09/11/2017 1º teste	Cálculo EC	FIS MIENGFIS

1. *(2 valores)* Descreva em termos de intervalos o conjunto dos pontos x tais que

$$(2x+1)(x-5) \leq 0\,.$$

$$[-1/2\,,\,5]\,.$$

2. *(2 valores)* Use a aproximação linear para determinar um valor aproximado de

$$\sqrt{16.016}\,.$$

$$\sqrt{16.016} \simeq \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0.016 = 4.002\,.$$

3. *(2 valores)* Determine uma equação da reta tangente à curva paramétrica

$$x = t^2 \qquad y = t^3$$

em $t = 5$.

$dx/dt = 2t$ e $dy/dt = 3t^2$, portanto $dy/dx = \frac{3}{2}t$. Em particular, no instante $t = 5$, $x = 25$, $y = 125$ e $dy/dx = 7.5$. Uma equação cartesiana da reta tangente à curva é

$$y = 125 + 7.5 \cdot (x - 25)\,.$$

4. *(2 valores)* Calcule a derivada de

$$f(x) = e^{x\sin(x)}\,.$$

$$f'(x) = (\sin(x) + x\cos(x))\; e^{x\sin(x)}\,.$$

5. *(2 valores)* Se

$$x^2 + y^2 + xy^3 = 1\,,$$

calcule a derivada dy/dx quando $x = 0$ e $y = 1$.

Derivando em ordem a x a equação cartesiana da curva,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

e portanto

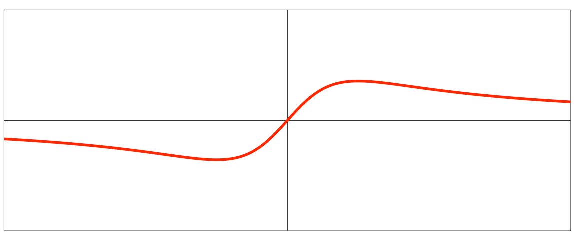
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y^3}{2y + 3xy^2}\,.$$

Em particular, se $x = 0$ e $y = 1$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\,.$$

6. *(2 valores)* Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}\,.$$



7. *(2 valores)* Determine a área máxima de um triângulo isósceles quando o comprimento dos dois lados iguais é $\ell = 10$ cm.

Se θ é a metade do aĝngulo entre os lados iguais, então a área do triângulo é $A(\theta) = \ell^2 \sin\theta \cos\theta$. O ponto crítico é $\sin\theta = \cos\theta = 1/\sqrt{2}$, e é um máximo. Portanto, a área máxima é

$$\ell^2/2 = 50 \quad \mathrm{cm}^2 .$$

8. *(2 valores)* Calcule a derivada de

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{t} .$$

$$F'(x) = \frac{2}{x}$$

9. *(2 valores)* Calcule uma (apenas uma) das seguntes primitivas:

$$\int \frac{3}{1+x^2}\, dx \qquad\qquad \int 3^x\, dx$$

$$\int \frac{3}{1+x^2}\, dx = 3\,\tan^{-1}(x) \qquad\qquad \int 3^x\, dx = \frac{3^x}{\ln 3} .$$

10. *(2 valores)* Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais:

$$\int_{10}^{9} \frac{x+1}{x^3}\, dx \qquad\qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx .$$

$$\int_{10}^{9} \frac{x+1}{x^3}\, dx = \left.\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right|_9^{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{200} - \frac{1}{9} - \frac{1}{162}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \sin^{-1}(x/2)\Big|_{-1}^{1} = \pi/3 .$$

15/01/2018 2^o teste	Cálculo EC	FIS MIENGFIS

1. *(2 valores)* Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx \qquad\qquad \int \log(x)\, dx$$

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx = -e^{1/x} \qquad\qquad \int \log(x)\, dx = x\,\log x - x$$

2. *(2 valores)* Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais

$$\int_0^1 x\, e^x\, dx \qquad\qquad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, \cos(x)\, dx$$

$$\int_0^1 x\, e^x\, dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = 1 \qquad\qquad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x\bigg|_0^{\pi/2} = 1/2$$

3. *(2 valores)* A corrente $I(t)$ num circuito RC alimentado com tensão constante E satisfaz a equação diferencial

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E$$

Calcule a solução $I(t)$ quando a corrente inicial é $I(0) = 0$.

A solução de equilíbrio é $I = EC$. A diferença $x(t) = I(t) - EC$ satisfaz a equação diferencial

$$R\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{C}x\,,$$

cuja solução é $x(t) = x(0)\, e^{-t/RC}$. Portanto, sendo a condição inicial $I(0) = x(0) + EC = 0$,

$$I(t) = EC\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

4. *(2 valores)* Calcule o volume do sólido de revolução obtido por uma rotação em torno ao eixo y da região do plano x-y limitada pelo gráfico da função $y = x^2$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

O volume é

$$V = \int_0^1 2\pi x \cdot x^2\, dx = \pi/2\,.$$

5. *(2 valores)* Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0} x\, \cot(x) =$$

$$\lim_{x\to 0} x\, \cot(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

6. *(2 valores)* Determine e justifique a convergência ou a divergência do integral impróprio

$$\int_1^\infty \frac{dx}{3+x^3}$$

É convergente, pois, se x é positivo,

$$\frac{1}{3+x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

e o integral impróprio

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^M = 1/2$$

é convergente

7. *(2 valores)* Calcule o comprimento da curva $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, com t entre 0 e $\pi/2$.

O comprimento da curva é

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\,e^t\,dt = \sqrt{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)$$

8. *(2 valores)* Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n+3^n}{6^n}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n+3^n}{6^n}. = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^\infty (1/3)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty (1/2)^n = \frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2} = 3/2$$

9. *(2 valores)* Determine e justifique a convergência ou a divergência da série

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,(\log n)^{2/3}}$$

É divergente, pois é comparável com o integral impróprio divergente

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\,(\log x)^{2/3}} = \lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{dx}{x\,(\log x)^{2/3}} = \lim_{M\to\infty} 3\,(\log x)^{1/3}\bigg|_2^M = \infty$$

10. *(2 valores)* Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n^n}\,x^n$$

O raio de convergência é ∞, pois, sendo os coeficientes $a_n = 2^n/n^n$,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$