21/11/2007 1ºteste	Análise matemática	BQ, Q

Nome .... **N**^{o} .... **Curso** ....

Escolha um exercício de cada página (ou seja, Na ou Nb com $N = 1, 2, 3, , 4$) e responda, em Português.
É permitido o uso das folhas práticas da disciplina.

1a *(5 valores)* Considere a equação recursiva

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3\,.$$

Determine a solução estacionária e o limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ da solução com condição inicial $x_0 = 1000$.

A solução estacionária é $\overline{x} = 6$, pois

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\overline{x} + 3 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} = 6\,,$$

e o limite da solução com condição inicial $x_0 = 1000$ é $\lim_{n\to\infty} x_n = 6$, pois

$$x_n = \frac{1}{2^n}\left(1000 - \overline{x}\right) + \overline{x} \qquad \text{se} \qquad x_0 = 1000\,,$$

e $1/2^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

1b *(5 valores)* Calcule

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots$$

A soma da série é 1/3, pois

$$0.3333... = \frac{3}{10}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-1/10} = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

2a *(5 valores)* Calcule a derivada e esboce o gráfico da função

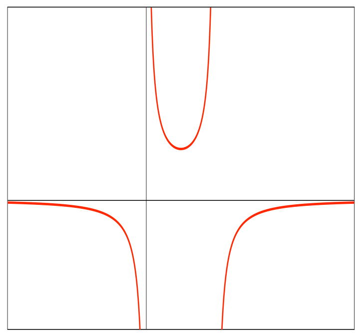
$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

definida para $x \neq 0,\ 1$.

A derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \qquad\qquad x \neq 0, 1$$

e o gráfico de $f(x)$ é



2b *(5 valores)* Calcule a derivada e esboce o gráfico da função

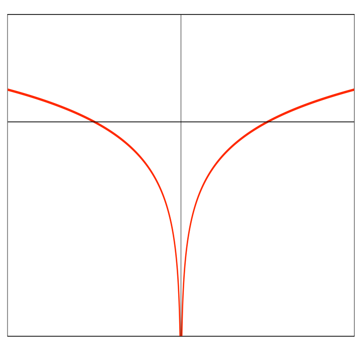
$$f(x) = \log\left(x^2\right)$$

definida para $x \neq 0$.

A derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = \frac{2}{x} \qquad\qquad x \neq 0$$

e o gráfico de $f(x)$ é



3a *(5 valores)* Estime um valor de

$$\sqrt{3.999}$$

Uma aproximação de $\sqrt{3.999}$ é 1.99975, pois

$$\sqrt{3.999} = \sqrt{4 - 0.001} \simeq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0.001) = 2 - 0.00025 = 1.99975\,.$$

3b *(5 valores)* Uma partícula é deslocada ao longo de uma recta com velocidade

$$v(t) = q'(t) = t - \cos(t)$$

Determine a posição $q(t)$ da partícula no tempo $t = \pi$ sabendo que a sua posição inicial é $q(0) = 1$.

A trajectória da partícula é

$$q(t) = q(0) + \int_0^t v(t)dt = 1 + \frac{t^2}{2} - \sin(t)\,,$$

portanto a posição da partícula no tempo $t = \pi$ é

$$q(\pi) = 1 + \frac{\pi^2}{2}\,.$$

4a *(5 valores)* Calcule um dos seguintes integrais

$$\int_{-2}^{2} |x| dx \qquad \int_{0}^{\log 1} x e^{x^2} dx \qquad \int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad \int_{e}^{e^2} \log(x) dx$$

$$\int_{-2}^{2} |x| dx = 2 \int_{0}^{2} x dx = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\int_{0}^{\log 1} x e^{x^2} dx = \int_{0}^{0} x e^{x^2} dx = 0$$

$$\int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{1}^{3/4} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_{3/4}^{1} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}]_{3/4}^{1} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_{e}^{e^2} \log(x) dx = x \log(x)]_{e}^{e^2} - \int_{e}^{e^2} dx = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

4b *(5 valores)* Calcule a derivada de

$$F(x) = \int_{0}^{\sin(x)} e^{t^2} dt$$

A derivada de $F(x)$ é

$$F'(x) = e^{\sin^2(x)} \cos(x) \,.$$

30/01/2008 2^{o}teste	Análise matemática	BQ, Q

Nome .... **N^o** .... **Curso** ....

Escolha um exercício de cada página (ou seja, Na ou Nb com $N = 1, 2, 3$ e 4) e responda, em Português. É permitido o uso das folhas práticas da disciplina.

1a *(5 valores)* Determine a solução de uma das equações diferenciais

$$\dot{x} = x(1-x) \qquad \text{ou} \qquad \dot{x} + tx = t \qquad \text{ou} \qquad \dot{x} = -3x + 7\,,$$

com condição inicial $x(0) = 0$, esboce o seu gráfico e determine $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

A solução de $\dot{x} = x(1-x)$ com condição inicial $x(0) = 0$ é a solução estacionária

$$x(t) = 0\,.$$

Em particular, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

A solução de $\dot{x} + tx = t$ com condição inicial $x(0) = 0$ é

$$x(t) = 1 - e^{-t^2/2}\,.$$

Em particular, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$.

A solução de $\dot{x} = -3x + 7$ com condição inicial $x(0) = 0$ é

$$x(t) = \frac{7}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)\,.$$

Em particular, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 7/3$.

1b *(5 valores)* Uma chávena de café, com temperatura inicial de $T(0) = 100^o$C, é colocada numa sala cuja temperatura é $M = 20^o$C. Segundo a lei do arrefecimento de Newton,

$$\dot{T} = -k(T - M) \qquad \text{onde } k > 0\,.$$

Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

A solução de $\dot{T} = -k(T - M)$ é

$$T(t) - M = e^{-kt}\left(T(0) - M\right)\,.$$

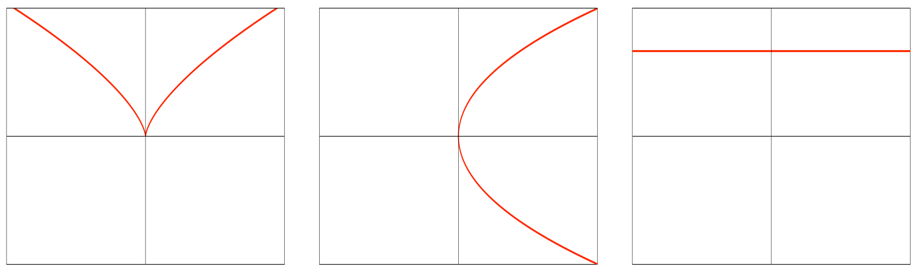
Portanto, se $T(0) - M = 80^o$C e $T(10) - M = 40^o$C, a constante é $k = \frac{\log 2}{10}$ min^{-1}, e o café atinge a temperatura de 40^oC em 20 minutos.

2a *(5 valores)* Considere o caminho

$$\vec{r}(t) = \left(t^3, t^2\right) \qquad \text{com } t \in \mathbf{R}\,.$$

Calcule a velocidade $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ e a aceleração $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$, e esboce as três curvas.

A velocidade é $\vec{v}(t) = (3t^2, 2t)$ e a aceleração é $\vec{a}(t) = (6t, 2)$. As curvas $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ são



2b *(5 valores)* Considere o campo escalar $f(\vec{r}) = \|\vec{r}\|^2$, ou seja,

$$f(x, y) = x^2 + y^2\,,$$

definido no plano $\mathbf{R}^2$. Calcule a derivada direccional de f no ponto $\vec{r} = (2, 4)$ na direcção do vector $\vec{v} = (1, 2)$. Dado o caminho $\vec{r}(t) = (t, 2t)$, calcule a derivada de $f(\vec{r}(t))$ em ordem a t no tempo $t = 2$.

O gradiente de f é $\vec{\nabla} f(\vec{r}) = 2\vec{r}$, portanto, se $\vec{r} = (2, 4)$ e $\vec{v} = (1, 2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{r}) = \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{r}), \vec{v} \right\rangle = \langle 2 \cdot (2, 4), (1, 2)\rangle = 20\,.$$

A velocidade do caminho $\vec{r}(t) = (t, 2t)$ é $\vec{v}(t) = (1, 2)$, e o gradiente de f no ponto $\vec{r}(2) = (2, 4)$ é $\vec{\nabla} f(\vec{r}(2)) = 2 \cdot (2, 4) = (4, 8)$, portanto

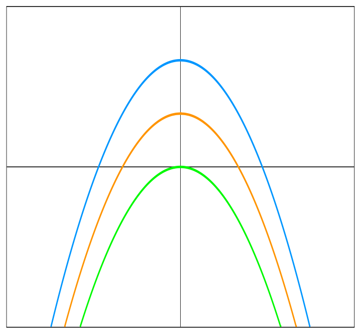
$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)), \vec{v}(t) \right\rangle = \langle (4, 8), (1, 2)\rangle = 20\,.$$

3a *(5 valores)* Considere o campo escalar

$$f(x,y) = 1 - y - x^2$$

Esboce as curvas de nível 0 e ± 1, e determine a recta normal e a recta tangente à curva de nível no ponto $\vec{r} = (1,1)$.

As curvas de nível 0 e ± 1 são



O gradiente de f no ponto $\vec{r} = (1,1)$ é $\vec{\nabla} f(1,1) = (-2,-1)$, portanto a recta normal à curva de nível no ponto $\vec{r}$ é

$$t \mapsto (1-2t, 1-t) \qquad \text{ou seja,} \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,,$$

e a recta tangente à curva de nível no ponto $\vec{r}$ é

$$0 = \langle (-2,-1), (x-1, y-1) \rangle \qquad \text{ou seja,} \qquad y = -2x + 3\,.$$

3b *(5 valores)* Calcule o volume do sólido limitado pelos planos coordenados, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, e pelo plano $x + y + z = 1$.

O volume é dado pelo integral duplo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx \\
&= -\left[\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 \\
&= 1/6
\end{aligned}$$

4a *(5 valores)* Esboce a região de integração e calcule um dos seguintes integrais duplos:

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dy dx \qquad \text{ou} \qquad \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dx dy \,.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dy dx &= \int_0^1 \int_0^y e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 y e^{-y^2} dx \\ &= \frac{1}{2}(1 - 1/e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3) dy dx \\ &= \int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx \\ &= \frac{1}{3}(1 - \cos(1)) \end{aligned}$$

4b *(5 valores)* Considere o sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

Determine as soluções estacionárias, e mostre que a função

$$H(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma constante do movimento.

As soluções estacionárias são as soluções do sistema

$$\begin{aligned} 0 &= ax - bxy \\ 0 &= -cy + dxy \end{aligned}$$

ou seja, $(0, 0)$ e $(c/d, a/b)$. A derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= (d - c/x)\dot{x} + (b - a/y)\dot{y} \\ &= (d - c/x)(ax - bxy) + (b - a/y)(-cy + dx) \\ &= 0 \,, \end{aligned}$$

logo H é constante.