - 1)$. Os pontos críticos no intervalo $0 \le x \le 1$ são 0 e $1/\sqrt{2}$. Nestes pontos, a derivada segunda $f''(x) = 12x^2 - 2$ vale $f''(0) = -2$ e $f''(1/\sqrt{2}) = 4$. De consequência $1/\sqrt{2}$ é o único mínimo local, onde o quadrado da distância vale $f(1/\sqrt{2}) = 3/4$. Sendo $f(1) = f(0) = 1 > 3/4$, o ponto mais próximo é o ponto $(1/\sqrt{2}, 1/2)$.

7. *(2 valores)* Calcule a derivada de

$$F(t) = \int_0^{t^2} \frac{dx}{1 + x^2} \,.$$

$$F'(x) = \frac{2t}{1 + t^4}$$

8. *(2 valores)* Calcule uma (apenas uma) das seguntes primitivas:

$$\int \sqrt{x-1}\, dx \qquad\qquad \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

$$\int \sqrt{x-1}\, dx = \frac{2}{3}\,(x-1)^{3/2} \qquad\qquad \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \frac{1}{1-x} \,.$$

9. *(2 valores)* Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais:

$$\int_1^2 (1+2t)^5\, dt \qquad\qquad \int_1^8 \frac{1+\theta^2}{\theta^4}\, d\theta \,.$$

$$\int_1^2 (1+2t)^5\, dt = \frac{1}{12}(1+2t)^6 \Big|_1^2 = \frac{5^6 - 3^6}{12} \qquad\qquad \int_1^8 \frac{1+\theta^2}{\theta^4}\, d\theta = -\frac{1}{3\theta^3} - \frac{1}{\theta}\Big|_1^8 = \frac{-2\cdot 8^3 + 3\cdot 8^2 + 1}{3\cdot 8^3} \,.$$

10. *(2 valores)* As curvas $y = x^3$ e $y = x$ dividem o plano em seis regiões, duas das quais limitadas. Calcule as áreas das regiões limitadas.

As áreas das duas regiões limitadas são iguais ao integral

$$\int_0^1 \left(x - x^3\right) dx = \frac{1}{4} \,.$$

10/1/2019 2º teste	Cálculo	☐ ENGFIS ☐ FIS

Nome ....**Nº** ....

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Seja $y = x^3 + 2$. Calcule dx/dy quando $y = 3$.

   $y = 3$ quando $x = 1$, portanto
   $$\frac{dx}{dy}(3) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(1)} = \frac{1}{3}\,.$$

2. *(2 valores)* Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas
   $$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx \qquad\qquad \int x\,\sin(2x)\,dx$$

   $$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\tan^{-1}(x/2) \qquad\qquad \int x\,\sin(2x)\,dx = \frac{1}{4}\,\sin(2x) - \frac{1}{2}\,x\cos(2x)$$

3. *(2 valores)* Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais
   $$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\sin(x^2)\,dx \qquad\qquad \int_1^3 \ln(x^3)\,dx$$

   $$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\sin(x^2)\,dx = \int_0^{\pi} \sin(t)\,\frac{dt}{2} = 1 \qquad\qquad \int_1^3 \ln(x^3)\,dx = 3\int_1^3 \ln x\,dx = 3\,\left(x\ln x - x\right)|_1^3 = \ln 3^9 - 6$$

4. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = t^3\,x^2$ com condição inicial $x(0) = 1$.

   Separando as variáveis, temos que
   $$\int \frac{dx}{x^2} = \int t^3\,dt \qquad \text{e portanto} \qquad -1/x = t^4/4 + C\,.$$
   A condição inicial $x(0) = 1$ implica que $C = -1$, logo
   $$x(t) = \frac{4}{4-t^4}\,.$$

5. *(2 valores)* Esboce e calcule o volume do sólido de revolução obtido por uma rotação em torno ao eixo x da região do plano x-y limitada pelo gráfico da função $y = \cos(x) + 1$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

   $$\text{Volume} = \pi\int_0^{2\pi} (1+\cos x)^2\,dx = 3\pi^2\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule o limite
   $$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)^2}{x^2}$$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\cos x)^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1\,.$$

7. *(2 valores)* Determine e justifique a convergência ou a divergência do integral impróprio

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{1+\ln x}\,dx$$

O integra impróprio converge, pois

$$\frac{e^{-x}}{1+\ln x} \le e^{-x}$$

se $x \ge 1$, e o integral impróprio

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}\,dx = e^{-1}$$

converge.

8. *(2 valores)* Calcule o limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sin n)^2}{n+2}$$

O valor absoluto de $(\sin n)^2/(n+1)$ é limitado por $1/(n+2)$, portanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sin n)^2}{n+2} = 0\,.$$

9. *(2 valores)* Determine e justifique a convergência ou a divergência da série

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{2^n}$$

A série converge, pois, pelos critério da razão,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\,\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

10. *(2 valores)* Determine o raio de convergência da série de potências

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\dots$$

O raio de convergência é $R=1$, pois

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1\,.$$