18/11/2011
1º teste

9503N2 - Análise Matemática 3A - MIEB

1. *(4 valores)* Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x^2 \, .$$

Determine as soluções estacionárias e a solução com condição inicial $x(0) = 1$.

A única solução estacionária de $\dot{x} = x^2$ é $x(t) = 0$. A solução de $\dot{x} = x^2$ com condição inicial $x(0) = 1$ é

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \, ,$$

definida para tempos $t < 1$.

2. *(4 valores)* Determine a solução de

$$\dot{x} = -t/x$$

com condição inicial $x(1) = 3$.

A solução de $\dot{x} = -t/x$ com condição inicial $x(1) = 3$ pode ser determinada separando as variáveis

$$x\,dx = -t\,dt \qquad \dots \qquad \int_3^x y\,dy = -\int_1^t s\,ds \qquad \dots \qquad x^2 - 3^2 = 1 - t^2 \, .$$

O resultado é $x(t) = \sqrt{10 - t^2}$, definida para tempos $|t| < \sqrt{10}$.

3. *(4 valores)* Determine a solução de

$$\dot{x} + x = e^{3t}$$

com condição inicial $x(1) = 2$.

Uma solução não trivial da homogénea $\dot{y} + y = 0$ é $y(t) = e^{1-t}$. O produto $x(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{x} + x = e^{3t}$ se

$$\dot{\lambda}e^{1-t} = e^{3t} \qquad \text{ou seja, se} \qquad \dot{\lambda} = e^{4t-1} \, , \qquad \text{donde} \qquad \lambda(t) = \lambda(1) + \int_1^t e^{4s-1} ds = \lambda(0) + \frac{1}{4}\left(e^{4t-1} - e^3\right) \, .$$

Portanto, a solução con condição inicial $x(1) = \lambda(1) = 2$ é

$$x(t) = \left(2 + \frac{1}{4}\left(e^{4t-1} - e^3\right)\right) e^{1-t} \, .$$

4. *(4 valores)* Determine a solução de

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

A função $x(t) = e^{zt}$ é solução de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ se

$$(z^2 + 2z + 2)e^{zt} = 0 \qquad \text{ou seja, se} \qquad z = -1 \pm i \, .$$

Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ é

$$x(t) = ae^{-t}\cos(t) + be^{-t}\sin(t) \, .$$

As condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$ implicam que

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a & = & 1 \\ -a + b & = & -1 \end{array} \right. \, , \qquad \text{donde} \qquad \left\{ \begin{array}{rcr} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \, .$$

Portanto, a solução é $x(t) = e^{-t}\cos(t)$.

5. *(4 valores)* Determine uma solução da equação diferencial

$$\ddot{x} + 4x = 3\sin(t) \, .$$

Uma solução é $x(t) = \sin(t)$.

13/01/2012 2^o teste	9503N2 - Análise Matemática 3A - MIEB

1. *(4 valores)* Resolva, usando a transformada de Laplace, o seguinte problema:

$$\ddot{x} + x = f(t) \qquad \text{com} \qquad x(0) = 0 \quad e \quad \dot{x}(0) = 0\,,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}.$$

A função de transferência e a resposta impulsiva são $H(s) = \frac{1}{s^2+1}$ e $h(t) = \sin(t)$, respetivamente. Portanto a solução é

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } \; t < 1 \\ \int_1^t \sin(t-\tau)\, d\tau & \text{se } \; t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } \; t < 1 \\ 1 - \cos(t-1) & \text{se } \; t \geq 1 \end{cases}$$

2. *(4 valores)* Determine a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

na reta real, ou seja, com $x \in \mathbb{R}$, com condições iniciais

$$u(x,0) = \sin(2x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^{-x^2}\,.$$

A soluç ao pode ser obtida usando a fórmula de d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(2(x-t)) + \sin(2(x+t))\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^{-y^2}\, dy\,.$$

3. *(4 valores)* Determine soluções separáveis da EDP

$$t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Se $u(x,t) = X(x)T(t)$, então $tX'T + XT' = 0$. Isto acontece se existe uma constante λ tal que

$$X' = \lambda X \qquad \text{e} \qquad T' = -\lambda t T\,,$$

donde

$$X(x) = ce^{\lambda x} \qquad \text{e} \qquad T(t) = de^{-\lambda t^2/2}\,.$$

Portanto, soluções separáveis da equação são

$$u_{c,\mu}(x,t) = ke^{\lambda(x-t^2/2)}$$

com $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

4. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em} \quad 0 \le x \le \pi\,,$$

com condição inicial

$$u(x,0) = x\,,$$

e temperatura nula na fronteira, ou seja, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t \geq 0$.

A série de Fourier de senos da temperatura inicial é a série de Fourier da sua extensão ímpar, ou seja, da função definida por x em $[-\pi,\pi]$. Portanto

$$u(x,0) \sim 2\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \dots\right)$$

e a solução formal é

$$u(x,t) \sim 2\left(e^{-3t}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{-12t}\sin(2x) + \frac{1}{3}e^{-27t}\sin(3x) - \frac{1}{4}e^{-48t}\sin(4x) + \dots\right)\,.$$

5. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $0 \le x \le \pi$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para cada tempo t e com condições iniciais

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha - \varepsilon \le x \le \alpha + \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < \pi$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

A série de Fourier de senos da velocidade inicial é $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ onde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n}\sin(n\alpha)\sin(n\varepsilon)\,.$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\sqrt{7}\,n^2}\sin(n\alpha)\sin(n\varepsilon)\sin(\sqrt{7}nt)\sin(nx)\,.$$