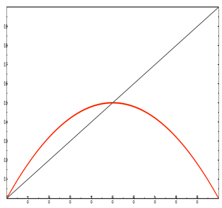
07/02/2012
recurso

A401N1 - Análise Matemática - BIOQ

Nome .... **N^o** ....

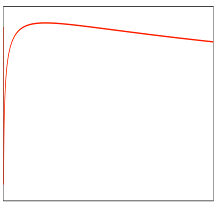
1. *(2 valores)* Considere uma população que cresce segundo a lei
$$x_{n+1} = 3x_n - 10\,.$$
Determine a solução estacionária e o valor de x_4 sabendo que a condição inicial é $x_0 = 10$.
A solução estacionária é $\overline{x} = 5$, pois
$$\overline{x} = 3\overline{x} - 10 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} = 5\,,.$$
A solução com condição inicial $x_0 = 10$ é
$$x_4 = 5 + 3^4\,(10 - 5) = 410\,.$$

2. *(2 valores)* Considere a transformação logística
$$x_{n+1} = \lambda\, x_n(1 - x_n)\,.$$
Faça uma simulação e determine o limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ quando $\lambda = 2$, dada uma população relativa inicial $x_0 = 0.3$.
O limite é $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.5$. De fato, o gráfico da transformação $x_{n+1} = f(x_n)$ é



portanto as trajetórias com condições iniciais $0 < x_0 < 1/2$ são crescentes, e o único ponto fixo no intervalo $]0, 1]$ é $1/2$.

3. *(2 valores)* Calcule a primeira e a segunda derivada da função definida, se $x > 0$, por
$$f(x) = \cos(\log x)\ ,$$
e esboce o seu gráfico.
As derivadas de $f(x)$ são
$$f'(x) = -\frac{\sin(\log x)}{x} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}\,.$$
O gráfico é



4. *(2 valores)* Calcule uma primitiva da função xe^x, ou seja,

$$\int xe^x \, dx \,.$$

Uma primitiva de xe^x é $xe^x - e^x$.

5. *(2 valores)* Calcule a derivada de

$$F(x) = \int_{-1}^{x^2} e^{t^2} \, dt \,.$$

A derivada de $F(x)$ é $F'(x) = 2xe^{x^4}$.

6. *(2 valores)* Considere uma população que decai segundo a lei

$$\frac{dN}{dt} = -2N + 100 \,.$$

Determine a solução estacionária. Calcule $N(t)$ e o limite $\lim_{t\to\infty} N(t)$ sabendo que a condição inicial é $N(0) = 80$.

A solução estacionária é $N(t) = 50$.A variável $x(t) := N(t) - 50$ satisfaz a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = -2x$, cuja solução é $x(t) = x(0)e^{-2t}$. Portanto

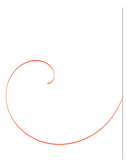
$$N(t) = 50 + 30 \cdot e^{-2t}$$

e o limite $\lim_{t\to\infty} N(t) = 50$ é a solução estacionária .

7. *(2 valores)* Esboce a curva definida por

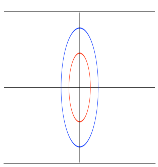
$$t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t)) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi] \,.$$

Calcule a velocidade $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ e a aceleração $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)$.



A velocidade é $\mathbf{v}(t) = (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t))$ e a aceleração é $\mathbf{a}(t) = (-2\sin(t) - t\cos(t), 2\cos(t) - t\sin(t))$.

8. *(2 valores)* Considere o campo escalar $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Esboce as curvas de nível 1 e 3, e determine a reta tangente à curva de nível no ponto $(1, 1)$.



O gradiente de f em $(1, 1)$ é $\nabla f(1, 1) = (2, 4)$, portanto a reta tangente à curva de nível 3 no ponto $(1, 1)$ é a reta $x + 2y - 3 = 0$.

9. *(2 valores)* Considere o campo escalar $f(x,y) = x^2 - 2x + 3y^2 - 2$. Determine os pontos críticos, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

O gradiente de f é $\nabla f(x,y) = (2x-2, 6y)$, portanto o único ponto crítico é $(1,0)$. A matriz Hessiana de f neste ponto é

$$\mathcal{H}f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de $\mathcal{H}f(1,0)$ são 2 e 6, portanto $(1,0)$ é um mínimo.

10. *(2 valores)* Considere o sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - y$$

Simule o sistema e esboce a órbita com condição inicial $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$ no plano x-y.