24/01/2018 recurso	Cálculo EC	FIS MIENGFIS

1. *(2 valores)* Calcule o limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = \infty$$

2. *(2 valores)* Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ no ponto onde $x = 1$.

   A derivada de f no ponto $x = 1$ é $f'(1) = 10$. Sendo $f(1) = 9$, uma equação cartesiana da reta é
$$y = 10\,(x-1) + 9\,.$$

3. *(2 valores)* Determine o ponto do arco de parábola $y = x^2$ com $0 \leq x \leq 1$ mais próximo do ponto $(0, 1)$ (sugestão: minimize o quadrado da distância).

   O quadrado da distância entre o ponto (x, x^2) e $(0, 1)$ é
$$f(x) = x^2 + (x^2 - 1)^2\,,$$
   cuja derivada é $f'(x) = 4x\,(x^2 - 1/2)$. Os pontos críticos de f no intervalo $[0, 1]$ são 0 e $1/\sqrt{2}$. Sendo $f(0) = f(1) = 1$ e $f(1/\sqrt{2}) = 3/4$, o ponto mais próximo é o ponto $(1/\sqrt{2}, 1/2)$.

4. *(2 valores)* Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções
$$f(x) = x^4 + 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1/x^2$$
   no intervalo $[1, 2]$.
$$\int_1^2 (x^4 + 1 - 1/x^2)\,dx = \left.\frac{x^5}{5} + x + \frac{1}{x}\right|_1^2 = 67/10$$

5. *(2 valores)* Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas
$$\int x\,\sin x\,dx \qquad\qquad \int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$$

$$\int x\,\sin x\,dx = \sin x - x\,\cos x \qquad\qquad \int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+3}$$

6. *(2 valores)* Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais
$$\int_0^\pi (\cos x)^2\,\sin x\,dx \qquad\qquad \int_1^2 x^2\,\ln x\,dx$$

$$\int_0^\pi (\cos x)^2\,\sin x\,dx = -\left.\frac{(\cos x)^3}{3}\right|_0^\pi = 2/3 \qquad\qquad \int_1^2 x^2\,\ln x\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right|_1^2 = (8/3)\ln 2 - 7/9$$

7. *(2 valores)* A velocidade $v(t)$ de um corpo que cai satisfaz a equação diferencial
$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$
   onde $m > 0$ é a massa, $g > 0$ a aceleração gravitacional, e $\gamma > 0$ um coeficiente de atrito. Calcule a solução $v(t)$ quando a velocidade inicial é $v(0) = 0$.

   A solução de equilíbrio é $v = mg/\gamma$. A diferença $w(t) = v(t) - mg/\gamma$ satisfaz a equação diferencial
$$m\frac{dw}{dt} = -\,\gamma\,w\,,$$
   cuja solução é $w(t) = w(0)\,e^{-\gamma t}$. Portanto, sendo a condição inicial $v(0) = w(0) + mg/\gamma = 0$,
$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule o volume do sólido de revolução obtido por uma rotação em torno ao eixo y da região do plano x-y limitada pelo gráfico da função $y = x$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 2$. O volume é

$$V = \int_0^2 2\pi x \cdot x \, dx = 16\pi/3 \, .$$

9. *(2 valores)* Teste a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

É convergente, sendo uma série geométrica de razão $1/e < 1$, e

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1} \, .$$

10. *(2 valores)* Determine o raio de convergência da série de potências

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots$$

O raio de convergência é 1, pois, sendo os coeficientes $a_n = 1/(n+1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \, .$$