

NomeN^o

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.

1. (2 valores) Determine uma equação da reta tangente à curva paramétrica

$$x = \sin t e^{-t} \quad y = \cos t e^{-t}$$

em $t = \pi/2$.

As velocidades são $dx/dt = (\cos t - \sin t) e^{-t}$ e $dy/dt = -(\sin t + \cos t) e^{-t}$, e de consequência

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}.$$

No instante $t = \pi/2$, $x = e^{-\pi/2}$, $y = 0$ e $dy/dx = 1$, e uma equação cartesiana da reta tangente à curva é

$$y = x - e^{-\pi/2}.$$

2. (2 valores) Os lados de um retângulo variam mantendo constante a área de 25 metros quadrados. Determine a taxa de variação de um lado em ordem ao outro quando o retângulo é um quadrado.

Sejam x e y os comprimentos dos dois lados do retângulo. Se $xy = 25$, então $y + x \frac{dy}{dx} = 0$. Quando $x = y = 5$ (quadrado) temos que

$$\frac{dy}{dx} = -1.$$

3. (2 valores) Seja $y = x^3 + x$. Calcule dx/dy quando $y = 2$.

$y = 2$ quando $x = 1$, portanto

$$\frac{dx}{dy}(2) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(1)} = \frac{1}{4}.$$

4. (2 valores) Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas

$$\int \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} d\theta \quad \int \log x dx$$

$$\int \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} d\theta = \log |1 + \sin \theta| \quad \int \log x dx = x \log x - x$$

5. (2 valores) Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais

$$\int_0^\pi \theta \cos \theta d\theta \quad \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^\pi \theta \cos \theta d\theta = -2 \quad \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx = 0$$

6. (2 valores) Determine a solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = -2x + 10$ com condição inicial $x(0) = 10$.

Separando as variáveis, temos que

$$\int \frac{dx}{x-5} = -2 \int dt \quad \text{e portanto} \quad |x-5| = C e^{-2t}.$$

A condição inicial $x(0) = 10$ implica que $C = 5$, logo

$$x(t) = 5 + 5 e^{-2t}.$$

7. (2 valores) Esboce e calcule o volume do sólido de revolução obtido por uma rotação em torno ao eixo y da região do plano x - y limitada pelo gráfico da função $y = \cos(x)$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$.

$$\text{Volume} = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \pi^2 - 2\pi.$$

8. (2 valores) Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3x}{x^3} = -\frac{9}{2}.$$

9. (2 valores) Determine e justifique a convergência ou a divergência do integral impróprio

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + e^x} \, dx$$

O integral impróprio converge, pois

$$\frac{x}{1 + e^x} \leq x e^{-x}$$

se $x \geq 0$, e o integral impróprio

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} \, dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-x} \, dx = 1$$

converge.

10. (2 valores) Determine o raio de convergência e o valor quando $x = 1/2$ da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

O raio de convergência é $R = \infty$, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = 0.$$

O valor da série quando $x = 1/2$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$