

Nome N.º

1. (2 valores) Calcule a soma da série

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right) = 1.$$

2. (2 valores) Considere uma população que decai segundo a lei

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 200.$$

Determine a solução estacionária e o valor de x_{10} sabendo que a condição inicial é $x_0 = 10^6$.A solução estacionária é $\bar{x} = 400$, pois

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{x} + 200 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 400.$$

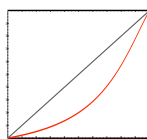
A solução com condição inicial $x_0 = 10^6$ é

$$x_n = \frac{1}{2^{10}} (10^6 - 400) + 400 \simeq 1376.$$

3. (2 valores) Considere a equação recursiva no modelo de Fisher, Wright e Haldane

$$p_{n+1} = \frac{\alpha p_n^2 + p_n(1 - p_n)}{\alpha p_n^2 + 2p_n(1 - p_n) + \beta(1 - p_n)^2},$$

que determina a frequência $0 \leq p_{n+1} \leq 1$ do alelo A na $(n+1)$ -ésima geração, dadas as frequências p_n do alelo A e $1 - p_n$ do alelo a na n -ésima geração. Faça uma simulação e determine o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ quando $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.5$, dada uma frequência inicial $p_0 = 0.7$.

O limite é $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$. De fato, o gráfico da transformação $p_{n+1} = f(p_n)$ é

portanto as trajetórias com condições iniciais $0 < p_0 < 1$ são decrescentes, e o único ponto fixo no intervalo $[0, 1[$ é 0.

4. (2 valores) Calcule a primeira e a segunda derivada da função

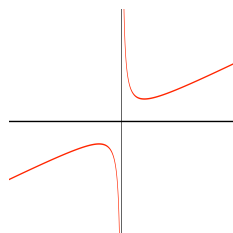
$$f(x) = e^{\sin(x)}.$$

As derivadas de $f(x)$ são

$$f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} \quad \text{e} \quad f''(x) = (\cos^2(x) - \sin(x))e^{\sin(x)}$$

5. (2 valores) Esboce o gráfico da função definida, se $x \neq 0$, por

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$



6. (2 valores) Determine a taxa de variação dV/dt do volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ de uma bola cujo raio cresce segundo a lei $r(t) = t^2$.

A taxa de variação é

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r(t)^2 \cdot 2t = 8\pi t^5.$$

7. (2 valores) Calcule uma primitiva da função $\tan(x)$, ou seja,

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx.$$

Uma primitiva de $\tan(x)$ é $-\log |\cos(x)|$.

8. (2 valores) Calcule o integral

$$\int_{-2}^2 |x| dx.$$

$$\int_{-2}^2 |x| dx = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$$

9. (2 valores) Calcule a derivada de

$$F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$$

A derivada de $F(x)$ é

$$F'(x) = \cos(x)e^{\sin^2(x)}.$$

10. (2 valores) Uma partícula é deslocada ao longo de uma reta com velocidade $v(t) := \frac{dq}{dt}(t)$ dada por

$$v(t) = 3 \cos(t).$$

Determine a posição $q(t)$ da partícula no tempo $t = \pi/2$ sabendo que a sua posição inicial é $q(0) = 1$.

A trajectória da partícula é

$$q(t) = q(0) + \int_0^t v(t) dt = 1 + 3 \sin(t),$$

portanto a posição da partícula no tempo $t = \pi/2$ é

$$q(\pi/2) = 4.$$

Nome N.º

1. (2 valores) Calcule a soma

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63}.$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \simeq 1.84 \times 10^{19}.$$

2. (2 valores) Considere uma população que cresce segundo a lei

$$x_{n+1} = 2x_n - 100.$$

Determine a solução estacionária e o valor de x_{10} sabendo que a condição inicial é $x_0 = 1000$.A solução estacionária é $\bar{x} = 100$, pois

$$\bar{x} = 2\bar{x} - 100 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 100, .$$

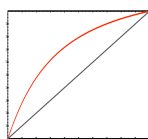
A solução com condição inicial $x_0 = 1000$ é

$$x_n = 2^n (1000 - 100) + 100 = 921700.$$

3. (2 valores) Considere a equação recursiva no modelo de Fisher, Wright e Haldane

$$p_{n+1} = \frac{\alpha p_n^2 + p_n(1 - p_n)}{\alpha p_n^2 + 2p_n(1 - p_n) + \beta(1 - p_n)^2},$$

que determina a frequência $0 \leq p_{n+1} \leq 1$ do alelo A na $(n + 1)$ -ésima geração, dadas as frequências p_n do alelo A e $1 - p_n$ do alelo a na n -ésima geração. Faça uma simulação e determine o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ quando $\alpha = 2$ e $\beta = 0.5$, dada uma frequência inicial $p_0 = 0.3$.

O limite é $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$. De fato, o gráfico da transformação $p_{n+1} = f(p_n)$ éportanto as trajetórias com condições iniciais $0 < p_0 < 1$ são crescentes, e o único ponto fixo no intervalo $]0, 1[$ é 1.

4. (2 valores) Calcule a primeira e a segunda derivada da função

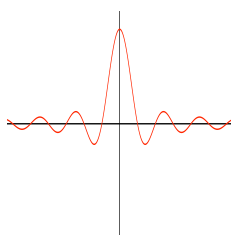
$$f(x) = \cos(e^x).$$

As derivadas de $f(x)$ são

$$f'(x) = -e^x \sin(e^x) \quad \text{e} \quad f''(x) = -e^x \sin(e^x) - e^{2x} \cos(e^x)$$

5. (2 valores) Esboce o gráfico da função definida, se
- $x \neq 0$
- , por

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$



6. (2 valores) Determine a taxa de variação dS/dt da superfície $S = 4\pi r^2$ de uma bola cujo raio cresce segundo a lei $r(t) = e^t$.

A taxa de variação é

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi r(t) \cdot e^t = 8\pi e^{2t}.$$

7. (2 valores) Calcule uma primitiva da função $\frac{1}{x-1}$, ou seja,

$$\int \frac{1}{x-1} dx$$

Uma primitiva de $\frac{1}{x-1}$ é $\log|x-1|$.

8. (2 valores) Calcule o integral

$$\int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - 2/e$$

9. (2 valores) Calcule a derivada de

$$F(x) = \int_0^{x^3} \sin(t^2) dt$$

A derivada de $F(x)$ é

$$F'(x) = 3x^2 \sin(x^6).$$

10. (2 valores) Uma partícula é deslocada ao longo de uma reta com velocidade $v(t) := \frac{dq}{dt}(t)$ dada por

$$v(t) = e^{-2t}.$$

Determine a posição $q(t)$ da partícula no tempo $t = 3$ sabendo que a sua posição inicial é $q(0) = 7$.

A trajectória da partícula é

$$q(t) = q(0) + \int_0^t v(t) dt = 7 + \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}),$$

portanto a posição da partícula no tempo $t = 3$ é

$$q(3) = 7 + \frac{1}{2} (1 - e^{-6}).$$

Nome N.º

1. (2 valores) Considere uma população que decai segundo a lei

$$\frac{dN}{dt} = -N + 200.$$

Determine a solução estacionária. .

A solução estacionária é $N(t) = 200$.

2. (2 valores) Considere uma população que decai segundo a lei

$$\frac{dN}{dt} = -N + 200.$$

Calcule $N(t)$ e o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ sabendo que a condição inicial é $N(0) = 100$.A variável $x(t) := N(t) - 200$ satisfaz a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = -x$, cuja solução é $x(t) = x(0)e^{-t}$. Portanto

$$N(t) = 200 - 100e^{-t}$$

e o limite é a solução estacionária $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 200$.

3. (2 valores) Esboce a curva definida por

$$t \mapsto (e^{-t} \cos(2t), e^{-t} \sin(2t)) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$



4. (2 valores) Considere o caminho

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

Calcule a velocidade $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ e a aceleração $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)$.A velocidade é $\mathbf{v}(t) = (2t, 3t^2)$ e a aceleração é $\mathbf{a}(t) = (2, 6t)$.

5. (2 valores) Calcule o comprimento do arco de circunferência

$$(\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{com} \quad \theta \in [\pi/2, 2\pi].$$

A velocidade escalar da curva $\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ é $v(\theta) = \sqrt{\|\dot{\mathbf{r}}(\theta)\|^2} = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1$. Portanto o comprimento da curva é

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} d\theta = 3\pi/2.$$

6. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule a derivada direccional de f no ponto $\mathbf{r} = (2, 1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (3, 5)$.

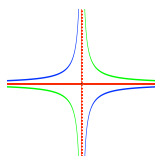
O gradiente de f é $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}) = \langle \nabla f(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle = \langle (2 \cdot 2, 2 \cdot 1), (3, 5) \rangle = 22.$$

7. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ e o caminho $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (t^3, t)$. Calcule a derivada $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$ da função composta $t \mapsto f(\mathbf{r}(t))$ no instante $t = 1$.

A função composta é $t \mapsto g(t) = t^6 + t^2$, e a sua derivada em $t = 1$ é $g'(1) = 6 \cdot 1^5 + 2 \cdot 1 = 8$.

8. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = xy$. Esboce as curvas de nível 0 e ± 1 , e determine a reta tangente à curva de nível 1 no ponto $(1, 1)$.



O gradiente de f em $(1, 1)$ é $\nabla f(1, 1) = (1, 1)$, portanto a reta tangente à curva de nível 1 no ponto $(1, 1)$ é a reta $x + y = 2$.

9. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = (x - 1)(y - 2)$. Determine os pontos críticos, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

O gradiente de f é $\nabla f(x, y) = ((y - 2), (x - 1))$, portanto o único ponto crítico é $(1, 2)$. A matriz Hessiana de f neste ponto é

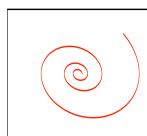
$$\mathcal{H}f(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de $\mathcal{H}f(1, 2)$ são ± 1 , portanto $(1, 2)$ é um ponto de sela.

10. (2 valores) Considere o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 0.3 \cdot y \end{aligned}$$

Simule o sistema e esboce a órbita com condição inicial $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$ no plano x - y .



Nome N°

1. (2 valores) Determine as soluções de equilíbrio da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2.$$

As soluções de equilíbrio são $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$.

2. (2 valores) Considere uma população que cresce segundo a lei

$$\frac{dN}{dt} = 2N + 3.$$

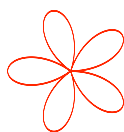
Calcule $N(t)$ e o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ sabendo que a condição inicial é $N(0) = 100$.A variável $x(t) := N(t) + 3/2$ satisfaz a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = 2x$, cuja solução é $x(t) = x(0)e^{2t}$. Portanto

$$N(t) = -3/2 + (203/2)e^{2t}$$

e o limite é $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$.

3. (2 valores) Esboce a curva definida por

$$t \mapsto (|\sin(5t)| \cos(2t), |\sin(5t)| \sin(2t)) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$



4. (2 valores) Considere o caminho

$$\mathbf{r}(t) = (t^3, \sin(3t)) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

Calcule a velocidade $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ e a aceleração $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)$.A velocidade é $\mathbf{v}(t) = (3t^2, 3\cos(3t))$ e a aceleração é $\mathbf{a}(t) = (6t, -9\sin(3t))$.

5. (2 valores) Calcule o comprimento do arco de circunferência

$$(\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{com} \quad \theta \in [0, \pi].$$

A velocidade escalar da curva $\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ é $v(\theta) = \sqrt{\|\dot{\mathbf{r}}(\theta)\|^2} = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1$. Portanto o comprimento da curva é

$$\int_0^\pi d\theta = \pi.$$

6. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = xy - y^3$. Calcule a derivada direccional de f no ponto $\mathbf{r} = (3, 2)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (1, 5)$.

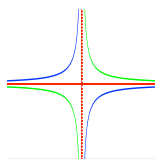
O gradiente de f é $\nabla f(x, y) = (y, x - 3y^2)$, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}) = \langle \nabla f(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle = \langle (2, 3 - 3 \cdot 2^2), (1, 5) \rangle = -43.$$

7. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = xy$ e o caminho $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))$. Calcule a derivada $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$ da função composta $t \mapsto f(\mathbf{r}(t))$ no instante $t = \pi$.

A função composta é $t \mapsto g(t) = \sin(t)\cos(t)$, e a sua derivada em $t = \pi$ é $g'(\pi) = \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi) = 1$.

8. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = x^2 - y^2$. Esboce as curvas de nível 0 e ± 1 , e determine a recta tangente à curva de nível no ponto $(1, 2)$.



O gradiente de f em $(1, 2)$ é $\nabla f(1, 2) = (2, -4)$, portanto a reta tangente à curva de nível -3 no ponto $(1, 2)$ é a reta $x - 2y = -3$.

9. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = (x - 3)(y - 1)$. Determine os pontos críticos, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

O gradiente de f é $\nabla f(x, y) = ((y - 1), (x - 3))$, portanto o único ponto crítico é $(3, 1)$. A matriz Hessiana de f neste ponto é

$$\mathcal{H}f(3, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de $\mathcal{H}f(3, 1)$ são ± 1 , portanto $(3, 1)$ é um ponto de sela.

10. (2 valores) Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

Simule o sistema e esboce a órbita com condição inicial $x(0) = 2$ e $y(0) = 2$ no plano $x-y$.

