BIOQ 2011/12
A401N1 - Análise Matemática
Folhas práticas

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho
Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL
gab B.4023, tel 253 604086 (atendimento: 4^a-feira 14h-16h)
e-mail scosentino@math.uminho.pt
url `http://w3.math.uminho.pt/~scosentino`

10 de Janeiro de 2012

Conteúdo

1 Problemas e modelos elementares

1. (progressão e série geométrica) Uma *progressão geométrica* de "razão" λ é uma sequência

$$a \qquad a\lambda \qquad a\lambda^2 \qquad a\lambda^3 \qquad \dots \qquad a\lambda^n \qquad a\lambda^{n+1} \qquad \dots$$

obtida do termo inicial $x_0 = a$ usando a recursão $x_{n+1} = \lambda x_n$. A identidade

$$(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\dots+\lambda^n)(\lambda-1) = \lambda^{n+1}-1$$

mostra que, se $\lambda \neq 1$, a soma dos primeiros $n+1$ termos da progressão geométrica (com $a=1$) é

$$\boxed{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\dots+\lambda^n = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}}$$

Em particular, quando $|\lambda| < 1$, a *série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n$ é convergente, e a sua soma é

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n = 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\dots+\lambda^n+\dots = \frac{1}{1-\lambda}}$$

   - Diga se a seguintes séries são convergentes, e, se for o caso, calcule a soma.

$$1+1/2+1/4+1/8+1/16+\dots \qquad 1+10+100+1000+\dots \qquad 1+1/10+1/100+1/1000+\dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4/5)^n \qquad 9/10+9/100+9/1000+\dots \qquad 0.3333\dots$$

2. (duplicação de células) As experiências mostram que a população de uma colónia de bactérias, num período de tempo em que podemos considerar ilimitado o nutrimento e desprezáveis as toxinas produzidas, duplica-se em cada hora.

   - Se a população inicial é de 1000 células, determine a população passadas 2, 3, 10 horas.
   - Quantas horas devo esperar para ver 1024 bactérias a partir de uma única célula inicial?
   - Escreva uma fórmula para P_n, a população no tempo n horas, dada uma população inicial P_0.

3. (invenção do xadrez). Dizem que Sissa inventou o jogo do xadrez e o ofreceu ao rei de Pérsia. Ao rei, que o convidou a escolher uma recompensa, pediu um grão de arroz para o primeiro quadrado do tabuleiro, o dobro, ou seja, dois grãos, para o segundo quadrado, o dobro, ou seja, quatro grãos, pelo terceiro quadrado, e assim a seguir até o último dos quadrados do tabuleiro.

   - Quanto grãos de arroz o rei teve que pagar?
   - Se 1 Kg de arroz contém à volta de 30000 grãos, quantas toneladas de arroz foram necessárias ao rei para pagar o seu jogo?

4. (tempo de meia-vida) O decaimento de uma substância radioactiva pode ser caracterizado pelo "tempo de meia-vida" τ, passado o qual aproximadamente metade dos núcleos inicialmente presentes terá decaido. Portanto, se Q_n denota a quantidade de substância radioactiva presente no instante $n\tau$, , com n inteiro, então

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n\,.$$

   - Determine Q_n em função da quantidade inicial Q_0.
   - Determine P_n, a quantidade de producto do decaimento no instante $n\tau$.
   - Passado quanto tempo a substância radioactiva fica reduzida a $\frac{1}{32}$-ésimo da quantidade inicial?

- O tempo de meia-vida do radiocarbono ^{14}C é $\tau \simeq 5730$ anos. Mostre como "datar" um fóssil, sabendo que a proporção de ^{14}C num ser vivente é fixa e conhecida.[1]

5. (crescimento exponencial) O crescimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado com a equação recursiva

$$P_{n+1} = \lambda P_n$$

onde P_n representa a população no tempo n, dada uma certa população inicial P_0.

- Interprete o parâmetro λ imaginando que em cada unidade de tempo o incremento $P_{n+1} - P_n$ da população é a soma de uma parcela αP_n, onde $\alpha > 0$ é um coeficiênte de fertilidade, e uma parcela $-\beta P_n$, onde $\beta > 0$ é um coeficiênte de mortalidade.
- Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro λ.

6. (sequência de Fibonacci) Considere o seguinte problema, posto por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci, ou seja, "filius Bonacci")[2]:

> *Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?*

A resposta de Leonardo Pisano consiste no seguinte modelo. Se F_n o número de pares de coelhos no n-ésimo mês, então

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \, .$$

Esta é uma "lei" que prescreve recursivamente os valores dos F_n dados uns valores iniciais F_0 e F_1.

- Responda ao problema de Fibonacci, ou seja, determine F_{12}, sabendo que $F_0 = 1$ e $F_1 = 2$.
- Escreva um programa para calcular recursivamente os "números de Fibonacci" F_n.
- Seja $Q_n = F_{n+1}/F_n$ o quociente entre sucessivos números de Fibonacci. Mostre que os quocientes satisfazem a equação recursiva

$$Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

- Assuma que, para grande valores de n, os quocientes são praticamente constantes, ou seja, $Q_n \to \Phi$ se $n \to \infty$. Utilize a a equação recursiva para mostrar que

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803398874989...$$

- Mostre que o resultado anterior implica a lei assimptótica $F_{n+1} \simeq \Phi F_n$. Reconhece-a?

7. (crescimento com recolha ou adição) A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade β em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde β é um parâmetro positivo ou negativo.

- Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n.
- Determine a solução com condição inicial P_0 arbitrária.
- Para quais valores dos parâmetros λ e β as soluções P_n convergem para a solução estacionária quando o tempo $n \to \infty$?

[1] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

[2] Leonardo Pisano, *Liber Abaci*, 1202.

2 Modelos discretos e iteração

1. (modelos discretos e análise gráfica) Um sistema dinâmico com tempo discreto é definido por uma equação/lei recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$

onde x_n denota o *estado* (posição, população, concentração, temperatura, ...) do sistema no tempo $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (segundos, horas, meses, anos, ...). As *trajetórias* do sistema dinâmico são as sucessões (x_n),

$$x_0 \quad \mapsto \quad x_1 := f(x_0) \quad \mapsto \quad x_2 := f(x_1) \quad \mapsto \quad \dots \quad \mapsto \quad x_{n+1} := f(x_n) \quad \mapsto \quad \dots\,,$$

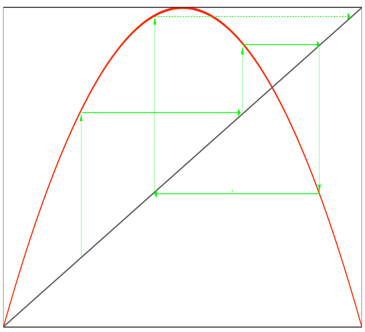
definidas a partir de uma *condição/estado inicial* $x_0 \in X$ usando a recursão $x_{n+1} = f(x_n)$. O imagem de uma trajetória, o conjunto $\mathcal{O}(x_0) := \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset X$, é dita *órbita* do estado inicial x_0.

As *soluções estacionárias*, ou *de equilíbrio*, são as trajetórias constantes $x_n = c$ para todos os tempos $n \in \mathbb{N}_0$, onde o *estado estacionário*, ou *de equilíbrio*, $c \in X$ é um "ponto fixo" da transformação $f : X \to X$, ou seja, um ponto tal que

$$f(c) = c\,.$$

As *soluções periódicas* são as trajetórias (x_n) tais que $x_{n+p} = x_n$ para todos os tempos n e algum tempo minimal $p \geq 1$, dito *período*. Portanto, uma órbita periódica é um conjunto finito $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\} \subset X$ de pontos que são permutados pela transformação f.

Se o espaço dos estados é um intervalo da recta real, as trajetórias podem ser observadas no plano x-y esboçando o caminho poligonal (*cobweb plot*)



$$(x_0, x_0) \mapsto (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \dots$$

entre o gráfico da transformação, $y = f(x)$, e a diagonal, $y = x$.

- Estude as trajetórias (ou seja, determine os estados de equilíbrio, as trajectórias periódicas, e o comportamento assimptótico de algumas das outras trajetórias) dos sistemas dinâmicos definidos pelas seguintes transformações

$$f(x) = \frac{1}{3}x \qquad f(x) = 7x \qquad f(x) = -x$$

$$f(x) = 3x + 1 \qquad f(x) = 2x - 7 \qquad f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$f(x) = |1 - x| \qquad f(x) = x^2 - \frac{1}{4} \qquad f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) = x^3 \qquad f(x) = -x^3 \qquad f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x) = x - x^3 \qquad f(x) = x + x^3$$

- Mostre que, se uma trajectória (x_n) do sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$ é convergente e se a transformação f é contínua, então o limite $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ é um estado estacionário, ou seja, $f(x_\infty) = x_\infty$.

2. (equilíbrio de Hardy-Weinberg) Considere a transmissão hereditária de um gene com dois alelos, A e a. Sejam x_0, y_0 e z_0 as frequências dos genótipos AA, Aa e aa, respectivamente, numa dada população inicial. Então as probabilidade de ter o alelo A ou a na formação de um gameta são
$$p_0 = x_0 + \frac{1}{2}y_0 \qquad \text{e} \qquad q_0 = 1 - p_0 = z_0 + \frac{1}{2}y_0 \,,$$
respectivamente. Na fecundação, teremos os genótipos AA, Aa e aa com probabilidades p_0^2, $2p_0q_0$ e q_0^2, respectivamente. Portanto, na primeira geração, as frequências dos três genótipos serão
$$x_1 = p_0^2 \,, \qquad y_1 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_1 = q_0^2 \,.$$

 - Calcule as probabilidades
 $$p_1 = x_1 + \frac{1}{2}y_1 \qquad \text{e} \qquad q_1 = z_1 + \frac{1}{2}y_1$$
 de ter os alelos A ou a na formação de um gameta na primeira geração, e mostre que as frequências dos três genótipos na segunda geração serão
 $$x_2 = p_0^2 \,, \qquad y_2 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_2 = q_0^2 \,.$$
 Ou seja, a distribuição dos três genótipos atinge um valor estacionário a partir da primeira geração (*Hardy*[3]*-Weinberg*[4] *equilibrium/principle/law*)

3. (selecção natural, modelo de Fisher, Wright e Haldane) Um modelo simples de seleção natural, proposto por R. Fisher[5], S. Wright[6] e J.B.S. Haldane[7], considera apenas um gene com dois alelos, A e a. A vantagem ou desvantagem competitiva dos diferentes genótipos, AA, Aa e aa, é modelada por coeficientes de "sucesso biológico" (*fitness*), ϕ_{AA}, ϕ_{Aa} e ϕ_{aa}, que determinam as diferentes taxas de sobrevivência, e portanto de reprodução. Sejam $0 \le p_n \le 1$ e $q_n = 1 - p_n$ as frequências dos alelos A e a, respectivamente, na n-ésima geração. Então a frequência do alelo A na $(n+1)$-ésima geração é dada por
$$p_{n+1} = \frac{\alpha p_n^2 + p_nq_n}{\alpha p_n^2 + 2p_nq_n + \beta q_n^2}$$
onde $\alpha = \phi_{AA}/\phi_{Aa} > 0$ e $\beta = \phi_{aa}/\phi_{Aa} > 0$.

 - Esboce a transformação para diferentes valores de α e β. Observe que soluções estacionárias são as soluções triviais 0 e 1, e, quando α e β são os dois superiores ou os dois inferiores a 1,
 $$\overline{p} = \frac{|\beta - 1|}{|\alpha - 1| + |\beta - 1|} \,.$$
 - Discuta o comportamento assimptótico da frequência p_n quando $\alpha < 1 < \beta$ e quando $\beta < 1 < \alpha$. Mostre que na população assimptótica apenas sobrevive o alelo favorecido.

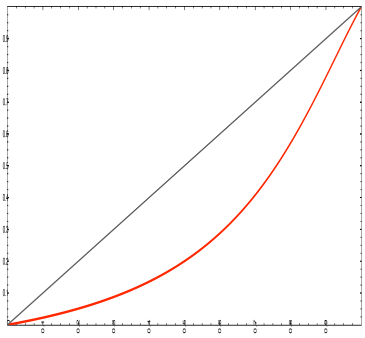
[3] G.H. Hardy, Mendelian proportions in a mixed population, *Science* **28** (1908), 49-50.

[4] W. Weinberg, Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen, *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Neturkunde in Württemberg* **64** (1908), 368-382.

[5] R.A. Fisher, *Genetical Theory of Natural Selection*, Clarendon Press, 1930.

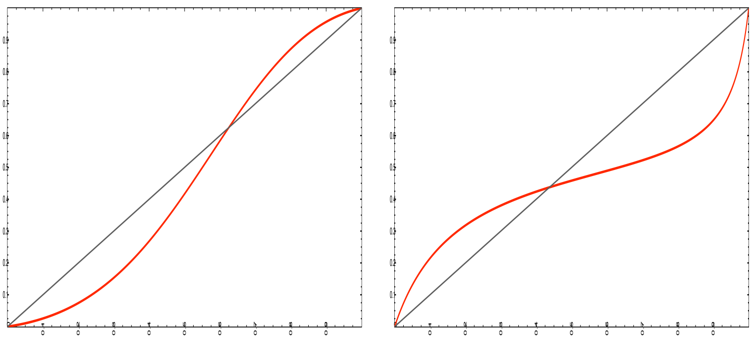
[6] S. Wright, Evolution in Mendelian populations, *Genetics* **16** (1931), 97-159.

[7] J.B.S. Haldane, A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection (1924-1934). J.B.S. Haldane, The effect of variation on fitness, *Am. Nat.* **71** (1937), 337-349.



$\alpha < 1 < \beta$ $\qquad$ $\beta < 1 < \alpha$

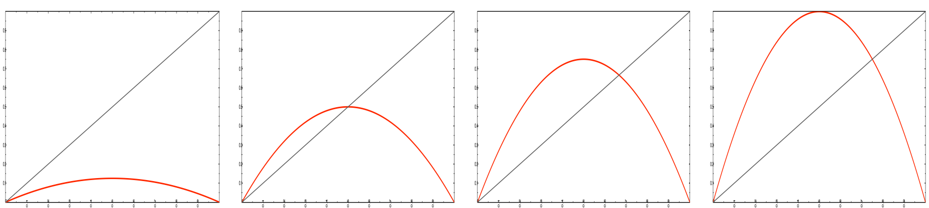
- Mostre que, quando $\alpha > 1$ e $\beta > 1$ (ou seja, os genótipos AA e aa têm uma vantagem competitiva em relação ao genótipo Aa), o estado estacionário $\overline{p}$ é instável, e pequenas perturbações $x_0 = \overline{p} \pm \varepsilon$ do equilíbrio produzem comportamentos assimptóticos diferentes, a extinção de A ou a extinção de a, dependendo do sinal (*disruptive selection*).
- Mostre que, quando $\alpha < 1$ e $\beta < 1$ (ou seja, o genótipo Aa é o favorecido), o estado estacionário $\overline{p}$ é estável, e portanto os dois alelos convivem na população assimptótica (*heterosis*).



Disruptive selection: $0 < \alpha < \beta$. $\qquad$ *Heterosis*: $\alpha < \beta < 0$.

4. (transformação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é
$$P_{n+1} = \lambda P_n \left(1 - P_n/M\right)$$
onde $P_n \geq 0$ é a população no tempo n, e a contante $M > 0$ é a maior população suportada pelo meio ambiente (observe que $P_{n+1} < 0$ quando $P_n > M$, o que pode ser interpretado como "extinção" no tempo $n+1$). A substituição $x_n = P_n/M$ transforma a lei acima na forma adimensional
$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)\,,$$
chamada *transformação logística*[8].

   - Esboce o gráfico da transformação logística para diferentes valores do parâmetro λ.



Gráficos da transformação logística quando $\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

[8] Robert M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459-467.

- Mostre que os ponto estacionários são o estado trivial 0 e

$$\overline{x} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- Implemente um programa para fazer simulações do sistema.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $0 < \lambda \leq 1$.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $1 < \lambda \leq 3$.
- Observe os fenómenos que acontecem ao variar o parâmetro λ entre 3 e 4.
- O que acontece quando $\lambda > 4$?

5. (Hénon map) A *mapa de Hénon*[9] é a transformação

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - \alpha x_n^2 \\ y_{n+1} = \beta x_n \end{cases}$$

Simule as órbitas (no plano) ao variar os parâmetros α e β. Em particular, veja o que acontece quando $\alpha \simeq 1.4$ e $\beta \simeq 0.3$.

[9] M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69-77.

3 Derivadas e aplicações

1. (movimento rectilíneo uniforme) A lei do movimento rectilíneo uniforme num referencial inercial é
$$x(t) = x_0 + v_0 t\,,$$
onde $x(t) \in \mathbb{R}$ denota a posição no tempo $t \in \mathbb{R}$, v_0 a velocidade e x_0 a posição inicial.
   - Determine a velocidade média no intervalo de tempos entre t e $t+\varepsilon$, e a velocidade instantânea $v(t) := \dot{x}$ no tempo t.
   - Determine a lei horária de uma partícula que viaja com velocidade $v = 3$ m/s e que no instante $t = 3$ s está na posição $x(3) = 7$ m. Quando estava na origem?

2. (Aquiles e a tartaruga) Aquiles começa a correr com velocidade constante $V = 10$ m/s em direção de uma tartaruga que a sua vez foge com velocidade constante $v = 0.1$ m/s. A distância inicial entre Aquiles e a tartaruga é de 100 m.
   - Determine quanto tempo demora Aquiles a percorrer $1/2$, $1/2+1/4$, $1/2+1/4+1/8$, ..., da distância inicial, e passado quanto tempo chega ao ponto onde estava inicialmente a tartaruga.
   - Determine a distância $d(t)$ entre Aquiles e a tartaruga no tempo t.
   - Aquiles alcança a tartaruga? Se sim, em quanto tempo?

3. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela lei horária
$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,,$$
onde $z(t)$ é a altura no tempo t, z_0 é a altura inicial,v_0 é velocidade inicial, e $g \simeq 9.8$ m/s^2 é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre.
   - Determine a velocidade média no intervalo de tempos entre t e $t+\varepsilon$, e a velocidade instantânea no tempo t.
   - Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem $\simeq 56$ metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo, o tempo necessário para a pedra atingir o chão e a sua velocidade no instante do impacto.
   - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
   - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

4. (derivada) A *derivada* da função $f(x)$ no ponto x é o limite
$$\boxed{f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}}$$
ou seja, o número $\lambda = f'(x)$ tal que $f(x+\varepsilon) - f(x) = \lambda \cdot \varepsilon + r(\varepsilon)$, onde o "resto" $r(\varepsilon)$ é tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Em particular,
$$f(x+\varepsilon) \simeq f(x) + f'(x) \cdot \varepsilon$$
é a melhor aproximação linear de f numa vizinhança de x.
A notação de Leibniz para a derivada f' é $\frac{df}{dx}$, ou $\frac{d}{dx} f$, ou $\frac{dy}{dx}$ se $y = f(x)$.
A derivada segunda de f é a derivada da derivada, ou seja, $f'' = (f')'$, ...
   - Calcule as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde existem.
$$f(x) = 2x - 3 \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x) = |x| \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

5. (derivadas elementares e regras) Derivadas elementares são

$$\boxed{\tfrac{d}{dx}\text{constante} = 0\,, \qquad \tfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\,, \qquad \tfrac{d}{dx}x^{1/n} = \tfrac{1}{n}x^{-1+1/n}\,, \qquad \sin' = \cos\,, \qquad \cos' = -\sin}$$

A derivada é linear, ou seja

$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \qquad (f+g)' = f' + g'}$$

e satisfaz as regras (regra de Leibniz e derivação de um quociente)

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'\,, \qquad (f/g)' = \tfrac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{nos pontos onde } g \neq 0}$$

- Calcule a derivada $f'(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde podem ser definidas.

$$f(x) = 3x \qquad f(x) = x\sin(x) \qquad f(x) = 17$$
$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = x^{-1} - x^{5/3}$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^3+2} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

- Calcule as derivadas $P'(0)$, $P''(0)$, $P'''(0)$, ..., $P^{(n)}(0)$, $P^{(n+1)}(0)$, de um polinómio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\,.$$

6. (aproximação linear) Estime os seguintes valores, usando a aproximação linear

$$\boxed{f(x+\varepsilon) \simeq f(x) + f'(x) \cdot \varepsilon}$$

de uma função apropriada:

$$\sin(0.01) \qquad \sqrt{1.1} \qquad \cos(\pi - 0.03) \qquad \frac{1}{1+0.001}$$

7. (derivação de função composta: regra da cadeia) A derivada da função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,.}$$

- Calcule a derivada $f'(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde podem ser definidas.

$$f(x) = \cos(x^2) \qquad f(x) = \sqrt{2x-1} \qquad f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$$
$$f(x) = (\sin(x))^2 \qquad f(x) = \sin(\cos(x^3)) \qquad f(x) = \frac{\cos(2x) - x}{\sqrt{x}}$$

8. (derivação de função inversa) Se $h(y)$ é a função inversa de $f(x)$, ou seja, $h(f(x)) = x$ e $f(h(y)) = y$, então

$$\boxed{h'(y) = 1/f'(h(y))}$$

nos pontos $y = f(x)$ onde $f'(x) \neq 0$.

- Calcule as derivadas das seguintes funções nos pontos onde podem ser definidas.

$$f(x) = \arcsin(x) \qquad f(x) = \arccos(x) \qquad f(x) = \arctan(x)$$

- Calcule a derivada da função inversa de $f(x) = x + x^3$ no ponto $y = 0$.

9. (taxas de variação) Determine a taxa de variação
   - $\frac{dA}{dr}$, onde A é a área de uma circunferência e r o seu raio,
   - $\frac{dV}{dr}$, onde V é o volume de uma bola e r o seu raio,
   - $\frac{dV}{d\ell}$, onde V é o volume de um cubo e ℓ o seu lado.

10. (crescimento de uma célula) Uma célula esférica cresce absorvendo material através da sua superfície, a uma taxa αS gr/s, onde α é uma constante e S denota a área da superfície da célula
    - Determine a taxa de crescimento do raio r da célula, na hipótese em que a sua densidade $\rho \simeq 1$ gr/cm^3 é constante. Deduza a lei horária $t \mapsto r(t)$, dado $r(0)$.
    - Se o metabolismo da célula precisa de material absorvido a uma taxa não inferior a βV gr/s, onde β é uma constante e V denota o volume da célula, determine o raio máximo que a célula pode atingir.

11. (estudo de funções, máximos e mínimos) Uma função diferenciável $f(x)$ é crescente nos intervalos onde $f'(x) > 0$, decrescente nos intervalos onde $f'(x) < 0$, constante nos intervalos onde $f'(x) = 0$. Se a é um ponto de máximo o mínimo local da função diferenciável $f(x)$ definida numa sua vizinhança, então a é um *ponto crítico* de $f(x)$, ou seja, $f'(a) = 0$.
    - Esboce os gráficos das seguintes funções, definidas em oportunos domínios.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \qquad f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f(x) = x - \sin(x) \qquad f(x) = \sin(x) + \sin(2x) \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

    - Mostre que, entre todos os rectângulos de perímetro P fixado, o quadrado é o que tem área maior.
    - Mostre que, dados n números $a_1, a_2, ..., a_n$, o valor de x que minimiza a soma dos "erros quadráticos"

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + ... + (x - a_n)^2$$

      é a média aritmética

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\,.$$

12. (teorema e desigualdade do valor médio) O *teorema do valor médio* diz que se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, e diferenciável no seu interior (a, b), então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)\,.}$$

Em particular, se $|f'(c)| \leq \lambda$ para todo o $c \in (a, b)$, então vale a desigualdade

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq \lambda \cdot |b - a|\,.}$$

    - Mostre que, se $f(x)$ é um polinómio de segundo grau, então a recta entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é paralela à recta tangente ao gráfico de f no ponto médio $\frac{a+b}{2}$.
    - Mostre que para todos os x e y

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

    - Mostre que para todos $0 < y \leq x$

$$ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)\,.$$

4 Aproximação

1. (aproximação polinomial) O *polinómio de Taylor* de grau n da função $f(x)$ numa vizinhança do ponto a é

$$\boxed{P_n(x-a) := f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

Se $f(x)$ possui $(n+1)$ derivádas numa vizinhança do ponto a, então o "resto" $r_n(\varepsilon) := f(a+\varepsilon) - P_n(\varepsilon)$ pode ser estimado como

$$\boxed{r_n(\varepsilon) = \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,\varepsilon^{n+1}}$$

onde $c \in [a,x]$ (ou $c \in [x,a]$), se $\varepsilon = x - a$ é suficientemente pequeno. Em particular, $r_n(\varepsilon)/\varepsilon^n \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

- Prove as seguintes aproximações, validas para x suficientemente pequeno,

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \qquad \log(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \ldots \qquad \cos(x) \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$$

- e determine estas outras

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + \ldots \qquad \sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x + \ldots$$

$$\log(1+x^2) \simeq \ldots \qquad \sin(\pi e^{-x}) \simeq \ldots$$

- Aproxime e, e estime o erro $r_n(x)$ na sua aproximação, usando os polinómios de Taylor

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

(observe que $1 \leq e^x \leq 3$ no intervalo $x \in [0,1]$). Deduza um valor aproximado de e com um erro < 0.001.

2. (algoritmo de Heron) Considere o problema de determinar o lado ℓ de um quadrado dada a sua área A, ou seja, o número $\ell = \sqrt{A}$.

Um método, utilizado provavelmente pelos babilónios[10] [11] e descrito por Heron[12], consiste em construir recursivamente rectângulos de área A com lados cada vez mais próximos. Se x_1 e y_1 são a base e a altura do primeiro rectângulo, e portanto $x_1 y_1 = A$, então o segundo rectângulo tem como base a média aritmética de base e altura do primeiro, o terceiro rectângulo tem como base a média aritmética da base e a altura do segundo, e assim sucessivamente. A equação recursiva que determina as bases dos rectângulos é portanto

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

- Mostre que bases e alturas dos rectângulos verificam as equações recursivas

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad y_{n+1} = \frac{2}{1/x_n + 1/y_n}$$

[10] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968.
[11] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.
[12] Heron of Alexandria, *Metrica*, Book I.

- Calcule a diferença $x_{n+1} - y_{n+1}$ e mostre que
$$y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_3 < x_2$$
e que
$$x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2}$$
- Estime $\sqrt{2}$ com um erro < 0.01 e 0.001.
- Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros n dígitos decimais de $\sqrt{2}$ usando o método dos babilónios.

3. (estabilidade dos estados estacionários) Seja $\overline{x}$ um estado estacionário da equação recursiva não leccionado
$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$
ou seja, um ponto tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Se a transformação $f(x)$ é diferenciável, o príncipio das contrações permite decidir sobre a estabilidade do estado estacionário.

Se $|f'(\overline{x})| < 1$, então o ponto fixo é *atrativo*: as trajetórias de todo o ponto x_0 suficientemente próximo de $\overline{x}$ convergem para $\overline{x}$, ou seja $x_n \to \overline{x}$ quando $n \to \infty$. Se $|f'(\overline{x})| > 1$, então o ponto fixo é *repulsivo*: as trajetórias de todo o ponto $x_0 \neq \overline{x}$ numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$ saem da vizinhança em tempo finito.

Se $f'(\overline{x}) = 0$, o ponto fixo $\overline{x}$ é dito *super-atrativo*[13].

- Estude a natureza dos pontos fixos das seguintes transformações
$$f(x) = \alpha x \qquad f(x) = \alpha x^3 \qquad f(x) = \alpha x + \beta x^2$$
ao variar os parâmetros.
- Digite 0.1 na sua máquina de calcular, e pressione repetidamente a tecla "cos". O que acontece?
- Estude a natureza do ponto fixo não trivial do modelo logístico (exercício 4 da folha 2)
$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$
ao variar o parâmetro λ.

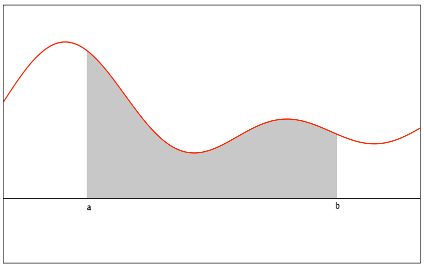
4. (método de Newton) O *método de Newton* para aproximar as raizes de um polinómio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$, ou seja, resolver a equação $P(z) = 0$, consiste em escolher uma primeira aproximação z_0, e iterar não leccionado
$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}\,.$$
Ou seja, se z_0 é uma primeira conjetura, uma conjetura melhor é a raiz da aproximação linear $P(z) \simeq P(z_0) + P'(z_0) \cdot (z - z_0)$.

- Mostre que se a sucessão (z_n) converge, i.e. $z_n \to z_\infty$, e se $P'(z_\infty) \neq 0$, então o limite z_∞ é uma raiz do polinómio. Mostre que, se a conjetura inicial z_0 está suficientemente próxima de uma raiz $\overline{z}$ e $P'(\overline{z}) \neq 0$, então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
- Verifique que o método de Newton aplicado ao polinómio quadrático $z^2 - a$, com $a > 0$, corresponde ao algoritmo de Heron.
- Escreva a receita do método de Newton para resolver $z^n - a = 0$, com $a > 0$ e $n \geq 2$.
- Utilize o método de Newton para estimar raizes de
$$z^2 + 1 + z \qquad z^3 - z - 1 \qquad z^5 + z + 1 \qquad z^3 - 2z - 5$$

[13] Usando o polinómio de Taylor de grau 1 com resto, vê-se que, se x_0 está numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$, então a trajetória de x_0 converge para o ponto fixo $\overline{x}$ e a velocidade de convergência é "quadrática", ou seja,
$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq \beta \cdot |x_n - \overline{x}|^2$$
onde β é uma constante.

5 Área, integral e métodos de integração

1. (área e integral) Se $f(x)$ é uma função (seccionalmente) contínua, o "integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$", denotado por $\int_a^b f(x)\,dx$, representa, quando $f(x)\geq 0$, a área da região



$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a\leq x\leq b \text{ e } 0\leq y\leq f(x)\}$$

Algumas propriedades elementares do integral são

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx := 0\,, \qquad \int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx\,, \qquad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx}$$

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\,, \qquad \int_a^b \lambda\cdot f(x)dx=\lambda\cdot\int_a^b f(x)dx \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx \qquad \forall c\in\mathbb{R}\,, \qquad \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x/\lambda)\,dx=\lambda\cdot\int_a^b f(x)dx \qquad \forall\lambda>0}$$

$$\boxed{f(x)\leq g(x) \quad \forall x\in[a,b] \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx}$$

$$\boxed{m\leq f(x)\leq M \quad \forall x\in[a,b] \qquad \Rightarrow \qquad m\cdot(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M\cdot(b-a)}$$

Em particular, o teorema do valor médio afirma que

$$\boxed{f(x) \ \text{ contínua} \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, c\in[a,b] \quad \text{tal que} \quad \int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a)}$$

- Calcule os seguintes integrais.

$$\int_0^1 3dx \qquad \int_{-2}^2 7\,dx \qquad \int_1^{10} x\,dx \qquad \int_{-2}^3 (-2x)\,dx$$

$$\int_{-2}^2 |x|\,dx \qquad \int_0^3 (5x-2)\,dx \qquad \int_{-33}^{33} (11-x)\,dx$$

$$\int_0^{n+1} [x]\,dx \text{ [14]} \qquad \int_6^x 7t\,dt \qquad \int_x^{x^2} (1-t)\,dt$$

2. (primitivas e cálculo de integrais) A função $F(x)$ é uma *primitiva* da função contínua $f(x)$ se $F'(x)=f(x)$. A notação de Leibniz é $F(x)=\int f(x)dx$. Duas primitivas $F(x)$ e $G(x)$ de $f(x)$ diferem por uma constante, pois a derivada da diferença é $F'(x)-G'(x)=0$.

   O *teorema fundamental do cálculo* (Leibniz e Newton) diz que se $f(x)$ é contínua então $\int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x)\,.}$$

   Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$, ou seja,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\,.}$$

[14] $[x]$ denota a "parte inteira de x", ou seja, o único inteiro $n\in\mathbb{Z}$ tal que $n\leq x<n+1$.

- Calcule as seguintes primitivas.

$$\int dx \qquad \int x^2\, dx \qquad \int \frac{1}{x^3}\, dx \qquad \int \sqrt{2x-1}\, dx$$

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx \qquad \int \sin(\theta)\, d\theta \qquad \int \left(\cos(\pi x) - 2x^3\right)\, dx \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Calcule os seguintes integrais.

$$\int_0^3 (x-1)\, dx \qquad \int_{-1}^1 (1-|x|)\, dx \qquad \int_0^{10} \sqrt{x}\, dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\, dx$$

$$\int_{-3}^2 \sqrt{x^2}\, dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(2x)\, dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \int_3^5 \left(x^{1/3} - x^{1/5}\right)\, dx$$

$$\int_{-5}^5 \left(1 + 399x - x^2\right)\, dx \qquad \int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx \qquad \int_{-1}^1 (33-11x)^{66}\, dx$$

- Calcule a derivada das seguintes funções

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \qquad F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)\, dt \qquad F(x) = \int_{2x}^{x^3} (t - t^2)\, dt$$

- Calcule a área da região do plano limitada entre as curvas

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x^3\,, \qquad \text{com } 0 \le x \le 1$$

$$y = \sin(x) \quad \text{e} \quad y = -\sin(x)\,, \qquad \text{com } 0 \le x \le \pi$$

$$y = x^{1/3} \quad \text{e} \quad y = x^{1/2}\,, \qquad \text{com } 0 \le x \le 1$$

3. (logaritmo e exponencial) O *logaritmo* é a função $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definida pelo integral

$$\boxed{\log(x) := \int_1^x \tfrac{dt}{t}\,.}$$

O valor do logaritmo em 1 é $\log(1) = 0$, e

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \text{e} \qquad \log(1/x) = -\log(x) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$$

A derivada do logaritmo é $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Em particular, o logaritmo é uma função estritamente crescente de $\mathbb{R}_+ := [0,\infty[$ sobre $\mathbb{R}$.

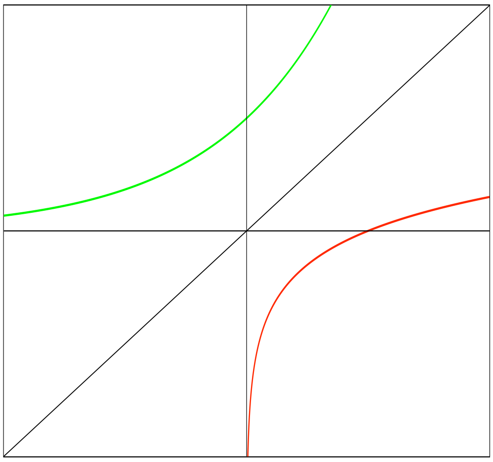
O *exponencial* é a função inversa do logaritmo, ou seja, a função $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\boxed{\exp(\log x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+\,, \qquad \log(\exp(y)) = y \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}}$$

O valor $\exp(x)$ é também denotado por e^x, onde $e := \exp(1)$ (ou seja, $\log(e) = 1$). O valor do exponencial em 0 é $\exp(0) = 1$, e

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \text{e} \qquad \exp(-x) = 1/\exp(x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

A derivada do exponencial é $\exp'(x) = \exp(x)$. Em particular, o exponencial é uma função estritamente crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}_+$.



Gráficos do logaritmo (vermelho) e do exponencial (verde).

- Calcule os seguintes integrais

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} \qquad \int_{\log 1}^{\log 2} e^x dx \qquad \int \frac{dx}{x-1} \qquad \int_1^2 e^{x-1} dx$$

$$\int 2e^{3x} dx \qquad \int_0^7 e^{-x} dx \qquad \int \frac{1}{x(1-x)} dx$$

4. (integração por substituição) A substituição $y = g(x)$, donde $dy = g'(x)dx$, transforma $f(g(x))g'(x)dx$ em $f(y)dy$, e portanto

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,.}$$

- Calcule

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx \qquad \int \frac{\cos(\log x)}{x} dx \qquad \int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{5+2\sin(\theta)}} d\theta \qquad \int \tan(\theta) d\theta$$

$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx \qquad \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \qquad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \cos(x) e^{\sin(x)} dx \qquad \int \frac{x}{x^2-1} dx \qquad \int_{\log 1}^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx \qquad \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

5. (integração por partes) Pela regra de Leibniz, a derivada de fg é $(fg)' = f'g + fg'$, portanto

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

- Calcule

$$\int_0^1 xe^{-x} dx \qquad \int \sin(\log(x)) dx \qquad \int_1^{e^3} \log(x) dx$$

$$\int x\cos(x) dx \qquad \int x^2 \sin(x) \qquad \int e^x \sin(x) dx$$

6. (velocidade + condição inicial $\Rightarrow$ lei horária) Uma partícula é deslocada numa reta com velocidade $v(t) = t - t^2$.

- Determine a posição $q(t)$ sabendo que a posição inicial é $q(0) = 1$.

7. (aceleração + condições iniciais $\Rightarrow$ lei horária) Uma partícula é deslocada numa reta com aceleração $a(t) = \sin(2t)$.
   - Determine a velocidade $v(t)$ sabendo que a velocidade inicial é $v(0) = 3$.
   - Determine a posição $q(t)$ sabendo que a posição inicial é $q(0) = 4$.

8. (trabalho de expansão) O trabalho efectuado por um gás perfeito numa expansão do volume V_0 até o volume V_1 é dado pelo integral

$$L = \int_{V_0}^{V_1} p(V)\, dV$$

   onde p é a pressão.
   - Calcule o trabalho efectuado por um gás que expande de 3 l até 4 l a uma pressão constante de 2 atm.
   - Calcule o trabalho efectuado por 1 mole de oxigénio que expande isotermicamente, à temperatura de $T = 20\ ^o$C, de 1 l até 2 l (a equação de estado de gás perfeito é $pV = nRT$, onde n é o número de moles, $R \simeq 8.314 \times 10^7$ J/K mol, e T é a temperatura absoluta).

Formulário primitivas

	(função)	("uma" primitiva)
	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x)$
(por substituição)	$f(y(x))y'(x)$	$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy$
(por partes)	$f(x)g'(x)$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
(constantes)	λ	$\int \lambda dx = \lambda x$
(potências, $\alpha \neq -1$)	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
(logaritmo)	$1/x$	$\int \frac{dx}{x} = \log\lvert x\rvert$
(exponencial)	e^x	$\int e^x dx = e^x$
(seno)	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
(coseno)	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)$
(tangente)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
(cotangente)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\mathrm{cotan}(x)$
(arco cujo seno)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$
(arco cuja tangente)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
(exponencial $\times$ seno)	$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x)-\beta\cos(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
(exponencial $\times$ coseno)	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
(coseno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\cos(nx)\cos(mx)$	$\int \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ seno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx)\sin(mx)$	$\int \sin(nx)\sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx)\cos(mx)$	$\int \sin(nx)\cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)}$
(x $\times$ coseno, $n \neq 0$)	$x\cos(nx)$	$\int x\cos(nx)dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n}$
(x $\times$ seno, $n \neq 0$)	$x\sin(nx)$	$\int x\sin(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}$
(x^k $\times$ coseno, $n \neq 0$)	$x^k\cos(nx)$	$\int x^k\cos(nx)dx = \frac{x^k\sin(nx)}{n} - \frac{k}{n}\int x^{k-1}\sin(nx)dx$
(x^k $\times$ seno, $n \neq 0$)	$x^k\sin(nx)$	$\int x^k\sin(nx)dx = -\frac{x^k\cos(nx)}{n} + \frac{k}{n}\int x^{k-1}\cos(nx)dx$

6 Equações diferenciais ordinárias

1. (partícula livre) A trajetória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}$ de uma partícula livre de massa $m > 0$ num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0\,, \qquad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \qquad ma = 0\,,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$ denota a *velocidade* e $a(t) := \ddot{q}(t)$ denota a *aceleração* da partícula. Em particular, o *momento linear* $p := mv$, é uma constante do movimento (ou seja, $\frac{d}{dt}p = 0$), de acordo com o princípio de inércia de Galileo ou a primeira lei de Newton[15].

- Verifique que soluções da equação de Newton da partícula livre são as retas afins

$$q(t) = s + vt$$

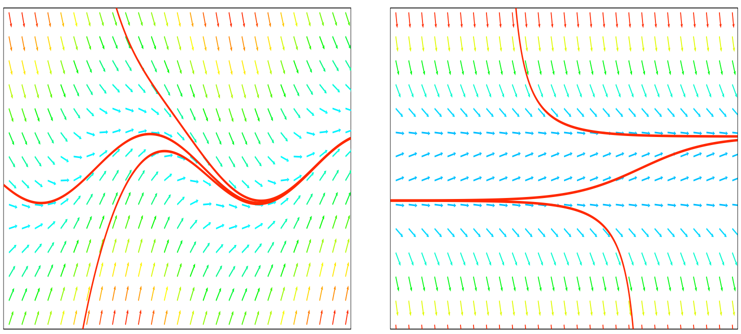
onde $s, v \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias, e interprete s e v.

- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $q(0) = 3$ com velocidade $\dot{q}(0) = 2$.
- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $q(0) = 0$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $q(2) = 3$ no instante $t_1 = 2$. Calcule a sua velocidade.

2. (equações diferenciais ordinárias) Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem é uma lei

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ de um sistema dinâmico, onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ denota a derivada do observável x em ordem ao tempo t, e $v(t, x)$ é um "campo de direcções" (uma recta com declive $v(t, x)$ para cada ponto (t, x)). Uma *solução* da EDO é uma função $t \mapsto x(t)$ tal que $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num certo intervalo, ou seja, uma função cujo gráfico é tangente ao campo de direcções em cada ponto $(t, x(t))$ do gráfico. Se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.



Campos de direções e algumas soluções de $\dot{x} = \sin(t) - x$ e de $\dot{x} = x(1 - x)$.

- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $t\dot{x} - 3x = 0$? E a função $x(t) = 0$?

3. (o exponencial) O *exponencial* (real) é a função $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (notação $\exp(t)$ ou e^t) definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots\,,$$

que converge uniformemente em cada intervalo limitado da recta real.

[15] "Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare" [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

- Verifique que $x(t) = e^t$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = x\,.$$

Verifique que $x(t) = x_0 e^t$ é uma solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.

- Mostre que, se $y(t)$ é uma solução de $\dot{y} = y$ com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $y(t)/e^t$ é constante e igual a x_0. Deduza que $x_0 e^t$ é a única solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.
- Verifique que a função $x(t) = e^{\lambda t}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = \lambda x$.
- Mostre que $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ é a única solução da equação diferencial $\dot{x} = \lambda x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.

4. (integração de EDOs simples) O *teorema fundamental do cálculo*[16] afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s)\,ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto, se $v(t)$ é um campo de direções contínuo, a solução da EDO

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s)ds}$$

- Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(t)$, então também $x(t) + c$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.
- Integre (ou seja, determine soluções com $x(t_0) = x_0$) as seguintes EDOs.

$$\dot{x} = 2\sin(t) \qquad \dot{x} = e^{-t} \qquad \dot{x} = \cos(3t) \qquad \dot{x} = t - t^2$$

5. (campos de vetores e EDOs autónomas) Um campo de vetores $v : X \to \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x)\,.$$

Se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio)* da equação diferencial. Se $v(x_0) \neq 0$, então uma solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinanda separando as variáveis, $\frac{dx}{v(x)} = dt$, e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$.

$$\boxed{\dot{x} = v(x)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}}$$

Se o campo $v(x)$ é diferenciável, estas soluções são únicas.

- Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(x)$, então também $x(t - c)$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.
- Considere as seguintes EDOs de primeira ordem

$$\dot{x} = -3x \qquad \dot{x} = 2x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = x^2 \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)$$

Determine as soluções estacionárias. Esboce os campos de direções e conjeture sobre o comportamento das soluções. Determine, se possível, fórmulas para a solução com condição inicial $x(0) = x_0$, e esboce o gráfico de algumas das soluções encontradas.

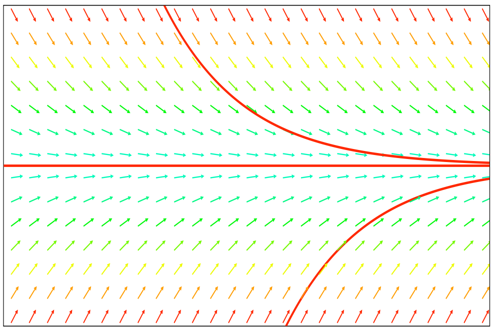
[16] A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é "*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*".

6. (decaimento radioactivo) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a
$$\dot{N} = -\beta N\,,$$
onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a "vida média" dos núcleos.

   - Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$. O que acontece quando $t \to \infty$?
   - O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, ou seja, o tempo T tal que $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$. Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida T e o parâmetro β.
   - O radiocarbono ${}^{14}C$ tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é fixa e conhecida[17].
   - Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante α, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei
   $$\dot{N} = -\beta N + \alpha\,.$$
   Verifique que a solução de equilíbrio é $\overline{N} = \alpha/\beta$. Mostre que $N(t) \to \overline{N}$ quando $t \to \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (considere a mudança de variável $x(t) = N(t) - \overline{N}$).



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = -2x + 1$.

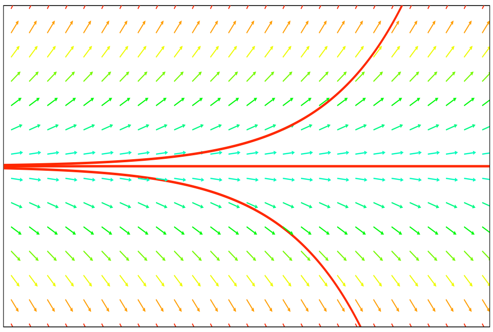
7. (atrito e tempo de relaxamento) O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é
$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$
onde $\gamma > 0$ é o "coeficiente de atrito".

   - Mostre que a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz
   $$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$
   onde $\tau = m/\gamma > 0$ é um "tempo de relaxamento". Resolva a equação com velocidade inicial $v(0) = v_0 > 0$. Deduza a trajectória $q(t)$ com posição inicial $q(0) = 0$.
   - Mostre que a energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz
   $$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T\,,$$
   e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$.

[17] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

8. (crescimento exponencial) Um modelo do crescimento (Malthusiano) de uma população num meio ambiente ilimitado é
$$\dot{N} = \lambda N \, ,$$
onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t, e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$).

   - Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
   - O que acontece à solução para grandes intervalos de tempo?
   - Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
   - Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\alpha > 0$, então
   $$\dot{N} = \lambda N - \alpha$$
   Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assimptótico das outras soluções.

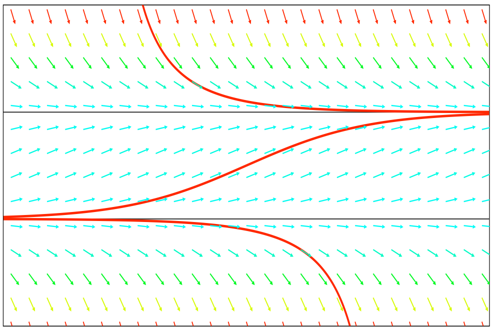


Campo de direções e soluções da equação $\dot{x} = 2x - 1$.

9. (equação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é a *equação logística*[18]
$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$$
onde $\lambda > 0$ e a constante $M > 0$ é a população máxima suportada pelo meio ambiente. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \to 0$ quando $N \to M$.

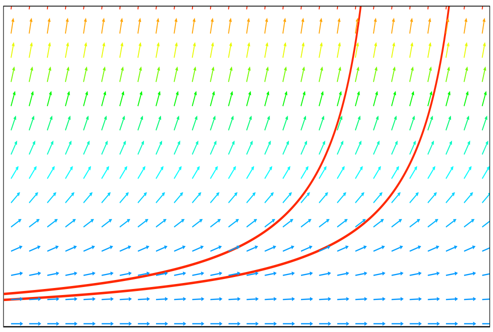
   - Seja $x(t) = N(t)/M$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística "adimensional"
   $$\dot{x} = \lambda x(1 - x) \, .$$
   - Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
   - Verifique que
   $$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}} \, ,$$
   é a solução da equação logística com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$.
   - Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.

[18] Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.



Campo de direções e soluções da equação logística.

10. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é
$$\dot{N} = \alpha N^2 .$$
   - Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
   - Observe que as soluções que determinou não estão definidas para todos os tempos: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!



Campo de direções e soluções da equação $\dot{x} = x^2$.

11. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO *separável* não leccionado
$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$
com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se $f(x_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por
$$\boxed{\dot{x} = f(x)/g(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}}$$
   - Resolva as seguintes EDOs separáveis
$$\dot{x} = tx^3 \qquad t\dot{x} + t = t^2 \qquad \dot{x} = t^3/x^2 \qquad \dot{x} = e^{x+3t^2} t$$
$$\dot{x} = \frac{t-1}{x^2} \qquad \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$\left(t^2+1\right)\dot{x} = 2tx \qquad \dot{x} = t\left(x^2 - x\right) \qquad \dot{x} = e^{t-x}\,,$$
definidas em oportunos domínios.

12. (EDOs lineares de primeira ordem) A solução de uma EDO *linear de primeira ordem*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar (apenas) uma solução não trivial $y(t)$ da "equação homogénea associada", $\dot{y} + p(t)y = 0$, por exemplo $y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)ds\right)$, substituir a conjetura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogénea $\dot{x} + p(t)x = q(t)$, e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u)du}\left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u)du} q(s)ds\right)\,.}$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \qquad \dot{x} + 2x = t \qquad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \qquad \dot{x} + tx = t^2$$

  definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas nos intervalos indicados:

$$\begin{aligned} 2\dot{x} - 3x = e^{2t} &\qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1 \\ \dot{x} + x = e^{3t} &\qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2 \\ t\dot{x} - x = t^3 &\qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3 \\ \dot{x} + tx = t^3 &\qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0 \\ dr/d\theta + r\tan\theta = \cos\theta &\qquad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1 \end{aligned}$$

13. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula (ou um paraquedista) próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é m coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -kv - mg\,.$$

- Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.
- Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assimptótico $\overline{v}$ quando $t \to \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
- Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = s$.

14. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.

- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E\sin(\omega t)$. Se não conseguir, mostre que a solução com $I(0) = 0$ tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde α é uma constante que depende de ω, L e R.

15. (lei do arrefecimento de Newton) Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\,(T - M(t))$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução $T(t)$ como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e de $M(s)$ com $0 \leq s \leq t$.
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100^oC, é colocada numa sala cuja temperatura é de 20^oC. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

16. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.
- A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.
- A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.
- A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

7 Modelos contínuos e simulações

1. (método de Euler) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x)\,.$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt\,,$$

dado um "passo" dt suficientemente pequeno. Portanto, os valores $x(t_n)$ da solução nos tempos $t_n := t_0 + n \cdot dt$, dada uma condição inicial $x(t_0) = x_0$, são estimados pela sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt}$$

Numa linguagem como `c++` ou `Java`, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) =$ `x`, é

```
while (time < t)
  {
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
  }
```

- Considere a equação diferencial
$$\dot{x} = x$$
com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$, então o método de Euler fornece a aproximação
$$x(t) \simeq (1 + \varepsilon)^n$$
onde $n \simeq t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \to 0$, as aproximações convergem para a solução e^t, pois
$$\lim_{\varepsilon \to 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

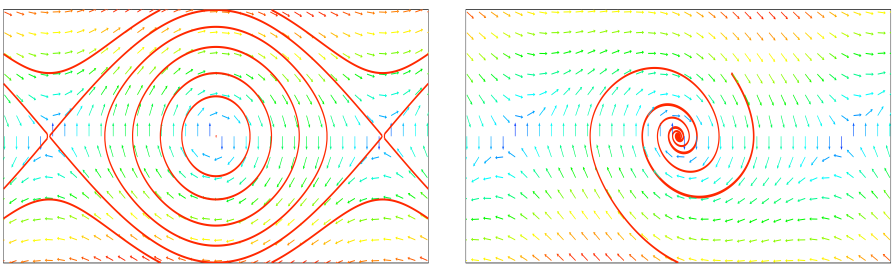
2. (pêndulo matemático) Considere a equação de Newton

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha\dot{\theta}\,,$$

que modela as oscilações de um *pêndulo*, onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo, e $\alpha \geq 0$ um coeficiente de atrito. No espaço de fase, de coordenadas θ e $p = \dot{\theta}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha p \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboce as trajetórias e as curvas de fases.



Retrato de fases do pêndulo (sem e com atrito).

3. (oscilador harmónico) As pequenas oscilações de um pêndulo em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descrita pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q\,.$$

onde ω é a frequência característica. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p\\ \dot{p} &= -\omega^2 q\end{aligned}$$

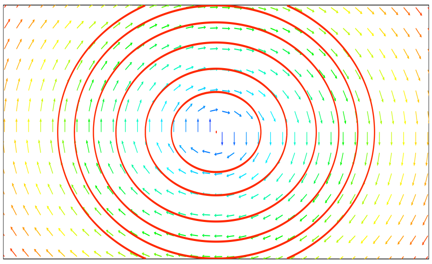
- Simule o sistema, e esboçe as trajetórias e as curvas de fase.
- Mostre que as trajectórias são

$$q(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad A\cos(\omega t + \phi)\ ,$$

  onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$.
- Mostre que a energia

$$E(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

  é uma constante do movimento, ou seja que se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E\left(q(t), p(t)\right) = 0$ para todo o tempo t.

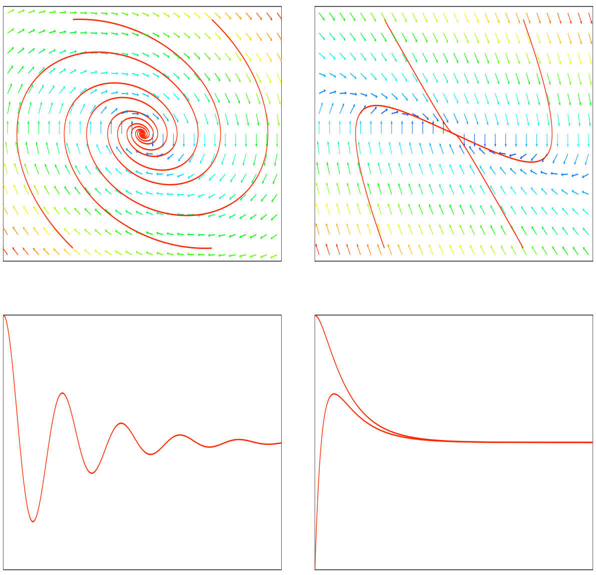


Retrato de fase do oscilador harmónico.

- Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q\,,$$

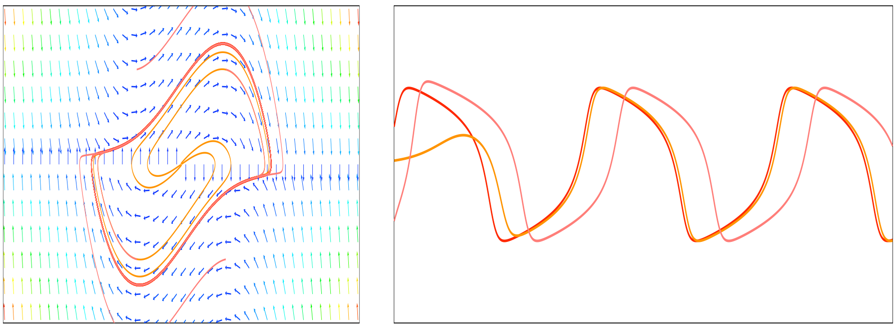
  onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito. Simule o sistema quando $\alpha^2 < \omega^2$ (amortecimento sub-crítico), $\alpha^2 = \omega^2$ (amortecimento crítico), e $\alpha^2 > \omega^2$ (amortecimento super-crítico).



Retrato de fases e trajetórias do oscilador amortecido (sub-crítico e super-crítico).

4. (circuito LRC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R, indutância L e capacidade C, é determinada pela EDO
$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}\,,$$
onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.
   - Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$.
   - Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$.

5. (oscilador de van der Pol) Considere o *oscilador de van der Pol*[19]
$$\ddot{q} - \mu(1-q^2)\dot{q} + q = 0$$
que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.
   - Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro μ.



Retrato de fases e trajetórias do oscilador de van der Pol.

   - Simule o oscilador forçado
$$\ddot{q} - \mu(1-q^2)\dot{q} + q = F_0 \sin(\omega t)$$
ao variar o parâmetro μ e a frequência ω.

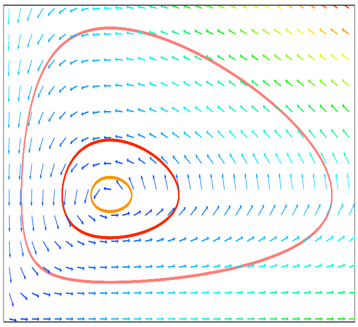
6. (sistema de Lotka-Volterra) Considere o *sistema de Lotka-Volterra*
$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy\\ \dot{y} &= -cy + dxy\end{aligned}$$
Foi proposto por Vito Volterra[20] para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka[21] para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto
$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to B$$
   - Determine as soluções estacionárias.
   - Mostre que a função
$$H(x,y) = dx + by - c\log x - a\log y$$
é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = 0$. Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de $H(x,y)$.

[19] B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

[20] Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

[21] Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

- Simule o sistema.



Retrato de fases do sistema de Lotka-Volterra.

7. (rock-paper-scissor game) Considere a reação

$$X + Y \xrightarrow{\gamma} 2X \qquad Y + Z \xrightarrow{\alpha} 2Y \qquad Z + X \xrightarrow{\beta} 2Z$$

modelada pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\gamma y - \beta z) \\ \dot{y} &= y(\alpha z - \gamma x) \\ \dot{z} &= z(\beta x - \alpha y) \end{aligned}$$

- Simule o sistema ao variar os parâmetros α, β e γ.

8. (Brusselator) O *Brusselator* é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores[22] que consiste na reação abstracta

$$A \to X \qquad B + X \to Y + C \qquad 2X + Y \to 3X \qquad X \to D$$

- Simule o sistema

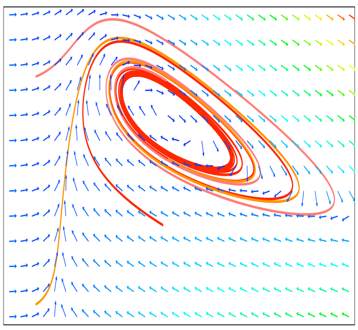
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha - (\beta + 1)x + x^2 y \\ \dot{y} &= \beta x - x^2 y \end{aligned}$$

para as concentrações das espécies catalíticas X e Y, obtido quando as concentrações $[A] \sim \alpha$ e $[B] \sim \beta$ são mantidas constantes.

- Simule o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha - (b + 1)x + x^2 y \\ \dot{y} &= bx - x^2 y \\ \dot{b} &= -bx + \delta \end{aligned}$$

para as concentrações de X, Y e B, obtido quando a concentração $[A] \sim \alpha$ é mantida constante e B é injetado a uma velocidade constante $v \sim \delta$.



[22] I. Prigogine and R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.

Retrato de fases do Brusselator.

9. (reacção de Schnakenberg) Considere a *reação de Schnakenberg*[23]

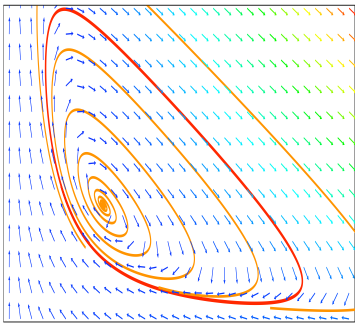
$$2X + Y \to 3X \qquad A \to Y \qquad X \to B$$

modelada pelo sistema

$$\dot{x} = x^2 y - x + \beta$$
$$\dot{y} = -x^2 y + \alpha$$

para as concentrações $x \sim [X]$ e $y \sim [Y]$.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar so parâmetros.



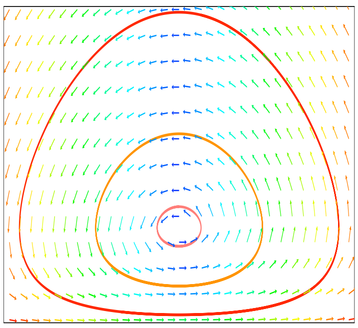
Retrato de fases do sistema de Schnakenberg.

10. (oscilador bioquímico de Goodwin) Um modelo de interações proteinas-mRNA proposto por Goodwin[24] é

$$\dot{M} = \frac{1}{1+P} - \alpha$$
$$\dot{P} = M - \beta$$

onde M e P denotam as concentrações relativas de mRNA e proteina, respectivamente.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fases do sistema de Goodwin.

- Simule o sistema[25]

$$\dot{M} = \frac{1}{1+P^n} - \alpha M$$
$$\dot{P} = M^m - \beta P$$

[23] J. Schnakenberg, Simple chemical reaction with limit cycle behavior, *J. Theor. Biol.* **81** (1979), 389-400.

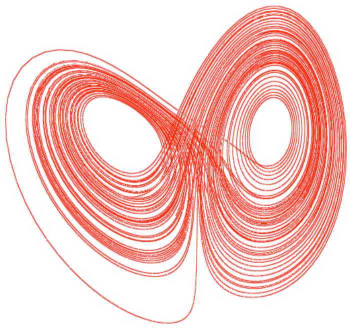
[24] B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.

[25] T. Scheper, D. Klinkenberg, C. Pennartz and J. van Pelt, A Mathematical Model for the Intracellular Cicardian Rhythm Generator, *J. Neuroscience* **19** (1999), 40-47.

11. (atrator de Lorenz) Considere o *sistema de Lorenz*[26]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

- Analize o comportamento assimptótico das trajectórias ao variar os parâmetros σ, ρ e β.
- Observe o comportamento das trajetórias quando $\sigma \simeq 10$, $\rho \simeq 28$ e $\beta \simeq 8/3$.



Atrator de Lorenz.

[26] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmspheric Science* **20** (1963), 130-141.

8 Curvas

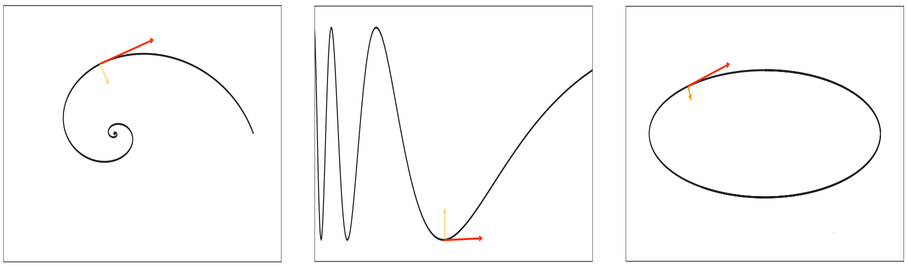
1. (caminhos e curvas) Um *caminho*, no plano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço $\mathbb{R}^3$, é uma função

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{ou} \qquad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

definida num intervalo (de tempos) $t \in I \subset \mathbb{R}$. A imagem $\gamma := \vec{r}(I) \subset \mathbb{R}^{2 \text{ ou } 3}$ de um caminho contínuo é dita *curva*. A *velocidade* e a *aceleração* do caminho $\vec{r}(t)$ são os caminhos

$$\boxed{\vec{v}(t) := \tfrac{d}{dt}\vec{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \qquad \text{e} \qquad \vec{a}(t) := \tfrac{d}{dt}\vec{v}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))}$$

respectivamente. A norma[27] da velocidade, $v(t) := \|\vec{v}(t)\|$, é dita *velocidade escalar*.



As curvas $(e^t \cos(3t), e^t \sin(3t))$, $(t, \sin(1/t))$, e $(2\cos(t), \sin(-t))$.

- Esboce as seguintes curvas no plano, e calcule velocidade e aceleração, nos pontos onde podem ser definidas.

$$\vec{r}(t) = \left(t, t^2\right) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}, \qquad \vec{r}(t) = \left(t^3, t^2\right) \quad \text{com } t \in \mathbb{R},$$
$$\vec{r}(t) = (t, |t|) \quad \text{com } t \in [-1, 1], \qquad \vec{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi],$$
$$\vec{r}(t) = (t, [t]) \quad \text{com } t \in [-2, 2], \qquad \vec{r}(t) = (t, \sin(1/t)) \quad \text{com } t \in]0, \infty[\,.$$
$$\vec{r}(t) = (|\sin(5t)|\cos(2t), |\sin(5t)|\sin(2t)) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi],$$
$$\vec{r}(t) = (\cos(t) + 0.1\cos(17t), \sin(t) + 0.1\sin(17t)) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

- Verifique que a trajectória $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$, descreve a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- Esboce a trajectória $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $R, b > 0$, descrita por uma partícula em movimento numa *hélice circular*.
- Determine umas equações paramétricas para a parábola $x = y^2 + 1$ e para a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ com $x > 0$ (lembre a identidade $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ entre as funções "hiperbólicas").

2. (partícula livre) A trajetória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula livre de massa $m > 0$ num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0, \qquad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \qquad ma = 0,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$ denota a *velocidade* e $a(t) := \ddot{q}(t)$ denota a *aceleração* da partícula. Em particular, o *momento linear* $p := mv$, é uma constante do movimento (ou seja, $\frac{d}{dt}p = 0$), de acordo com o princípio de inércia de Galileo ou a primeira lei de Newton.

[27] A *norma (Euclidiana)* de um vetor $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ é

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \qquad \text{onde} \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

é o *produto interno (Euclidiano)* em $\mathbb{R}^n$. Dois vctores $\vec{x}$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ são *ortogonais* quando $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

- Verifique que soluções da equação de Newton da partícula livre são as retas afins

$$q(t) = s + vt$$

onde $s, v \in \mathbb{R}^3$ são vetores constantes arbitrários, e interprete s e v.

- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $q(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{q}(0) = (1, 2, 3)$.
- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $q(0) = (0, 0, 0)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $q(2) = (1, 1, 1)$ no instante $t_1 = 2$. Calcule a sua "velocidade escalar", ou seja, a norma $\|v\|$.

3. (movimento circular uniforme) Considere a trajectória

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)) \qquad \text{com } R > 0\,,$$

descrita por uma partícula em *movimento circular uniforme* no plano.

- Mostre que a partícula descreve uma circunferência de raio R, e determine o período do movimento.
- Calcule a velocidade $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ e a aceleração $\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$, mostre que a aceleração é ortogonal à velocidade e que a aceleração é centrípeta (ou seja, é um vector que aponta para o centro da circunferência).
- Calcule a *velocidade angular*, o quociente entre a velocidade escalar $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ e o raio da circunferência.

4. (comprimento de uma curva) O comprimento de uma curva γ, imagem do caminho diferenciável $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ com velocidade contínua $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$, é dado pelo integral da velocidade escalar em ordem ao tempo:

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt\,.}$$

Por exemplo, se a curva é dada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ ou $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$, o seu comprimento é

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt\,.$$

- Calcule o comprimento ...
  ... do arco de circunferência $(\cos\theta, \sin\theta)$ com $\theta \in [\pi/2, 2\pi]$,
  ... da espiral logarítmica $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ com $t \in [0, \infty[$,
  ... do arco de parábola $\left(t, t^2/2\right)$ com $t \in [0, 1]$ (considere a susbtituição $t = \sinh s$).

5. (comprimento de um gráfico) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real com derivada contínua definida no intervalo $[a, b]$. O gráfico de f, o conjunto $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \text{ com } t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$, é a imagem do caminho $t \mapsto (t, f(t))$ com $t \in [a, b]$. Em particular, o seu comprimento é

$$\boxed{\ell\left(\Gamma_f\right) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt\,.}$$

- Calcule ou estime o comprimento ...
  ... do arco de parábola $y = x^2$ com $x \in [0, 1]$,
  ... do gráfico da função $y = \sin(x)$ com $x \in [0, \pi]$.
  ... do gráfico da função $y = e^{-x}$ com $x \in [0, 1]$.

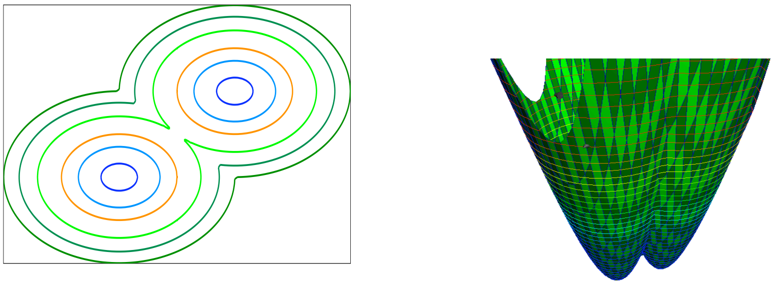
9 Campos escalares

1. (campos escalares, curvas e superfícies de nível) A *curva de nível* λ do campo escalar $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\boxed{\Sigma_\lambda := \left\{(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } f(x, y) = \lambda\right\}}$$

O *gráfico* da função f é

$$\boxed{\mathcal{G}_f := \left\{(x, y, z) \in X \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \text{ t.q. } f(x, y) = z\right\}}$$



Curvas de nível e gráfico.

- Esboce algumas curvas de nível e os gráficos das seguintes funções, nos domínios onde podem ser definidas:

$$f(x, y) = x + y \qquad f(x, y) = xy \qquad f(x, y) = x^2 + 2y^2 \qquad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$f(x, y) = \log\left(x^2 + y\right) \qquad f(x, y) = x^2 - y^2 \qquad f(x, y) = \sin(xy)$$

2. (derivadas parciais, gradiente e derivadas direccionais) As derivadas parciais da função $f(x, y)$ no ponto (x, y) são os limites

$$\boxed{\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} \qquad \text{e} \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}}$$

O *diferencial* e o *gradiente* de $f(x, y)$ no ponto (x, y) são a "forma linear" e o vetor

$$\boxed{df(x, y) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \qquad \text{e} \qquad \nabla f(x, y) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)}$$

A *derivada direccional* de $f(x, y)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ no ponto (x, y) é

$$\boxed{\tfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = \lim_{t\to 0} \tfrac{f((x,y)+t(v_x,v_y))-f(x,y))}{t} = \langle \nabla f(x, y), \mathbf{v}\rangle}$$

Se $t \mapsto (x(t), y(t))$ é um caminho com velocidade $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, e $f(x, y)$ um campo escalar, então a *regra da cadeia* diz que

$$\boxed{\tfrac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \langle \nabla f(x(t), y(t)), \mathbf{v}(t)\rangle = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)}$$

- Considere o campo escalar $f(x, y) = \langle (w_x, w_y), (x, y)\rangle$, onde $\mathbf{w} = (w_x, w_y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{w} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$$

e que portanto o gradiente de f é constante e igual a $\nabla f(x, y) = \mathbf{w}$.

- Considere o campo escalar $f(x,y) = \|(x,y)\|^2 = x^2+y^2$. Mostre que

$$\nabla f(x,y) = (2x,2y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y) = \langle (2x,2y), \mathbf{v} \rangle \,.$$

Calcule a derivada direccional de f no ponto $(2,4)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (3,5)$. Dado o caminho $t \mapsto (x(t),y(t)) = (t^2,t^3)$, calcule a derivada de $f\,(x(t),y(t))$ em ordem a t no tempo $t=2$.

- Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções, nos domínios onde podem ser definidas:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f(x,y,z) = x^3+y^2+zxy \qquad f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)$$

$$f(x,y) = e^{x+y} \qquad f(x,y) = \frac{\sin(x^2)}{y} \qquad f(x,y) = x^y$$

- Calcule o gradiente das seguintes funções, nos pontos onde pode ser definido:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad f(x,y) = x^2-y^2 \qquad f(x,y) = \sin\left(x^2+y^2\right)$$

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \qquad f(x,y,z) = xyz \qquad f(x,y) = e^{y\log x}$$

- Calcule a derivada $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))$ dos seguintes campos $f(\mathbf{r})$ ao longo dos respetivos caminhos $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ nos tempos indicados.

$$f(x,y) = x^3y - xy^2 \qquad t \mapsto (t^2,t^3) \qquad t=0\,,$$

$$f(x,y) = xy \qquad t \mapsto (2e^t\cos(t), 2e^t\sin(t)) \qquad t=1\,,$$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \qquad t \mapsto (\cos(t),\sin(t),t) \qquad t=\pi\,,$$

- A temperatura do mar num ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y,z) = x^3 - xy + yz^2$. Uma sardinha encontra-se no ponto $(3,2,1)$. Em que direção e sentido a sardinha tem de nadar para arrefecer mais rapidamente?

- Mostre que o potencial Newtoniano $\varphi(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ satisfaz a *equação de Laplace*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z^2} = 0\,.$$

- Sejam $f(s)$ e $g(s)$ duas funções reais duas vezes diferenciáveis. Mostre que a função

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\,,$$

que descreve duas ondas viajantes com velocidades $\pm c$, satisfaz a *equação de onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

3. (diferencial e aproximação linear) Use a aproximação linear

$$\boxed{f(x+dx,y+dy) \simeq f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot dy}$$

para estimar os seguintes valores:

$$e^{0.01}\sqrt{3.999} \qquad \frac{\log(1.01)}{1+0.001} \qquad \sqrt[3]{7.99}\sqrt{36.01}$$

4. (energia cinética e sistemas conservativos) Sejam $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t),y(t)) \in \mathbb{R}^2$ (ou $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t),y(t),z(t)) \in \mathbb{R}^3$) a trajetória de uma partícula de massa m, $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ a sua velocidade e $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ a sua aceleração.

- Calcule a derivada de $t \mapsto \|\mathbf{r}(t)\|^2$ em ordem ao tempo t.
- Deduza que, se $\|\mathbf{r}(t)\|$ é constante, então a velocidade é ortogonal à posição, ou seja
$$\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{r}(t) \rangle = 0$$
- Mostre que a variação da energia cinética é igual ao produto interno $\langle ma(t), v(t)\rangle$, ou seja,
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}(t)\|^2\right) = \langle m\mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle \,.$$
Deduza que se a força $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ é ortogonal à velocidade, então a energia cinética é constante.
- As equações de Newton de um sistema conservativo dizem que
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}\,,$$
onde a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ é o gradiente de uma uma energia potencial $V(\mathbf{r})$. Verifique que a energia
$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{r})$$
é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = 0$ ao longo das trajectórias.

5. (gás ideal) A equação de estado de um gás ideal é
$$PV = nRT$$
onde p é a pressão, V o volume, n o número de moles, $R \simeq 8.314 \times 10^7$ J/K·mol, e T é a temperatura absoluta.

- Esboce as curvas "isotermas" (i.e. de temperatura constante) no plano P-V. Descreva o comportamento do volume de um gás ideal ao variar a pressão, mantendo constante a temperatura.
- Mostre que
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) = -1\,.$$

6. (reta/superfície tangente) Seja $\Sigma_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } f(x, y) = \lambda\}$ uma curva de nível do campo escalar $f(x, y)$, e seja $(a, b) \in \Sigma_\lambda$ um ponto onde $\nabla f(a, b) \neq 0$. A *reta tangente* à curva de nível Σ_λ no ponto (a, b) é a reta ortogonal ao gradiente, definida pela equação cartesiana
$$\boxed{\langle \nabla f(a, b), (x - a, x - b)\rangle = 0}$$

- Considere as seguintes funções:
$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad f(x, y) = x^2 - y^2 \qquad f(x, y) = x^2$$
$$f(x, y) = xy \qquad f(x, y) = e^{x^2+y^2} \qquad f(x, y) = 1 - y - x^2$$
$$f(x, y, z,) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$
Calcule o gradiente.
Determine a reta/superfície tangente à curva/superfície de nível no ponto $\mathbf{r} = (1, 1)$ (ou $\mathbf{r} = (1, 1, 1)$).

7. (máximos, mínimos e pontos de sela) Um *ponto crítico* do campo escalar $f(x, y)$ é um ponto (a, b) onde $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. A *matriz Hessiana* do campo (de classe $\mathcal{C}^2$) f no ponto crítico (a, b) é a matriz simétrica
$$\mathcal{H}f(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}.$$

O ponto crítico isolado (a, b) é um máximo/mínimo relativo se os valores próprios da matriz Hessiana são os dois negativos/positivos, é um ponto de sela se a matriz Hessiana possui um valor próprio positivo e outro negativo.

- Considere os seguintes campos
$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = (x+y)^2 \qquad f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$$
$$f(x,y) = (x-1)(y-2) \qquad f(x,y) = (x+1)^2 + (y-3)^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 + 7$$
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 \qquad f(x,y) = e^{x+y} \qquad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$
Determine os pontos críticos. Determine os máximos, mínimos e os pontos de sela. Esboce os gráficos.
- Dados os N pontos do plano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^2$ (ou do espaço $\mathbb{R}^n$), mostre que o ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ que minimiza a soma dos quadrádos
$$S(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\|^2$$
é o "centro geométrico"
$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k$$

8. (mínimos quadrados) Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ os valores do observável y obtidos em n experiências em correspondência dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do observável x, respetivamente. Os valores de α e β que minimizam a soma dos erros quadráticos
$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - (\alpha + \beta x_k))^2 \,,$$
na hipótese de uma lei linear $y = \alpha + \beta x$, são dados por
$$\beta = \frac{\overline{\sigma}_{xy}^2}{\overline{\sigma}_{xx}^2} \qquad \text{e} \qquad \alpha = \overline{y} - \beta \overline{x} \,,$$
onde
$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$
são os valores médios de x e y, e
$$\overline{\sigma}_{xx}^2 := \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 \qquad \text{e} \qquad \overline{\sigma}_{xy}^2 := \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$
as covariâncias.

- Na seguinte amostra, obtida por Galileo, foram registadas as coordenadas (altura x e distância y) da trajectória de um objecto lançado com uma força horizontal,

x	100	200	300	450	600	800	1000
y	235	337	395	451	495	534	574

Ajuste uma recta.
- Na seguinte tabela, colecionada por Jaques Cassini, foram registadas as obliquidades da eclíptica (o ângulo entre o plano equatorial da Terra e o seu plano orbital) $(y + 23)^\circ$ em diferentes datas t,

t	−140	−140	390	880	1070	1300	1460
y	0.853	0.856	0.500	0.583	0.567	0.533	0.500

t	1500	1500	1570	1570	1600	1656	1672	1738
y	0.473	0.488	0.499	0.525	0.517	0.484	0.482	0.472

Ajuste uma recta. Retire os dados anteriores ao ano 1500, e ajuste outra recta. Discuta o resultado.