Análise Matemática - Folhas práticas
BQ e Q 2007/08

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática, Universidade do Minho,
Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, PORTUGAL
gab B.4023, tel 253 604086
e-mail scosentino@math.uminho.pt
url w3.math.uminho.pt

8 de Fevereiro de 2008

Conteúdo

1 Problemas e modelos elementares **2**

2 Modelos discretos e iteração **4**

3 Cálculo diferencial e aplicações **8**

4 Área, integral e métodos de integração **11**

5 Equações diferenciais ordinárias **16**

6 Modelos contínuos **18**

7 Curvas e campos escalares **22**

8 Derivadas de campos escalares **24**

9 Integrais duplos **26**

10 Aproximação e análise qualitativa de modelos discretos **28**

11 Simulações e sistemas de EDOs **30**

1 Problemas e modelos elementares

1. (progressão e série geométrica) Uma *progressão geométrica* de "razão" λ é uma sequência

$$a \qquad a\lambda \qquad a\lambda^2 \qquad a\lambda^3 \qquad ... \qquad a\lambda^n \qquad a\lambda^{n+1} \qquad ...$$

obtida do termo inicial $x_0 = a$ usando a recursão $x_{n+1} = \lambda x_n$. A identidade

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n)(\lambda - 1) = \lambda^{n+1} - 1$$

mostra que, se $\lambda \neq 1$, a soma dos primeiros $n+1$ termos da progressão geométrica (com $a = 1$) é

$$\boxed{1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}}$$

Em particular, quando $|\lambda| < 1$, a *série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ é convergente, e a sua soma é

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n + ... = \frac{1}{1-\lambda}}$$

- Diga se a seguintes séries são convergentes, e, se for o caso, calcule a soma.

$$1+1/2+1/4+1/8+1/16+... \qquad 1+10+100+1000+... \qquad 1+1/10+1/100+1/1000+...$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4/5)^n \qquad 9/10+9/100+9/1000+... \qquad 0.3333...$$

2. (duplicação de células) As experiências mostram que a população de uma colónia de bactérias, num período de tempo em que podemos considerar ilimitado o nutrimento e desprezáveis as toxinas produzidas, duplica-se em cada hora.

   - Se a população inicial é de 1000 células, determine a população passadas 2, 3, 10 horas.
   - Quantas horas devo esperar para ver 1024 bactérias a partir de uma única célula inicial?
   - Escreva uma fórmula para P_n, a população no tempo n horas, dada uma população inicial P_0.

3. (invenção do xadrez). Dizem que Sissa inventou o jogo do xadrez e o ofreceu ao rei de Pérsia. Ao rei, que o convidou a escolher uma recompensa, pediu um grão de arroz para o primeiro quadrado do tabuleiro, o dobro, ou seja, dois grãos, para o segundo quadrado, o dobro, ou seja, quatro grãos, pelo terceiro quadrado, e assim a seguir até o último dos quadrados do tabuleiro.

   - Quanto grãos de arroz o rei teve que pagar?
   - Se 1 Kg de arroz contém à volta de 30000 grãos, quantas toneladas de arroz foram necessárias ao rei para pagar o seu jogo?

4. (tempo de meia-vida) O decaimento de uma substância radioactiva pode ser caracterizado pelo "tempo de meia-vida" τ, passado o qual aproximadamente metade dos núcleos inicialmente presentes terá decaido. Portanto, se Q_n denota a quantidade de substância radioactiva presente no instante $n\tau$, , com n inteiro, então

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2} Q_n \, .$$

   - Determine Q_n em função da quantidade inicial Q_0.
   - Determine P_n, a quantidade de producto do decaimento no instante $n\tau$.
   - Passado quanto tempo a substância radioactiva fica reduzida a $\frac{1}{32}$-ésimo da quantidade inicial?
   - O tempo de meia-vida do radiocarbono ^{14}C é $\tau \simeq 5730$ anos ($^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + e^- + \overline{\nu}_e$). Mostre como "datar" um fóssil, sabendo que a proporção de ^{14}C num ser vivente é fixa e conhecida.[1]

5. (Inflação e juros) A taxa de inflação e os juros costumam ser definidos em base anual. Por exemplo, se a inflação é de $\alpha\%$, então o preço p_n de um artigo no n-ésimo ano segue a lei

$$p_{n+1} = p_n \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \, .$$

[1] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

- Um café custa hoje 50 cêntimos de euro. Se a taxa de inflação se mantiver constante e igual a 2%, quanto custará um café no ano 2017?
- O meu banco paga juros de 0.20% nos depósitos dos seus clientes. Se eu depositar 10000 euros neste banco, quanto recebo passado um ano, dois anos, ..., n anos?
- O mesmo banco cobra juros de 9.75% nos empréstimos. Se eu pedir 10000 euros emprestados, e quiser pagar 100 euros cada mês, quantos anos demoro?

6. (crescimento exponencial) O crescimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado com a equação recursiva

$$P_{n+1} = \lambda P_n$$

onde P_n representa a população no tempo n, dada uma certa população inicial P_0.

- Interprete o parâmetro λ imaginando que em cada unidade de tempo o incremento $P_{n+1} - P_n$ da população é a soma de uma parcela αP_n, onde $\alpha > 0$ é um coeficiênte de fertilidade, e uma parcela $-\beta P_n$, onde $\beta > 0$ é um coeficiênte de mortalidade.
- Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro λ.

7. (sequência de Fibonacci) Considere o seguinte problema, posto por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci, ou seja, "filius Bonacci")[2]:

> *Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?*

A resposta de Leonardo Pisano consiste no seguinte modelo. Se F_n o número de pares de coelhos no n-ésimo mês, então

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,.$$

Esta é uma "lei" que prescreve recursivamente os valores dos F_n dados uns valores iniciais F_0 e F_1.

- Responda ao problema de Fibonacci, ou seja, determine F_{12}, sabendo que $F_0 = 1$ e $F_1 = 2$.
- Escreva um programa para calcular recursivamente os "números de Fibonacci" F_n.
- Seja $Q_n = F_{n+1}/F_n$ o quociente entre sucessivos números de Fibonacci. Mostre que os quocientes satisfazem a equação recursiva

$$Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

- Assuma que, para grande valores de n, os quocientes são praticamente constantes, ou seja, $Q_n \to \Phi$ se $n \to \infty$. Utilize a a equação recursiva para mostrar que

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803398874989...$$

- Mostre que o resultado anterior implica a lei assimptótica $F_{n+1} \simeq \Phi F_n$. Reconhece-a?

8. (crescimento com recolha ou adição) A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade β em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde β é um parâmetro positivo ou negativo.

- Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n.
- Determine a solução com condição inicial P_0 arbitrária.
- Para quais valores dos parâmetros λ e β as soluções P_n convergem para a solução estacionária quando o tempo $n \to \infty$?

[2] Leonardo Pisano, *Liber Abaci*, 1202.

2 Modelos discretos e iteração

1. (modelos discretos e análise gráfica) Um sistema dinâmico com tempo discreto é definido por uma equação/lei recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$

onde x_n denota o *estado* (posição, população, concentração, temperatura, ...) do sistema no tempo n (segundos, horas, meses, anos, ...). As *trajectórias* do sistema dinâmico são as sucessões (x_n),

$$x_0 \mapsto x_1 = f(x_0) \mapsto x_2 = f(x_1) \mapsto \ldots \mapsto x_{n+1} = f(x_n) \mapsto \ldots\,,$$

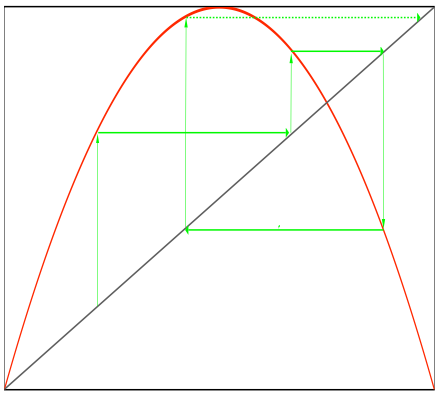
definidas a partir de uma *condição inicial* x_0 usando a recursão $x_{n+1} = f(x_n)$.

As *soluções estacionárias*, ou *de equilíbrio*, são as trajectórias constantes $x_n = \overline{x}$, onde o *estado estacionário*, ou *de equilíbrio*, $\overline{x}$ é um "ponto fixo" da transformação f, ou seja, um ponto tal que

$$f(\overline{x}) = \overline{x}\,.$$

As *soluções periódicas* são as trajectórias (x_n) tais que $x_{n+p} = x_n$ para todos os n e algum tempo $p \geq 1$, dito *periódo*.

Se o espaço dos estados é um intervalo da recta real, as trajectórias podem ser observadas no plano x-y esboçando o caminho poligonal (*cobweb plot*)



$$(x_0, x_0) \mapsto (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \ldots$$

entre o gráfico da transformação, $y = f(x)$, e a diagonal, $y = x$.

- Estude as trajectórias (ou seja, determine os estados de equilíbrio, as trajectórias periódicas, e o comportamento assimptótico de algumas das outras trajectórias) dos sistemas dinâmicos definidos pelas seguintes transformações

$$f(x) = \frac{1}{3}x \qquad f(x) = 7x \qquad f(x) = -x$$

$$f(x) = 3x + 1 \qquad f(x) = 2x - 7 \qquad f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$f(x) = |1 - x| \qquad f(x) = x^2 - \frac{1}{4} \qquad f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) = x^3 \qquad f(x) = -x^3 \qquad f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x) = x - x^3 \qquad f(x) = x + x^3$$

- Mostre que, se uma trajectória (x_n) do sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$ é convergente e se a transformação f é contínua, então o limite $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ é um estado estacionário, ou seja, $f(x_\infty) = x_\infty$.

2. (transformação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é

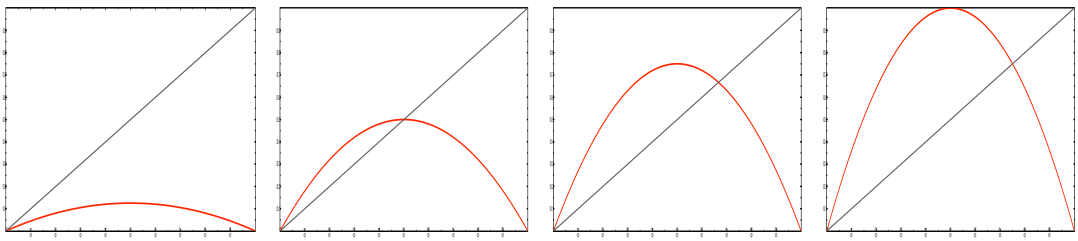
$$P_{n+1} = \lambda P_n \, (1 - P_n/M)$$

onde a contante $M > 0$ é a maior população suportada pelo meio ambiente (observe que $P_{n+1} < 0$ quando $P_n > M$, o que pode ser interpretado como "extinção" no tempo $n+1$). A substituição $x_n = P_n/M$ transforma a lei acima na forma adimensional

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \, ,$$

chamada *transformação logística*[3].

- Esboce o gráfico da transformação logística para diferentes valores do parâmetro λ.



Gráficos da transformação logística quando $\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

- Mostre que os ponto estacionários são o estado trivial 0 e

$$\overline{x} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- Implemente um programa para fazer simulações do sistema.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $0 < \lambda \leq 1$.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $1 < \lambda \leq 3$.
- Observe os fenómenos que acontecem ao variar o parâmetro λ entre 3 e 4.
- O que acontece quando $\lambda > 4$?

3. (equilíbrio de Hardy-Weinberg) Considere a transmissão hereditária de um gene com dois alelos, A e a. Sejam x_0, y_0 e z_0 as frequências dos genótipos AA, Aa e aa, respectivamente, numa dada população inicial. Então as probabilidade de ter o alelo A ou a na formação de um gameta são

$$p_0 = x_0 + \frac{1}{2} y_0 \qquad \text{e} \qquad q_0 = 1 - p_0 = z_0 + \frac{1}{2} y_0 \, ,$$

respectivamente. Na fecundação, teremos os genótipos AA, Aa e aa com probabilidades p_0^2, $2p_0q_0$ e q_0^2, respectivamente. Portanto, na primeira geração, as frequências dos três genótipos serão

$$x_1 = p_0^2 \, , \qquad y_1 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_1 = q_0^2 \, .$$

- Calcule as probabilidades

$$p_1 = x_1 + \frac{1}{2} y_1 \qquad \text{e} \qquad q_1 = z_1 + \frac{1}{2} y_1$$

de ter os alelos A ou a na formação de um gameta na primeira geração, e mostre que as frequências dos três genótipos na segunda geração serão

$$x_2 = p_0^2 \, , \qquad y_2 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_2 = q_0^2 \, .$$

Ou seja, a distribuição dos três genótipos atinge um valor estacionário a partir da primeira geração (*Hardy-Weinberg equilibrium/principle/law*[4])

[3] Robert M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459-467.

[4] G.H. Hardy, Mendelian proportions in a mixed population, *Science* **28** (1908), 49-50. W. Weinberg, Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen, *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Neturkunde in Württemberg* **64** (1908), 368-382.

4. (selecção natural, modelo de Fisher, Wright e Haldane) Um modelo simples de selecção natural, proposto por Ronald Fisher, Sewall Wright e J.B.S. Haldane em 1930[5], considera apenas um gene com dois alelos, A e a. A vantagem ou desvantagem competitiva dos diferentes genótipos, AA, Aa e aa, é modelada por coeficientes de "sucesso biológico" (*fitness*), ϕ_{AA}, ϕ_{Aa} e ϕ_{aa}, que determinam as diferentes taxas de sobrevivência, e portanto de reprodução. Sejam $0 \leq p_n \leq 1$ e $q_n = 1 - p_n$ as frequências dos alelos A e a, respectivamente, na n-ésima geração. Então a frequência do alelo A na $(n+1)$-ésima geração é dada por

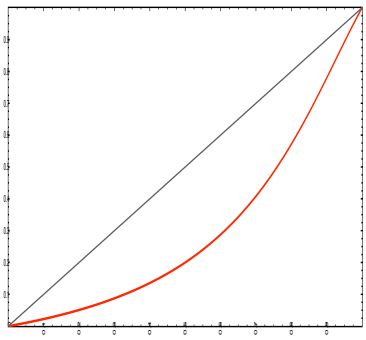
$$p_{n+1} = \frac{(1+\alpha)p_n^2 + p_n q_n}{(1+\alpha)p_n^2 + 2p_n q_n + (1+\beta)q_n^2}$$

onde $(1+\alpha) = \phi_{AA}/\phi_{Aa}$ e $(1+\beta) = \phi_{aa}/\phi_{Aa}$ (e portanto $-1 < \alpha$ e $-1 < \beta$).

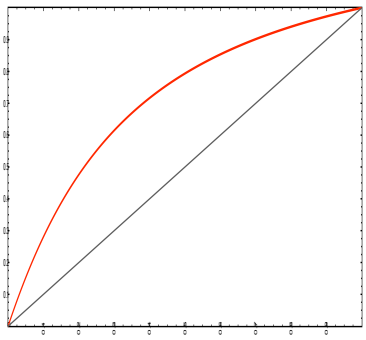
- Esboce a transformação para diferentes valores de α e β. Observe que soluções estacionárias são as soluções triviais 0 e 1, e, quando α e β têm o mesmo sinal,

$$\overline{p} = \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\,.$$

- Discuta o comportamento assimptótico da frequência p_n quando α e β têm sinais opostos. Mostre que na população assimptótica apenas sobrevive o alelo favorecido.

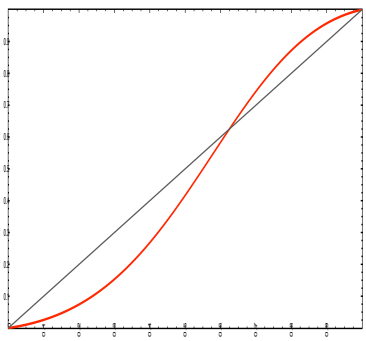


$\alpha < 0 < \beta$

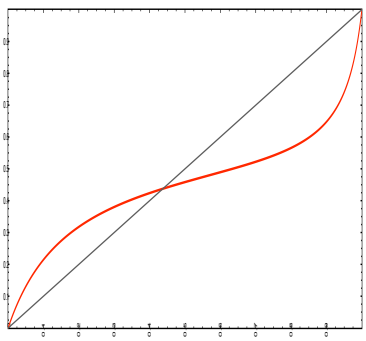


$\beta < 0 < \alpha$

- Mostre que, quando $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ (ou seja, os genótipos AA e aa têm uma vantagem competitiva em relação ao genótipo Aa), o estado estacionário $\overline{p}$ é instável, e pequenas perturbações $x_0 = \overline{p} \pm \varepsilon$ do equilíbrio produzem comportamentos assimptóticos diferentes, a extinção de A ou a extinção de a, dependendo do sinal (*disruptive selection*).
- Mostre que, quando $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ (ou seja, o genótipo Aa é o favorecido), o estado estacionário $\overline{p}$ é estável, e portanto os dois alelos convivem na população assimptótica (*heterosis*).



Disruptive selection: $0 < \alpha < \beta$.



Heterosis: $\alpha < \beta < 0$.

[5]R.A. Fisher, *Genetical Theory of Natural Selection*, Clarendon 1930. S. Wright, Evolution in Mendelian populations, *Genetics* **16** (1931), 97-159. J.B.S. Haldane, A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection (1924-1934).

5. (solução analítica do problema de Fibonacci) Considere a equação às diferenças finitas

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \, .$$

- Faça a conjectura $x_n = \lambda^n$, substitua a conjectura na equação, e determine os dois possíveis valores de λ, baptizando-os λ_+ e λ_-.
- Sendo a equação linear, também uma combinação linear

$$x_n = c_+ \lambda_+^n + c_- \lambda_-^n \, ,$$

com $c_\pm$ constantes, é solução. Determine os valores dos parâmetros $c_\pm$ de maneira tal que $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$.

6. (modelos discreto presas-predadores) Um modelo discreto de um sistema presas-predadores é

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha x_n - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} &= -\gamma y_n + \delta x_n y_n \end{aligned}$$

e outro modelo é

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n (1 - x_n) - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} &= \delta x_n y_n \end{aligned}$$

Nos dois casos, x_n e y_n são as populações relativas das presas e dos predadores, respectivamente, no tempo n, e as letras gregas são parâmetros.

- Discuta o significado dos parâmetros dos modelos, e as diferenças entre os dois modelos.
- Determine os pontos estacionários.
- Simule as soluções dos sistemas ao variar os parâmetros.

3 Cálculo diferencial e aplicações

1. (movimento rectilíneo uniforme) A lei do movimento rectilíneo uniforme num referencial inercial é

$$x(t) = x_0 + v_0 t\,,$$

onde $x(t)$ denota a posição no tempo t, v_0 a velocidade e x_0 a posição inicial.

- Determine a velocidade média no intervalo de tempos entre t e $t+\varepsilon$, e a velocidade instantânea no tempo t.
- Determine a lei horária de uma partícula que viaja com velocidade de 3 m/s e que no instante $t = 10$ s está na posição $x = 10$ m. Quando estava na origem?

2. (Aquiles e a tartaruga) Aquiles começa a correr com velocidade de 1 m/s em direcção de uma tartaruga que a sua vez foge com velocidade de 0.1 m/s. A distância inicial entre Aquiles e a tartaruga é de 100 m.

- Determine quanto tempo demora Aquiles a percorrer $1/2$, $1/2 + 1/4$, $1/2 + 1/4 + 1/8$, ..., da distância inicial, e passado quanto tempo chega ao ponto onde estava inicialmente a tartaruga.
- Determine a distância $d(t)$ entre Aquiles e a tartaruga no tempo t.
- Aquiles alcança a tartaruga? Se sim, em quanto tempo?

3. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela lei horária

$$r(t) = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,,$$

onde $r(t)$ é a altura no tempo t, r_0 é a altura inicial,v_0 é velocidade inicial, e $g \simeq 980$ cm/s^2 é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre.

- Determine a velocidade média no intervalo de tempos entre t e $t+\varepsilon$, e a velocidade instantânea no tempo t.
- Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem $\simeq 56$ metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo, o tempo necessário para a pedra atingir o chão e a sua velocidade no instante do impacto.
- Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
- Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

4. (derivada) A *derivada* da função $f(x)$ no ponto x é o limite

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}}$$

Ou seja, se f tem derivada no ponto x, então vale a aproximação linear

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = f'(x) \cdot \varepsilon + r(\varepsilon)$$

onde o "resto" $r(\varepsilon)$ é tal que $\frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

A notação de Leibniz para a derivada f' é $\frac{df}{dx}$, ou $\frac{d}{dx} f$, ou $\frac{dy}{dx}$ se $y = f(x)$.

A derivada segunda de f é a derivada da derivada, ou seja, $f'' = (f')'$, ...

- Calcule as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde existem.

$$f(x) = 2x - 3 \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x) = |x| \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

5. (derivadas elementares e regras) Derivadas elementares são

$$\boxed{\frac{d}{dx}\text{constante} = 0\,, \qquad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\,, \qquad \frac{d}{dx}x^{1/n} = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}\,, \qquad \sin' = \cos\,, \qquad \cos' = -\sin}$$

A derivada é linear, ou seja

$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \qquad (f+g)' = f' + g'}$$

e satisfaz as regras (regra de Leibniz e derivação de um quociente)

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'\,, \qquad (f/g)' = \tfrac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{nos pontos onde } g \neq 0}$$

- Calcule a derivada $f'(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde podem ser definidas.

$$f(x) = 3x \qquad f(x) = x\sin(x) \qquad f(x) = 17$$
$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = x^{-1} - x^{5/3}$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^3+2} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

- Calcule as derivadas $P'(0)$, $P''(0)$, $P'''(0)$, ..., $P^{(n)}(0)$, $P^{(n+1)}(0)$, de um polinómio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\,.$$

6. (aproximação linear) Estime os seguintes valores, usando a aproximação linear

$$\boxed{f(x+\varepsilon) \simeq f(x) + f'(x)\cdot\varepsilon}$$

$$\sin(0.01) \qquad \sqrt{1.1} \qquad \cos(\pi - 0.03) \qquad \frac{1}{1+0.001}$$

7. (derivação de função composta: regra da cadeia) A derivada da função composta $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ é

$$\boxed{(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)\,.}$$

- Calcule a derivada $f'(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde podem ser definidas.

$$f(x) = \cos(x^2) \qquad f(x) = \sqrt{2x-1} \qquad f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$$
$$f(x) = (\sin(x))^2 \qquad f(x) = \sin(\cos(x^3)) \qquad f(x) = \frac{\cos(2x) - x}{\sqrt{x}}$$

8. (Derivação de função inversa) Se $h(y)$ é a função inversa de $f(x)$, ou seja, $h(f(x)) = x$ e $f(h(y)) = y$, então

$$\boxed{h'(y) = 1/f'(h(y))}$$

- Calcue as derivadas das seguintes funções nos pontos onde podem ser definidas.

$$f(x) = \arcsin(x) \qquad f(x) = \arccos(x) \qquad f(x) = \arctan(x)$$

- Calcule a derivada da função inversa de $f(x) = x + x^3$ no ponto $y = 0$.

9. (taxas de variação) Determine a taxa de variação

- $\frac{dA}{dr}$, onde A é a área de uma circunferência e r o seu raio,
- $\frac{dV}{dr}$, onde V é o volume de uma bola e r o seu raio,
- $\frac{dV}{d\ell}$, onde V é o volume de um cubo e ℓ o seu lado.

10. (vida e morte de um cacto) Um cacto tem forma esférica. Cresce absorvendo material através da sua superfície, a uma taxa $v = 0.1$ gr/s·cm^2.

    - Determine a taxa de crescimento do raio r do cacto, na hipótese em que a sua densidade $\rho = 4$ gr/cm^3 é constante. Deduza a lei horária $r(t)$ sabendo que $r(0) = 2$ cm.
    - Passado quanto tempo o cacto duplica o seu volume?

    Em condições óptimas, um cacto adulto contém 0.9 gr/cm^3 de agua, e morre quando a água disponível é menor de 0.09 gr/cm^3. Num período seco, o cacto adulto perde água através da superfície, a uma taxa $p = 0.001$ gr/s.

    - Determine quanto tempo vive um cacto de raio $r = 10$ cm durante uma seca.
    - Um cacto menor sobrevive mais?

11. (teorema e desigualdade do valor médio) O *teorema do valor médio* diz que se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, e diferenciável no seu interior (a, b), então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)\,.}$$

    Em particular, se $|f'(c)| \leq \lambda$ para todo o $c \in (a, b)$, então vale a desigualdade

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq \lambda \cdot |b - a|\,.}$$

    - Mostre que, se $f(x)$ é um polinómio de segundo grau, então a recta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é paralela à recta tangente ao gráfico de f no ponto médio $\frac{a+b}{2}$.
    - Mostre que para todos os x e y

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

    - Mostre que para todos $0 < y \leq x$

$$ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$$

12. (estudo de funções, máximos e mínimos) Uma função diferenciável $f(x)$ é crescente nos intervalos onde $f'(x) > 0$, decrescente nos intervalos onde $f'(x) < 0$, constante nos intervalos onde $f'(x) = 0$. Se a é um ponto de máximo o mínimo local da função diferenciável $f(x)$ definida numa sua vizinhança, então a é um *ponto crítico* de $f(x)$, ou seja, $f'(a) = 0$.

    - Esboce os gráficos das seguintes funções, definidas em oportunos domínios.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \qquad f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f(x) = x - \sin(x) \qquad f(x) = \sin(x) + \sin(2x) \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

    - Mostre que, entre todos os rectângulos de perímetro P fixado, o quadrado é o que tem área maior.
    - Mostre que, dados n números $a_1, a_2, ..., a_n$, o valor de x que minimiza a soma dos "erros quadráticos"

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + ... + (x - a_n)^2$$

      é a média aritmética

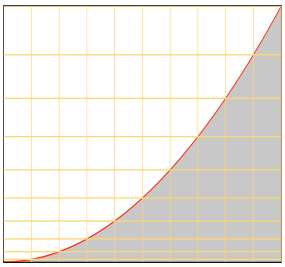
$$\overline{x} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\,.$$

Referências

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

4 Área, integral e métodos de integração

1. (área do segmento parabólico segundo Eudoxo e Arquimedes) O *método de exaustão*, utilizado por Eudoxo e Arquimedes, para calcular a área de uma figura geométrica consiste em aproximar a região com reuniões de figuras simples, como rectângulos e triângulos. Por exemplo, a área do "segmento parabólico"



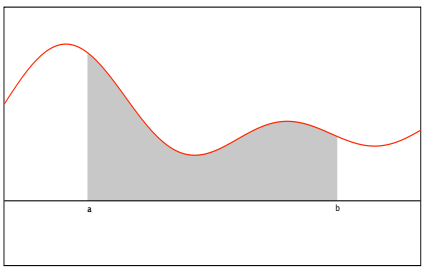
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le x^2\},$$

pode ser aproximada dividindo o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de comprimento $1/n$, e observando que área(A) é superior à soma $s_n(A)$ das áreas dos rectângulos de bases $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ e alturas $(k/n)^2$, e inferior à soma $S_n(A)$ das áreas dos rectângulos de bases $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ e alturas $((k+1)/n)^2$, onde $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = s_n(A) \le \text{área}(A) \le S_n(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$$

- Mostre que a diferença $S_n(A) - s_n(A) \to 0$ quando $n \to \infty$.
- Use a identidade
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$
para mostrar que, quando $n \to \infty$, as aproximações $s_n(A)$ e $S_n(A)$ convergem para $1/3$.

2. (área e integral) Se $f(x)$ é uma função contínua e não-negativa, definida no intervalo $[a, b]$, o "integral de $f(x)$ entre os pontos a e b" representa a área da região



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a \le x \le b \text{ e } 0 \le y \le f(x)\}$$

limitada pelo eixo dos x, as rectas verticais $x = a$ e $x = b$, e o gráfico da função f. A notação é

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \text{área}(A)}$$

Algumas propriedades elementares do integral são

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,, \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,, \qquad \int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx \quad \forall c \in \mathbb{R}\,, \qquad \int_{ka}^{kb} f\left(\tfrac{x}{k}\right) dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \forall k > 0}$$

$$\boxed{f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$$

$$\boxed{m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)}$$

- Calcule os integrais[6]

$$\int_0^1 3dx \qquad \int_{-2}^2 7dx \qquad \int_1^{10} xdx \qquad \int_{-2}^3 (-2x)dx$$

$$\int_{-2}^2 |x|dx \qquad \int_0^3 (5x-2)dx \qquad \int_{-33}^{33} (11-x)dx \qquad \int_0^n [x]dx$$

3. (primitivas e cálculo de integrais) A função $F(x)$ é uma *primitiva* da função contínua $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$. A notação de Leibniz é $F(x) = \int f(x)dx$. Duas primitivas $F(x)$ e $G(x)$ de $f(x)$ diferem por uma constante, pois a derivada da diferença é $F'(x) - G'(x) = 0$.

   O *teorema fundamental do cálculo* (Leibniz e Newton) diz que $\int_a^x f(u)du$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja,

$$\boxed{\tfrac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)\,.}$$

   Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$, ou seja,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.}$$

- Calcule as seguintes primitivas

$$\int dx \qquad \int x^2 dx \qquad \int \frac{1}{x^3}dx \qquad \int \sqrt{2x-1}dx$$

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx \qquad \int \sin(\theta)d\theta \qquad \int \left(\cos(\pi x) - 2x^3\right) dx \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Calcue os seguintes integrais

$$\int_0^3 (x-1)dx \qquad \int_{-1}^1 (1-|x|)dx \qquad \int_0^{10} \sqrt{x}dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx$$

$$\int_{-3}^2 \sqrt{x^2}dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(2x)dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \qquad \int_3^5 \left(x^{1/3} - x^{1/5}\right) dx$$

$$\int_{-5}^5 \left(1 + 399x - x^2\right) dx \qquad \int_0^{2\pi} |\sin(x)|dx \qquad \int_{-1}^1 (33-11x)^{66}\, dx$$

- Calcule a derivada de

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \qquad F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)dt \qquad F(x) = \int_{2x}^{x^3} (t - t^2)dt$$

- Calcule a área da região do plano limitada entre as curvas

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x^3\,, \qquad \text{com } 0 \leq x \leq 1$$

$$y = \sin(x) \quad \text{e} \quad y = -\sin(x)\,, \qquad \text{com } 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = x^{1/3} \quad \text{e} \quad y = x^{1/2}\,, \qquad \text{com } 0 \leq x \leq 1$$

[6] $[x]$ denota a "parte inteira de x", ou seja, o único inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$.

4. (logaritmo e exponencial) O *logaritmo* é a função $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida pelo integral

$$\boxed{\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}}$$

para $x \in \mathbb{R}_+ =]0, \infty[$.

- Observe que a derivada do logaritmo é

$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$

  e deduza que o logaritmo é estritamente crescente.

- Mostre que $\log(1) = 0$, e que

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \text{e} \qquad \log(1/x) = -\log(x) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$$

- Deduza que $\log(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$, e esboce o gráfico do logaritmo.

O *exponencial* é a função inversa do logaritmo, ou seja, a função $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\boxed{\exp(\log x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+\,, \qquad \log(\exp(y)) = y \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}}$$

O valor $\exp(x)$ é também denotado por e^x, onde $e = \exp(1)$ (ou seja, $\log(e) = 1$).

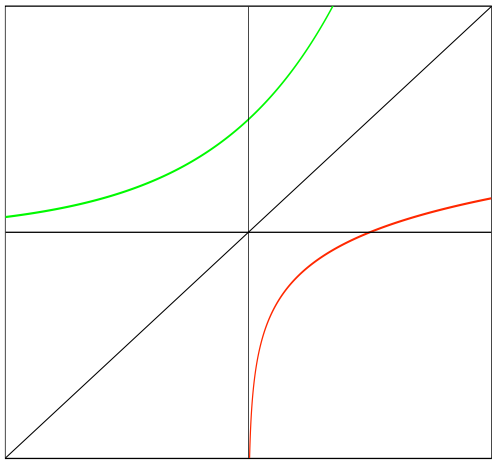
- Mostre que a derivada do exponencial é o exponencial, ou seja,

$$\exp'(x) = \exp(x)\,.$$

- Mostre que $\exp(0) = 1$, e que

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \text{e} \qquad \exp(-x) = 1/\exp(x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- Esboce o gráfico do exponencial.



Gráficos do logaritmo (vermelho) e do exponencial (verde).

5. (integrais com exponenciais e logaritmos) Calcule

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} \qquad \int_{\log 1}^{\log 2} e^x dx \qquad \int \frac{dx}{x-1} \qquad \int_1^2 e^{x-1} dx$$

$$\int 2e^{3x} dx \qquad \int_0^7 e^{-x} dx \qquad \int \frac{1}{x(1-x)} dx$$

6. (integração por substituição) A substituição $y = g(x)$, donde $dy = g'(x)dx$, transforma $f(g(x))g'(x)dx$ em $f(y)dy$, portanto

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy}$$

- Calcule

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx \qquad \int \frac{\cos(\log x)}{x}dx \qquad \int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{5+2\sin(\theta)}}d\theta \qquad \int \tan(\theta)d\theta$$

$$\int 3x^2\cos(x^3)dx \qquad \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx \qquad \int \frac{x}{x^2-1}dx \qquad \int_{\log 1}^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx \qquad \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

7. (integração por partes) Pela regra de Leibniz, a derivada de fg é $(fg)' = f'g + fg'$, portanto

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

- Calcule

$$\int_0^1 xe^{-x}dx \qquad \int \sin(\log(x))dx \qquad \int_1^{e^3} \log(x)dx$$

$$\int x\cos(x)dx \qquad \int x^2\sin(x) \qquad \int e^x\sin(x)dx$$

8. (velocidade + condição inicial ⇒ lei horária) Uma partícula é deslocada ao longo de uma recta com velocidade $v(t) = t - t^2$ no tempo t.

- Determine a posição $q(2)$ da partícula no tempo $t = 2$ sabendo que a sua posição inicial é $q(0) = 1$.

9. (trabalho de expansão) O trabalho efectuado por um gás perfeito numa expansão do volume V_0 ao volume V_1 é dado pelo integral

$$L = \int_{V_0}^{V_1} pdV$$

onde p é a pressão.

- Calcule o trabalho efectuado por um gás que expande de 3 l até 4 l a uma pressão constante de 2 atm.
- Calcule o trabalho efectuado por 1 mole de oxigénio que expande isotermicamente, à temperatura de 20 ^{o}C, de 1 l até 2 l (a equação de estado de gás perfeito é $pV = nRT$, onde n é o número de moles, $R \simeq 8.314 \times 10^7$ J/K mol, e T é a temperatura absoluta).

Referências

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

Formulário primitivas

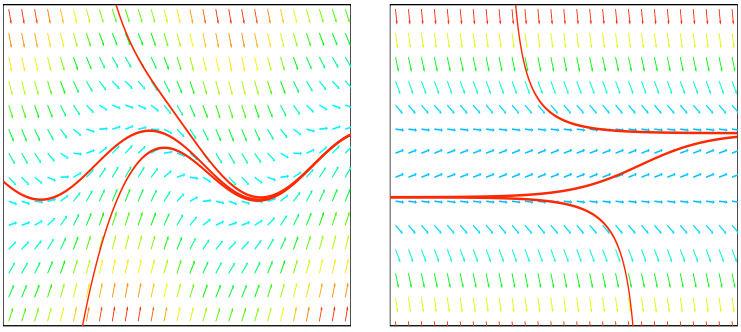
	(função)	("uma" primitiva)
	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x)$
(por substituição)	$f(y(x))y'(x)$	$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy$
(por partes)	$f(x)g'(x)$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
(constantes)	λ	$\int \lambda dx = \lambda x$
(potências, $\alpha \neq -1$)	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
(logaritmo)	$1/x$	$\int \frac{dx}{x} = \log\lvert x\rvert$
(exponencial)	e^x	$\int e^x dx = e^x$
(seno)	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
(coseno)	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)$
(tangente)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
(cotangente)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\text{cotan}(x)$
(arco cujo seno)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$
(arco cuja tangente)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
(exponencial × seno)	$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x)-\beta\cos(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
(exponencial × coseno)	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$

5 Equações diferenciais ordinárias

1. (equações diferenciais ordinárias) Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem é uma "lei"

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ de um sistema dinâmico, onde $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$ denota a derivada do observável x em ordem ao tempo t, e $v(t, x)$ é um "campo de direcções" (uma recta com declive $v(t, x)$ para cada ponto (t, x)). Uma *solução* da EDO é uma função $t \mapsto x(t)$ tal que $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num certo intervalo, ou seja, uma função cujo gráfico é tangente ao campo de direcções em cada ponto $(t, x(t))$ do gráfico. Se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.



Campos de direcções e algumas soluções de $\dot{x} = \sin(t) - x$ e de $\dot{x} = x(1 - x)$.

- Esboce os campos de direcções das EDOs

$$\dot{x} = t \qquad \dot{x} = -x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = x + t$$

$$\dot{x} = x(1 - x) \qquad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

  e conjecture sobre o comportamento das soluções.
- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $t\dot{x} - 3x = 0$? E a função $x(t) = 0$?

2. (Integração de EDOs simples) O teorema fundamental do cálculo implica que a solução de uma EDO simples

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)ds}$$

- Integre (ou seja, determine soluções com $x(t_0) = x_0$) as seguintes EDOs.

$$\dot{x} = 2\sin(t) \qquad \dot{x} = e^{-t} \qquad \dot{x} = \cos(3t) \qquad \dot{x} = t - t^2$$

3. (EDOs autónomas) A solução de uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x)$$

depende da condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio)* da equação. Se x_0 não é um ponto singular, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então a receita para resolver $\frac{dx}{dt} = v(x)$ consiste em "separar as variáveis", $\frac{dx}{v(x)} = dt$, integrar os dois membros, $\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} = \int_{t_0}^{t} ds$, e resolver para x. Ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(x)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}}$$

- Considere as seguintes EDOs de primeira ordem

$$\dot{x} = -3x \qquad \dot{x} = 2x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = e^x \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)$$

Determine as soluções estacionárias. Esboce os campos de direcções e conjecture sobre o comportamento das soluções. Determine, se possível, fórmulas para a solução com condição inicial $x(0) = x_0$, e esboce o gráfico de algumas das soluções encontradas.

4. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO *separável*

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se $f(x_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\dot{x} = f(x)/g(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}}$$

- Resolva as seguintes EDOs separáveis

$$\dot{x} = tx^3 \qquad t\dot{x} + t = t^2 \qquad \dot{x} = t^3/x^2 \qquad \dot{x} = e^{x+3t^2}t$$

$$\dot{x} = \frac{t-1}{x^2} \qquad \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\left(t^2+1\right)\dot{x} = 2tx \qquad \dot{x} = t\left(x^2 - x\right) \qquad \dot{x} = e^{t-x}\,,$$

definidas em oportunos domínios.

5. (EDOs lineares) A solução de uma EDO *linear*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar (apenas) uma solução não trivial $y(t)$ da "equação homogénea associada", $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogénea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(u)du}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} q(s)ds\right)\,.}$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \qquad \dot{x} + 2x = t \qquad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \qquad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t^3 \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r\tan\theta = \cos\theta \qquad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

Referências

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

[Robinson] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.

6 Modelos contínuos

1. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela *equação de Newton*

$$m\ddot{r} = -mg$$

onde r é a altura, m é a massa da partícula, $g \simeq 980$ cm/s^2 é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\ddot{r}$ denota a segunda derivada de r em ordem ao tempo t.

   - Resolva a equação $m\dot{v} = -mg$ para a velocidade $v = \dot{r}$, com condição inicial $v(0) = v_0$, e deduza a solução $r(t)$ com condição inicial $r(0) = r_0$.

2. (decaimento radioactivo) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a EDO de primeira ordem

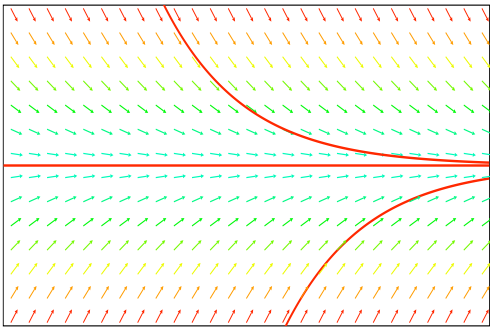
$$\dot{N} = -\beta N$$

onde $\beta > 0$ é uma *constante de decaimento*.

   - Determine a solução da equação diferencial com condição inicial $N(0) = N_0$.
   - O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, isto é, é o tempo T tal que $N(T)/N(0) = 1/2$. Encontre a relação entre o tempo de meia-vida T e a constante de decaimento β, e mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$.
   - O tempo $1/\beta$ é dito *vida média*, sendo a esperança do tempo de vida de cada núcleo. Determine o tempo de meia-vida do ^{14}C sabendo que a vida média é $1/\beta \simeq 8033$ anos. .
   - A radiação cósmica produz ^{14}C na atmosfera terrestre a uma certa taxa α. Portanto, o número de núcleos de ^{14}C na atmosfera segue a EDO

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha$$

     Mostre que $N(t)$ converge para o valor estacionário $\overline{N} = \alpha/\beta$ quando $t \to \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$.



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = -2x + 1$.

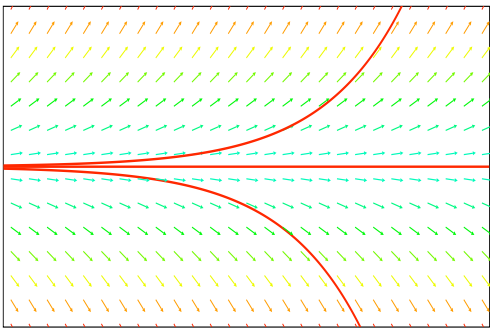
3. (crescimento exponencial) O crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado pela EDO de primeira ordem

$$\dot{N} = \lambda N$$

onde $N(t)$ é a população no tempo t, e $\lambda > 0$.

   - Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
   - O que acontece à solução para grandes intervalos de tempo?
   - Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?

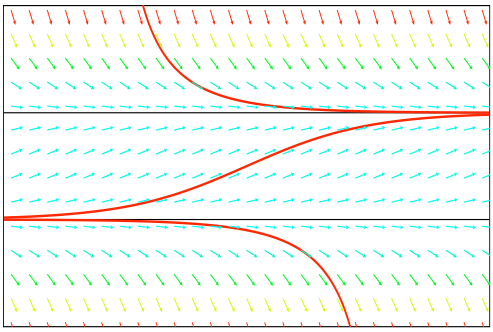
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\alpha > 0$, então
$$\dot{N} = \lambda N - \alpha$$
Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assimptótico das outras soluções.



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = 2x - 1$.

4. (equação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é a *equação logística*[7]
$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$$
onde $\lambda > 0$ e a constante $M > 0$ é a população máxima suportada pelo meio ambiente. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N << M$, e que $\dot{N} \to 0$ quando $N \to M$.

   - Seja $x(t) = N(t)/M$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística "adimensional"
$$\dot{x} = \lambda x(1 - x)\,.$$
   - Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
   - Verifique que
$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}} \quad ,$$
é a solução da equação logística com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$.
   - Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.



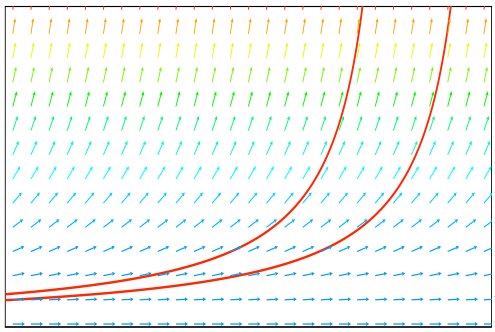
Campo de direcções e soluções da equação logística.

[7] Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

5. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \alpha N^2.$$

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
- Observe que as soluções que determinou não estão definidas para todos os tempos: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = x^2$.

6. (reacção simples) Considere a reação

$$A \overset{\leftarrow}{\rightarrow} B$$

entre duas espécies químicas A e B. Assuma que as velocidades[8] sejam dadas por $v_{\rightarrow} = k_{\rightarrow}[A]$ e $v_{\leftarrow} = k_{\leftarrow}[B]$, onde $[A]$ e $[B]$ são as concentrações de A e B, respectivamente, e $k_{\rightarrow}$ e $k_{\leftarrow}$ são constantes.

- As concentrações ao equilíbrio verificam

$$[B]_e/[A]_e = k_{\rightarrow}/k_{\leftarrow}$$

Deduza as concentrações de A e B no equilíbrio, sabendo que as concentrações iniciais são $[A]_0 = N$ e $[B]_0 = 0$.

- Mostre que $x = [A] - [A]_e$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = -(k_{\rightarrow} + k_{\leftarrow})x$$

e calcule $x(t)$ dado um valor inicial $x(0)$.

- Mostre como estimar as velocidades de reacção, $k_{\rightarrow}$ e $k_{\leftarrow}$, utilizando as observações de $[A]_t$ e $[B]_t$.

---

[8] Segundo a *lei de ação das massas*, "numa dada temperatura, a velocidade de uma reação química é proporcional ao produto das concentrações molares dos reagentes, elevadas a expoentes iguais aos respectivos coeficientes da equação química balanceada". Por exemplo, a velocidade da reação

$$aA + bB + ... \rightarrow xX + yY + ...$$

é dada por

$$v_{\rightarrow} = K_T^{\rightarrow}[A]^a[B]^b...$$

onde $[A]$, $[B]$, ... são as concentrações molares de A, B, ... , e $K_T^{\rightarrow}$ é uma constante (que pode depender da temperatura T, por exemplo, segundo a *lei de Arrhenius* $K_T = Ae^{-E/RT}$, com A e E constantes). A velocidade da reação inversa

$$aA + bB + ... \leftarrow xX + yY + ...$$

é

$$v_{\leftarrow} = K_T^{\leftarrow}[X]^x[Y]^y...$$

Então no equilíbrio as concentrações satisfazem a lei

$$\frac{[A]^a[B]^b...}{[X]^x[Y]^y...} = K_T$$

onde $K_T = K_T^{\leftarrow}/K_T^{\rightarrow}$.

7. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

   - A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá no instante t é proporcional à diferença entre a temperatura do ar e a temperatura do chá no instante t.
   - A taxa de variação de uma população de cogumelos no instante t é proporcional à raiz quadrada da população no instante t.
   - A velocidade de um foguetão no instante t é inversamente proporcional à altura atingida no instante t.
   - A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

8. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força $-k\dot{r}$ proporcional e contrária à velocidade, assim a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{r} = -k\dot{r} - mg$$

   onde $k > 0$ é um coeficiente de atrito. Chamando $v = \dot{r}$ a velocidade da partícula, somos levados a

$$m\dot{v} = -kv - mg$$

   - Determine a solução $v(t)$ com condição inicial $v(0) = 0$.
   - Mostre que a velocidade $v(t)$ tende para um valor assimptótico v_∞ quando $t \to \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
   - Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $r(t)$ com condição inicial $r(0) = r_0$.

9. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V$$

   onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

   - Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
   - Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
   - Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E\sin(\omega t)$. Se não conseguir, mostre que a solução com $I(0) = 0$ tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

     onde α é uma constante que depende de ω, L e R.

10. (lei do arrefecimento de Newton) Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\,(T - M(t))$$

    onde k é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

    - Escreva a solução $T(t)$ como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e de $M(s)$ com $0 \le s \le t$.
    - Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
    - Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100^oC, é colocada numa sala cuja temperatura é de 20^oC. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

7 Curvas e campos escalares

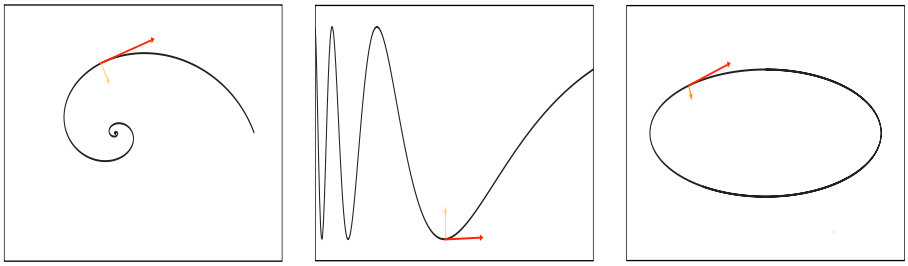
1. (caminhos e curvas) Um *caminho*, no plano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço $\mathbb{R}^3$, é uma função

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{ou} \qquad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

definida num intervalo (de tempos) $t \in I \subset \mathbb{R}$. A imagem $\gamma = \vec{r}(I) \subset \mathbb{R}^{2 \text{ ou } 3}$ de um caminho contínuo é dita *curva*. A *velocidade* e a *aceleração* do caminho $\vec{r}(t)$ são os caminhos

$$\boxed{\vec{v}(t) = \tfrac{d}{dt}\vec{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \qquad \text{e} \qquad \vec{a}(t) = \tfrac{d}{dt}\vec{v}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))}$$

respectivamente. A norma[9] da velocidade, $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$, é dita *velocidade escalar*.



As curvas $(e^t \cos(3t), e^t \sin(3t))$, $(t, \sin(1/t))$, e $(2\cos(t), \sin(-t)$.

- Esboce as seguintes curvas no plano, e calcule velocidade e aceleração, nos pontos onde podem ser definidas.

$$\vec{r}(t) = \left(t, t^2\right) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}\,, \qquad \vec{r}(t) = \left(t^3, t^2\right) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}\,,$$
$$\vec{r}(t) = (t, |t|) \quad \text{com } t \in [-1, 1]\,, \qquad \vec{r}(t) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]\,,$$
$$\vec{r}(t) = (t, [t]) \quad \text{com } t \in [-2, 2]\,, \qquad \vec{r}(t) = (t, \sin(1/t)) \quad \text{com } t \in \,]0, \infty[\,.$$

- Verifique que a trajectória $t \mapsto (a\cos t, b \sin t)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$, descreve a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- Esboce a trajectória $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $R, b > 0$, descrita por uma partícula em movimento numa *hélice circular*.
- Determine umas equações paramétricas para a parábola $x = y^2 + 1$ e para a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ com $x > 0$ (lembre a identidade $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ entre as funções "hiperbólicas").

2. (movimento circular uniforme) Considere a trajectória

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)) \qquad \text{com } R > 0\,,$$

descrita por uma partícula em *movimento circular uniforme* no plano.

- Mostre que a partícula descreve uma circunferência de raio R, e determine o período do movimento.
- Calcule a velocidade $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ e a aceleração $\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$, mostre que a aceleração é ortogonal à velocidade e que a aceleração é centrípeta (ou seja, é um vector que aponta para o centro da circunferência).
- Calcule a *velocidade angular*, o quociente entre a velocidade escalar $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ e o raio da circunferência.

[9] A *norma (Euclidiana)* de um vector $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ é

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\,, \qquad \text{onde} \qquad \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

é o *produto interno (Euclidiano)* em $\mathbb{R}^n$. Dois vectores $\vec{x}$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ são *ortogonais* quando $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$.

3. (comprimento de uma curva) O comprimento de uma curva γ, imagem do caminho $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ com velocidade contínua $\dot{\vec{r}}(t)=\vec{v}(t)$, é dado pelo integral da velocidade escalar,

$$\boxed{\ell(\gamma)=\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|dt}$$

Por exemplo, se a curva é dada por $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ ou $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, o seu comprimento é

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}dt \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}dt\,.$$

das seguintes curvas no plano:

- Calcule o comprimento
  do arco de circunferência $(\cos\theta,\sin\theta)$ com $\theta\in[\pi/2,2\pi]$,
  da espiral logarítmica $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ com $t\in[0,\infty[$,
  do arco de parábola $\big(t,t^2/2\big)$ com $t\in[0,1]$ (considere a susbtituição $t=\sinh s$).
- Seja $f(x)$ uma função real com derivada contínua definida no intervalo $[a,b]$. Observe que o gráfico de f, $\Gamma_f=\{(t,f(t))$ onde $t\in[a,b]\}$, é a imagem do caminho $t\mapsto(t,f(t))$ com $t\in[a,b]$, e deduza que o seu comprimento é

$$\ell\left(\Gamma_f\right)=\int_a^b\sqrt{1+f'(t)^2}dt\,.$$

4. (trajectória de um projéctil) Determine e esboce a trajectória $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ de um projéctil no espaço $\mathbb{R}^3$ sabendo que a posição inicial é $\vec{r}(0)=(0,0,0)$, a velociade inicial é $\vec{v}(0)=(100,0,100)$ cm/s, e que a aceleração verifica a lei de Newton

$$m\vec{a}(t)=(0,0,-g)\,.$$

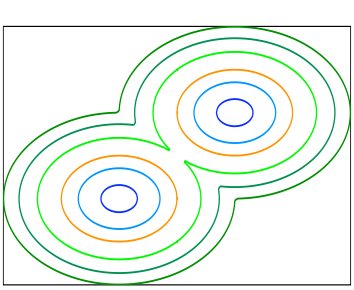
onde $m=10$ g é a massa e $g\simeq 980$ cm/s^2 a aceleração gravitacional.

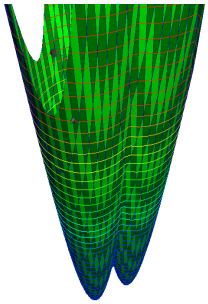
5. (campos escalares, curvas e superfícies de nível) Sejan $f(x,y)$ uma função real definida num domínio D do plano $\mathbb{R}^2$, e $\lambda\in\mathbb{R}$. A *curva de nível* λ da função f é o conjunto

$$\boxed{\Sigma_\lambda=\big\{(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2 \ \text{ t.q. } \ f(x,y)=\lambda\big\}}$$

O *gráfico* da função f é

$$\boxed{\mathcal{G}_f=\big\{(x,y,z)\in D\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \ \text{ t.q. } \ f(x,y)=z\big\}}$$





Curvas de nível e gráfico.

- Esboce as curvas de nível e os gráficos das seguintes funções, nos domínios onde podem ser definidas:

$$f(x,y)=x+y \qquad f(x,y)=xy \qquad f(x,y)=x^2+2y^2 \qquad f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$
$$f(x,y)=\log\left(x^2+y\right) \qquad f(x,y)=x^2-y^2 \qquad f(x,y)=\sin\left(xy\right)$$

Referências

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

8 Derivadas de campos escalares

1. (derivadas parciais, gradientes e derivadas direccionais) As derivadas parciais da função $f(\vec{r}) = f(x,y)$ no ponto $\vec{r} = (x,y)$ são os limites

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon,y)-f(x,y)}{\varepsilon} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x,y+\varepsilon)-f(x,y)}{\varepsilon}}$$

O *diferencial* e o *gradiente* de $f(x,y)$ no ponto $\vec{r} = (x,y)$ são a "forma linear" e o vector

$$\boxed{df(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r})dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r})dy \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r})\right)}$$

A *derivada direccional* de $f(x,y)$ na direcção do vector $\vec{v}$ no ponto $\vec{r}$ é

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\vec{r}+\varepsilon\vec{v})-f(\vec{r})}{\varepsilon} = \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{r}), \vec{v} \right\rangle}$$

Se $t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ é um caminho com velocidade $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, e $f(x,y)$ um campo escalar, então a *regra da cadeia* diz que

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)), \vec{v}(t) \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}) \cdot \dot{y}(t)}$$

- Considere o campo escalar $f(\vec{r}) = \langle \vec{w}, \vec{r} \rangle$, onde $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{w} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{r}) = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

  e que portanto o gradiente de f é constante e igual a $\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{w}$.

- Considere o campo escalar $f(\vec{r}) = \|\vec{r}\|^2$. Mostre que

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = 2\vec{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{r}) = 2\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle \ .$$

  Calcule a derivada direccional de f no ponto $\vec{r} = (2,4,6)$ na direcção do vector $\vec{v} = (1,2,3)$. Dado o caminho $\vec{r}(t) = (t, 2t, 3t)$, calcule a derivada de $f(\vec{r}(t))$ em ordem a t no tempo $t = 2$.

- Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções, nos domínios onde podem ser definidas:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f(x,y,z) = x^3 + y^2 + zxy \qquad f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)$$

$$f(x,y) = e^{x+y} \qquad f(x,y) = \frac{\sin(x^2)}{y} \qquad f(x,y) = x^y$$

- A temperatura do mar num ponto $\vec{r} = (x,y,z)$ é dada por $T(x,y,z) = x^3 - xy + yz^2$. Uma sardinha encontra-se no ponto $\vec{a} = (3,2,1)$. Em que direcção e sentido a sardinha tem de nadar para arrefecer mais rapidamente?

- Seja $f(t)$ uma função real diferenciável. Mostre que a função $u(x,y) = f(xy)$ satisfaz a equação

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

  e que a função $v(x,y) = f(x/y)$ satisfaz a equação

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2. (diferencial e aproximação linear) Estime os seguintes valores, usando a aproximação linear

$$\boxed{f(x+dx, y+dy) \simeq f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy}$$

$$e^{0.01}\sqrt{3.999} \qquad \frac{\log(1.01)}{1+0.001} \qquad \sqrt[3]{7.99}\sqrt{36.01}$$

3. (energia cinética e sistemas conservativos) Sejam $\vec{q}(t)$ a trajectória de uma partícula de massa m, $\vec{v}(t) = \dot{\vec{q}}(t)$ a sua velocidade e $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{q}}(t)$ a sua aceleração.

   - Calcule a derivada de $\|\vec{q}(t)\|^2$ em ordem ao tempo t.
   - Deduza que, se $\|\vec{q}(t)\|$ é constante, então a velocidade é ortogonal à posição, ou seja

$$\langle \vec{v}(t), \vec{r}(t) \rangle = 0$$

   - Mostre que a variação da energia cinética é igual ao produto interno $\langle m\vec{a}(t), \vec{v}(t) \rangle$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}(t)\|^2\right) = \langle m\vec{a}(t), \vec{v}(t) \rangle \ .$$

     Deduza que se a força $\vec{F} = m\vec{a}$ é ortogonal à velocidade, então a energia cinética é constante.
   - As equações de Newton de um sistema conservativo dizem que

$$m\vec{a} = \vec{F}\,,$$

     onde $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{q})$, e $V(\vec{q})$ é uma energia potencial. Verifique que a energia

$$E(\vec{q}, \vec{v}) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + V(\vec{q})$$

     é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E(\vec{q}(t), \vec{v}(t)) = 0$ ao longo das trajectórias.

4. (recta normal e espaço tangente) Sejam Σ_λ uma curva/superfície de nível do campo escalar $f(\vec{r})$, e $\vec{r}_0 \in \Sigma_\lambda$ um ponto onde $\vec{\nabla}f(\vec{r}_0) \neq 0$. A *recta normal* à superfície Σ_λ no ponto $\vec{r}_0$ é a recta

$$\boxed{t \mapsto \vec{r}_0 + t \cdot \vec{\nabla}f(\vec{r}_0)}$$

   O *espaço (recta, plano, ...) tangente* à superfície de nível Σ_λ no ponto $\vec{r}_0$ é o hiperplano ortogonal ao gradiente, definido por

$$\boxed{\left\langle \vec{\nabla}f(\vec{r}_0), \vec{r} - \vec{r}_0 \right\rangle = 0}$$

   - Considere as seguintes funções:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f(x,y) = x^2$$

$$f(x,y) = xy \qquad f(x,y) = e^{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = 1 - y - x^2$$

$$f(x,y,z,) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

     Calcule o gradiente num ponto genérico onde estão definidas.
     Determine a recta normal e a recta tangente à curva (ou superfície) de nível no ponto $\vec{r} = (1,1)$ (ou $\vec{r} = (1,1,1)$).

5. (gás perfeito) A equação de estado de um gás perfeito é

$$PV = nRT$$

   onde p é a pressão, V o volume, n o número de moles, $R \simeq 8.314 \times 10^7$ J/K·mol, e T é a temperatura absoluta.

   - Esboce as curvas "isotermas" (i.e. de temperatura constante) no plano P-V. Descreva o comportamento do volume de um gás perfeito ao variar a pressão, mantendo constante a temperatura.
   - Mostre que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) = -1$$

Referências

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

9 Integrais duplos

1. (integrais duplos e integrais iterados) O *teorema de Fubini* afirma que, se $f(x,y)$ é uma função contínua no rectângulo $R=[a,b]\times[c,d]$, então o integral duplo $\iint_R f(x,y)dxdy$ é igual a um dos integrais iterados

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dxdy &= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy\\ &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\end{aligned}$$

Se o domínio de integração é uma região $V=\{a\le x\le b\,,\ g(x)\le y\le h(x)\}$, então

$$\boxed{\iint_V f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx}$$

Se o domínio de integração é uma região $H=\{c\le y\le d\,,\ g(y)\le x\le h(y)\}$, então

$$\boxed{\iint_H f(x,y)dxdy=\int_c^d\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx\right)dy}$$

- Calcule os seguintes integrais iterados.

$$\int_0^1\int_{-1}^1 ydxdy \qquad \int_1^2\int_0^3 xy^2dxdy \qquad \int_0^3\int_1^2 xy^2dydx$$

$$\int_0^e\int_1^{\log(2)} e^x dxdy \qquad \int_0^1\int_\pi^{2\pi} y\sin(x)dxdy \qquad \int_0^1\int_\pi^{3\pi}\sin^2(x)dxdy$$

- Esboce a região de integração e calcule os seguintes integrais duplos recorrendo, se necessário, a uma inversão da ordem de integração.

$$\int_0^1\int_0^y x^3ydxdy \qquad \int_0^1\int_{y^3}^{y^2} dxdy \qquad \int_0^3\int_{x^2}^{2x^2} xy^2dydx$$

$$\int_0^1\int_x^1 e^{-y^2}dydx \qquad \int_0^2\int_{y/2}^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy \qquad \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sin(x^3)dxdy$$

- Calcule os seguintes integrais duplos.

$$\iint_D xdxdy \qquad \text{onde } D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2\le x\le 3 \text{ e } 1\le y\le 10\}\,.$$

$$\iint_D e^{x+y}dxdy \qquad \text{onde } D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0\le x\le 1 \text{ e } 0\le y\le 1\}\,.$$

$$\iint_D (x+y)dxdy \qquad \text{onde } D \text{ é o triângulo de vértices } (0,0),(0,1),(1,0).$$

$$\iint_D x^3\cos(xy)dxdy \qquad \text{onde } D \text{ é a região limitada pelos gráficos de } y=x^2,\ y=0,\ \text{ e } x=2\,.$$

2. (coordenadas polares) As coordenadas polares (ρ,θ), com $\rho\in\mathbb{R}_+$ e $\theta\in[0,2\pi[$, no plano estão definidas por

$$\boxed{x=\rho\cos(\theta) \qquad y=\rho\sin(\theta)}$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas. O elemento de área em coordenadas polares é $dxdy\simeq\rho d\rho d\theta$, ou seja,

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy=\iint_R f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))\rho d\rho d\theta}$$

- Calcule os seguintes integrais utilizando as coordenadas polares.

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy \qquad \text{onde } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2 \leq x^2+y^2 \leq 7\}.$$

$$\iint_D y dxdy \qquad \text{onde } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2+y^2 \leq 3\}$$

- Calcule o integral duplo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

utilizando coordenadas polares, e deduza o valor do integral gaussiano $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

3. (áreas) Esboce as seguintes regiões do plano e calcule as suas áreas recorrendo a um integral duplo.
   - Círculo de raio r.
   - Elipse $x^2 + y^2/9 = 1$.
   - Região do plano definida por $-y^2 \leq x \leq y^2$ e $0 \leq y \leq 1$.
   - Região do plano definida por $y \leq 4x - x^2$, $y \geq 0$ e $y \geq 6 - 3x$.
   - Região do plano limitada pelas curvas $y = 4 - x^2$ e $y = x + 2$.
   - Triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(2,1)$.
   - Região do plano limitada pela curva $\rho = \sin(\theta/2)$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4. (volumes) Esboce os seguintes sólidos e calcule os seus volumes recorrendo a um integral duplo.
   - Sólido limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.
   - Sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.
   - Sólido limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.
   - Sólido limitado pelo plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

5. (densidade e centro de massa) Se $\rho(x,y)$ denota a densidade de um corpo que ocupa a região planar $R \subset \mathbb{R}^2$, então a massa total do corpo é o integral duplo

$$M = \iint_R \rho(x,y) dxdy$$

O *centro de massa* é o ponto $\vec{p} = (\overline{x}, \overline{y})$, onde

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iint_R x\rho(x,y) dxdy \qquad \overline{y} = \frac{1}{M} \iint_R y\rho(x,y) dxdy$$

   - Determine o centro de massa do disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ de densidade constante ρ.
   - Determine a massa de um disco $x^2 + y^2 \leq 1$ com densidade $\rho(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
   - Determine o centro de massa de um triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,1)$ e (0.3), cuja densidade é $\rho(x,y) = x + y$,

Referências

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

10 Aproximação e análise qualitativa de modelos discretos

1. (aproximação polinomial) Se $f(x)$ é uma função $n+1$ vezes diferenciável numa vizinhança do ponto a, então vale a aproximação polinomial (de Taylor)

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)}$$

onde o "resto" é

$$\boxed{r_n(x) = \tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}$$

Em particular, $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{t})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algum ponto $\bar{t} \in [a,x]$, e portanto $\frac{r_n(x)}{|x-a|^n} \to 0$ quando $x \to a$.

- Prove as seguintes aproximações, validas para x suficientemente pequeno,

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... \qquad \log(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + ...$$

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + ... \qquad \cos(x) \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 + ...$$

- e determine estas outras

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + ... \qquad \sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x + ...$$

$$\log(1+x^2) \simeq ... \qquad \sin(\pi e^{-x}) \simeq ...$$

- Aproxime e, e estime o erro na sua aproximação, usando os polinómios de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

(observe que $1 \le e^x \le 3$ no intervalo $x \in [0,1]$).

2. (algoritmo de Heron) Considere o problema de determinar o lado ℓ de um quadrado dada a sua área A, ou seja, o número $\ell = \sqrt{A}$.

Um método, utilizado provavelmente pelos babilónios e descrito por Heron[10], consiste em construir recursivamente rectângulos de área A com lados cada vez mais próximos. Se x_1 e y_1 são a base e a altura do primeiro rectângulo, e portanto $x_1 y_1 = A$, então o segundo rectângulo tem como base a média aritmética de base e altura do primeiro, o terceiro rectângulo tem como base a média aritmética da base e a altura do segundo, e assim sucessivamente. A equação recursiva que determina as bases dos rectângulos é portanto

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

- Mostre que bases e alturas dos rectângulos verificam as equações recursivas

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1/x_n + 1/y_n}{2}$$

- Calcule a diferença $x_{n+1} - y_{n+1}$ e mostre que

$$y_2 < y_3 < ... < y_n < y_{n+1} < ... < x_{n+1} < x_n < ... < x_3 < x_2$$

e que

$$x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

- Estime $\sqrt{2}$ com um erro < 0.01 e 0.001.

[10] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.

- Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros n dígitos decimais de $\sqrt{2}$ usando o método dos babilónios.

3. (Estabilidade dos estados estacionários) Seja $\overline{x}$ um estado estacionário da equação recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

ou seja, um ponto tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Se a transformação $f(x)$ é diferenciável, o príncipio das contracções[11] permite decidir sobre a estabilidade do estado estacionário.

> Se $|f'(\overline{x})| < 1$, então o ponto fixo é *atractivo*: as trajectórias de todo o ponto x_0 suficientemente próximo de $\overline{x}$ convergem para $\overline{x}$, ou seja $x_n \to \overline{x}$.
> Se $|f'(\overline{x})| > 1$, então o ponto fixo é *repulsivo*: as trajectórias de todo o ponto $x_0 \neq \overline{x}$ numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$ saem da vizinhança em tempo finito.

Se $f'(\overline{x}) = 0$, o ponto fixo $\overline{x}$ é dito *super-atractivo*[12].

- Estude a natureza dos pontos fixos das seguintes transformações

$$f(x) = \alpha x \qquad f(x) = \alpha x^3 \qquad f(x) = \alpha x + \beta x^2$$

  ao variar os parâmetros.
- Digite 0.1 na sua máquina de calcular, e pressione repetidamente a tecla "cos". O que acontece?
- Estude a natureza do ponto fixo não trivial do modelo logístico (exercício 2 da folha 2)

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

  ao variar o parâmetro λ.

4. (método de Newton) O *método de Newton* para aproximar as raizes de um polinómio $P(z)$, ou seja, resolver a equação

$$P(z) = 0\,,$$

consiste em escolher uma primeira aproximação z_0, e iterar

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}\,.$$

Ou seja, se z_0 é uma primeira conjectura, uma conjectura melhor é o zero da aproximação linear $P(z) \simeq P(z_0) + P'(z_0) \cdot (z - z_0)$.

- Mostre que se a sucessão (z_n) converge, i.e. $z_n \to z_\infty$, e se $P'(z_\infty) \neq 0$, então o limite z_∞ é um zero do polinómio. Mostre que, se a conjectura inicial z_0 está suficientemente próxima de uma raiz $\overline{z}$ e $P'(\overline{z}) \neq 0$, então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
- Verifique que o método de Newton aplicado ao polinómio quadrático $z^2 - a$, com $a > 0$, corresponde ao algoritmo de Heron!
- Escreva a receita do método de Newton para resolver $z^n - a = 0$, com $a > 0$ e $n \geq 2$.
- Utilize o método de Newton para estimar raizes de

$$z^2 + 1 + z \qquad z^3 - z - 1 \qquad z^5 + z + 1 \qquad z^3 - 2z - 5$$

---

[11] Se $f : I \to I$ é uma função difrenciável definida num intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$, e se $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo o $x \in I$, então f é dita *contracção*, pois, pelo teorema do valor médio,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda \cdot |x - y|$$

e $\lambda < 1$. O *princípio das contracções* afirma que então f tem um e um único *ponto fixo*, i.e. um ponto p tal que $f(p) = p$, e que a sucessão definida por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

a partir de uma condição inicial arbitrária $x_0 \in I$, converge para este ponto fixo, ou seja, $x_n \to p$ quando $n \to \infty$. A convergência é "exponencial", pois

$$|x_n - p| \leq \lambda^n \cdot |x_0 - p|\,.$$

[12] Usando o polinómio de Taylor de grau 1 com resto, vê-se que, se x_0 está numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$, então a trajectória de x_0 converge para o ponto fixo $\overline{x}$ e a velocidade de convergência é "quadrática", ou seja,

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq \beta \cdot |x_n - \overline{x}|^2$$

onde β é uma constante.

11 Simulações e sistemas de EDOs

1. (método de Euler) O *método de Euler* para simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x)\,.$$

consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt\,,$$

dado um "passo" dt suficientemente pequeno. A solução $x(t_0+n\cdot dt)$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, é estimada pela sucessão x_n definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt}$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$. Numa linguagem como `c++` ou `Java`, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) =$ `x`, é

```
while (time < t)
  {
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
  }
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq (1 + \varepsilon)^n$$

onde $n \simeq t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \to 0$, as aproximações convergem para a solução verdadeira, pois

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

Compare a resposta do método de Euler com a solução exacta $x(1) = e$, usando passos diferentes, por exemplo $\varepsilon = 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001$ ...

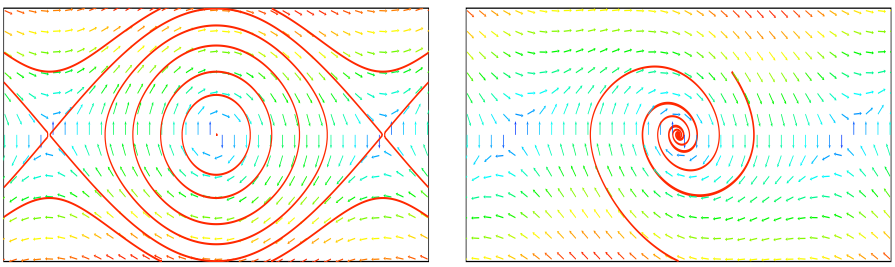
2. (pêndulo matemático) Considere a equação de Newton que modela as oscilações de um *pêndulo*,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha\dot{\theta}\,.$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo, e $\alpha \geq 0$ um coeficiente de atrito. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha p \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboçe as trajectórias e as curvas de fase.



Retrato de fase do pêndulo (sem e com atrito).

3. (oscilador harmónico) As pequenas oscilações de um pêndulo em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descrita pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q\,.$$

onde ω é a frequência característica. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 q \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboçe as trajectórias e as curvas de fase.
- Mostre que as trajectórias são

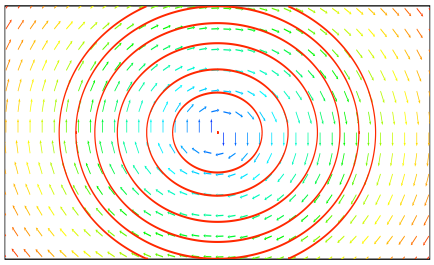
$$q(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad A\cos(\omega t + \phi)\ ,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$.

- Mostre que a energia

$$E(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E\left(q(t), p(t)\right) = 0$ para todo o tempo t.



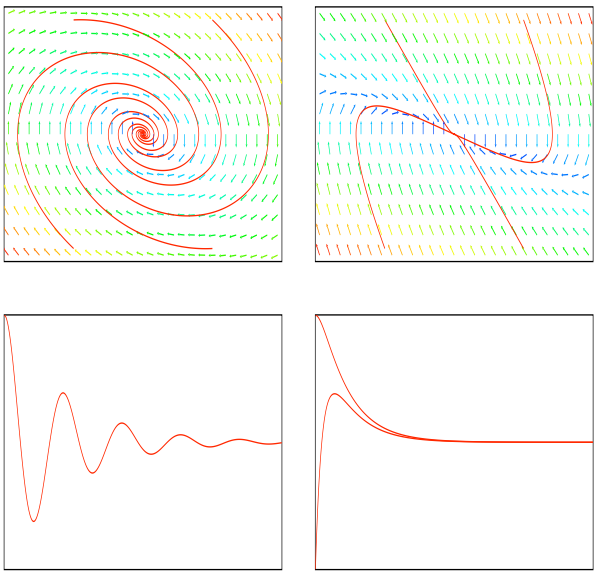
Retrato de fase do oscilador harmónico.

4. (oscilações amortecidas) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q\,,$$

onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito.

- Simule o sistema quando $\alpha^2 < \omega^2$ (amortecimento sub-crítico), $\alpha^2 = \omega^2$ (amortecimento crítico), e $\alpha^2 > \omega^2$ (amortecimento super-crítico).



Retrato de fase e trajectórias do oscilador amortecido (sub-crítico e super-crítico).

5. (oscilações forçadas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q + F(t)\,,$$

onde $\alpha \geq 0$ é um coeficiente de atrito e $F(t)$ uma força.

- Simule o sistema quando a força é $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$, ao variar os parâmetros.

6. (circuito LRC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R, indutância L e capacidade C, é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}\,,$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

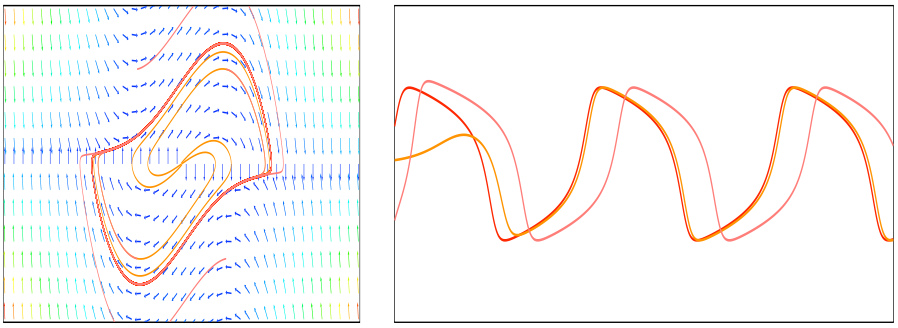
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$.
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0\sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).

7. (oscilador de van der Pol) Considere o *oscilador de van der Pol*[13]

$$\ddot{q} - \mu(1-q^2)\dot{q} + q = 0$$

que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro μ.



Retrato de fase e trajectórias do oscilador de van der Pol.

- Simule o oscilador forçado

$$\ddot{q} - \mu(1-q^2)\dot{q} + q = F_0\sin(\omega t)$$

ao variar o parâmetro μ e a frequência ω.

8. (sistema de Lotka-Volterra) Considere o *sistema de Lotka-Volterra*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy\\ \dot{y} &= -cy + dxy\end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra[14] para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka[15] para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto

$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to B$$

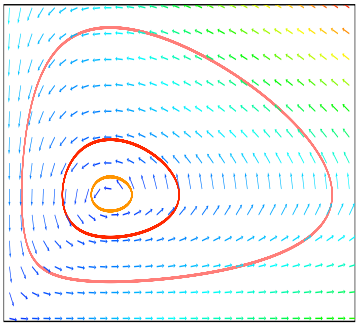
- Determine as soluções estacionárias.

[13] B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

[14] Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

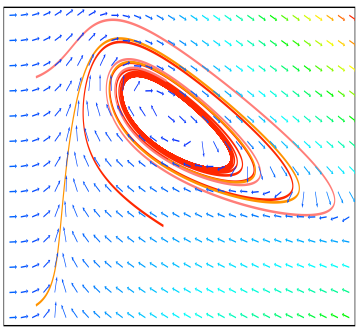
[15] Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

- Mostre que a função
$$H(x,y) = dx + by - c\log x - a\log y$$
é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = 0$. Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de $H(x,y)$.
- Simule o sistema.



Retrato de fase do sistema de Lotka-Volterra.

9. (Brusselator) O *Brusselator* é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores[16] que consiste na reacção abstracta
$$A \to X \qquad B + X \to Y + C \qquad 2X + Y \to 3X \qquad X \to D$$
- Simule o sistema
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (\beta+1)x + x^2 y\\ \dot{y} &= \beta x - x^2 y\end{aligned}$$
para as concentrações das espécies catalíticas X e Y, obtido quando as concentrações $[A] \sim \alpha$ e $[B] \sim \beta$ são mantidas constantes.
- Simule o sistema
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (b+1)x + x^2 y\\ \dot{y} &= bx - x^2 y\\ \dot{b} &= -bx + \delta\end{aligned}$$
para as concentrações de X, Y e B, obtido quando a concentração $[A] \sim \alpha$ é mantida constante e B é injectado a uma velocidade constante $v \sim \delta$.



Rerato de fase do Brusselator.

10. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema[17]
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\lambda - (x^2+y^2))\\ \dot{y} &= x + y(\lambda - (x^2+y^2))\end{aligned}$$

[16] I. Prigogine and R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.

[17] E. Hopf, Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystem, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.

- Simule o sistema ao variar o parâmetro λ.
- Mostre que a origem é um equilíbrio assimptoticamente estável quando $\lambda < 0$.
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando $\lambda > 0$. Observe que a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um "ciclo limite" do sistema quando $\lambda = 1$.
- Simule o sistema

$$\dot{x} = x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2))$$
$$\dot{y} = -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2))$$

11. (reacção de Schnakenberg) Considere a *reacção de Schnakenberg*[18]

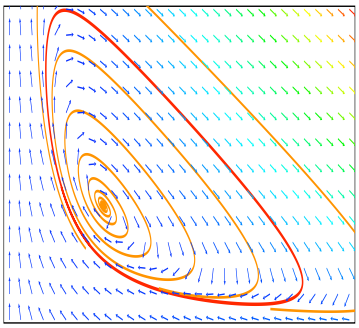
$$2X + Y \to 3X \qquad A \to Y \qquad X \to B$$

modelada pelo sistema

$$\dot{x} = x^2 y - x + \beta$$
$$\dot{y} = -x^2 y + \alpha$$

para as concentrações $x \sim [X]$ e $y \sim [Y]$.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar so parâmetros.



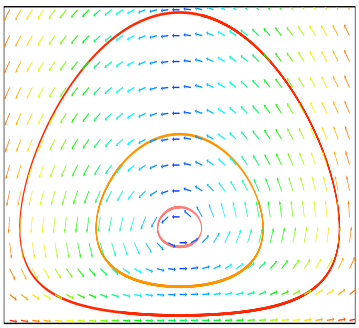
Retrato de fase do sistema de Schnakenberg.

12. (oscilador bioquímico de Goodwin) Um modelo de interações proteinas-mRNA proposto por Goodwin[19] é

$$\dot{M} = \frac{1}{1+P} - \alpha$$
$$\dot{P} = M - \beta$$

onde M e P denotam as concentrações relativas de mRNA e proteina, respectivamente.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar so parâmetros.



Retrato de fase do sistema de Goodwin.

[18] J. Schnakenberg, Simple chemical reaction with limit cycle behavior, *J. Theor. Biol.* **81** (1979), 389-400.
[19] B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.

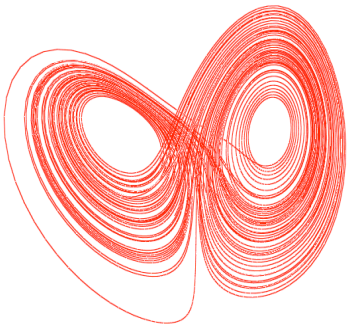
- Simule o sistema[20]

$$\dot{M} = \frac{1}{1+P^n} - \alpha M$$
$$\dot{P} = M^m - \beta P$$

13. (atractor de Lorenz) Considere o *sistema de Lorenz*[21]

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$

- Analize o comportamento assimptótico das trajectórias ao variar os parâmetros σ, ρ e β.
- Observe o comportamento das trajectórias quando $\sigma \simeq 10$, $\rho \simeq 28$ e $\beta \simeq 8/3$.



Atractor de Lorenz.

[20] T. Scheper, D. Klinkenberg, C. Pennartz and J. van Pelt, A Mathematical Model for the Intracellular Cicardian Rhythm Generator, *J. Neuroscience* **19** (1999), 40-47.

[21] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmspheric Science* **20** (1963), 130-141.