

Nome N°

Instruções: responda nesta folha de enunciado e justifique as suas resposta numa folha de exame.

1. (2 valores) Determine o tipo de secção cónica definida por $x^2 - 4xy - y^2 = 4$.

Resposta: A equação cartesiana pode ser escrita

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4,$$

Os valores próprios da matriz simétrica $H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ são 3 e -2. Portanto, existe um sistema de coordenadas ortogonais x' e y' tal que a equação cartesiana da cónica é

$$3x'^2 - 2y'^2 = 4$$

Em particular, a cónica é uma hipérbole.

2. (2 valores) Calcule a derivada direcciona do campo escalar $f(x, y) = e^{xy}$ no ponto $(1, 2)$ e na direcção do vetor $\mathbf{v} = (1, 0)$.

Resposta: O gradiente de f no ponto $(1, 2)$ é o vetor $(2e^2, e^2)$, portanto a derivada direcciona é

$$(2e^2, e^2) \cdot (1, 0) = 2e^2.$$

3. (2 valores) Calcule as matrizes das derivadas parciais $\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)}$ e $\frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)}$ se

$$x = ts, \quad y = ts \quad \text{e} \quad u = x, \quad v = -y.$$

Resposta: As duas matrizes são

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} = \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ -s & -t \end{pmatrix}$$

4. (2 valores) Determine uma equação cartesiana do plano tangente à superfície definida por $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10$ no ponto $(1, \sqrt{3}, 1)$.

Resposta: O gradiente da função $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ no ponto $(1, \sqrt{3}, 1)$ é o vetor $\nabla f = (2, 4\sqrt{3}, 6)$. Portanto, uma equação cartesiana do plano tangente à superfície no ponto $(1, \sqrt{3}, 1)$ é

$$x + 2\sqrt{3}y + 3z = 10.$$

5. (2 valores) Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 - 4xy - y^2$, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

Resposta: O gradiente da função $f(x, y)$ é $\text{grad} f = (2x - 4y, -4x - 2y)$. O único ponto crítico é $(0, 0)$. A matriz Hessiana no ponto crítico é $H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. Sendo $\det H = -12 < 0$, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

6. (2 valores) Determine máximos e mínimos da função $f(x, y) = x + y$ na circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

Resposta: Os pontos críticos de $F(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ são as soluções do sistema

$$1 - 2\lambda x = 0 \quad 1 - 2\lambda y = 0 \quad x^2 + y^2 = 1$$

ou seja, os pontos $P_{\pm} = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Um cálculo mostra que $f(P_{\pm}) = \pm\sqrt{2}$, portanto, P_+ é um máximo e P_- é um mínimo de $f(x, y)$ na circunferência unitária.

7. (2 valores) Seja D o triângulo limitado entre as retas $x = 0$, $y = 1$ e $y = x$. Calcule

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy.$$

Resposta:

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^y (x + y) \, dx \, dy = \frac{3}{2} \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{2}.$$

8. (2 valores) Calcule

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

onde D é a região do plano limitada entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ (o elemento de área em coordenadas polares é $dx \, dy \simeq r \, dr \, d\theta$)

Resposta:

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r} \, dr \, d\theta = 2\pi \log 2.$$

9. (2 valores) Calcule o integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (3, x)$ ao longo da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente.

Resposta:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} dx \, dy = \pi.$$

10. (2 valores) Calcule o fluxo $\iint_S (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dA$ do campo vetorial $\mathbf{V}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ através da esfera $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Resposta:

$$\iint_S (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dA = -4\pi.$$