11/02/2012 recurso — 9503N2 - Análise Matemática 3A - MIEB

1. *(4 valores)* Considere a equação logística

$$\dot{x} = x(x-1)\,.$$

Determine as soluções estacionárias. Determine a solução $x(t)$ com condição inicial $x(0) = 0.3$ e calcule o limite $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

As soluções estacionárias são $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$. A solução com condição inicial $x(0) = 0.3$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{10}{3} - 1\right) e^{-t}}\,.$$

e $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$.

2. *(4 valores)* Considere a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k\left(T - M(t)\right)\,,$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva. Determine a solução $T(t)$ quando a temperatura do meio ambiente é $M(t) = M \sin(\omega t)$, dada uma temperatura inicial $T(0) = 0$.

Uma solução não trivial da equação homogénea $\dot{y} + ky = 0$ é $y(t) = e^{-kt}$. O produto $T(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{T} + kT = kM(t)$ se

$$\dot{\lambda}e^{-kt} = M(t) \qquad \text{ou seja, se} \qquad \dot{\lambda} = Me^{kt}\sin(\omega t)\,, \qquad \text{donde} \qquad \lambda(t) = \lambda(0) + M\int_0^t e^{ks}\sin(\omega s)\,ds\,.$$

Portanto, a solução con condição inicial $T(0) = \lambda(0) = 0$ é

$$T(t) = Me^{-kt}\int_0^t e^{ks}\sin(\omega s)\,ds\,.$$

3. *(4 valores)* Considere a equação do oscilador amortecido

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

Determine a solução geral. Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

A função $x(t) = e^{zt}$ é solução de $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ se

$$(z^2 + z + 1)e^{zt} = 0 \qquad \text{ou seja, se} \qquad z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ é

$$x(t) = ae^{-t/2}\cos\left((\sqrt{3}/2)t\right) + be^{-t/2}\sin\left((\sqrt{3}/2)t\right)\,.$$

As condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$ implicam que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b & = & -1 \end{array}\right.\,, \qquad \text{donde} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.\,.$$

Portanto, a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$ é

$$x(t) = e^{-t/2}\cos\left((\sqrt{3}/2)t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left((\sqrt{3}/2)t\right)\,.$$

4. *(4 valores)* Considere a equação do oscilador forçado

$$\ddot{x} + 4x = f(t)\,.$$

Determine a função de transferência e a resposta impulsiva do sistema. Use a transformada de Laplace para determinar a solução com condições iniciais triviais, ou seja, $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, quando a força é

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3 \\ 2 & \text{se } t \geq 3 \end{cases}\,.$$

A função de transferência e a resposta impulsiva são

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4} \qquad \text{e} \qquad h(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)\,,$$

respetivamente. Portanto a solução com condições iniciais triviais é

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } \ t < 3 \\ \frac{1}{2}\int_3^t \sin(2(t-\tau))\, d\tau & \text{se } \ t \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } \ t < 3 \\ \frac{1}{4}\left(1-\cos(2(t-3))\right) & \text{se } \ t \geq 3 \end{cases}\,.$$

5. *(4 valores)* Considere o problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t$. Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1\,.$$

A série de Fourier de senos do deslocamento inicial é a série de Fourier da função $Z(x)$ (formulário, página 39 das folhas práticas), ou seja,

$$\begin{aligned} u(x,0) &\sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) - \frac{1}{9}\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(5x) - \frac{1}{49}\sin(7x) + \ldots\right) \\ &\sim \frac{4}{\pi}\cdot \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2}\sin(nx) \end{aligned}$$

A série de Fourier de senos da velocidade inicial é a série de Fourier da função $2\Theta(x) - 1$ (formulário, página 39 das folhas práticas), ou seja,

$$\begin{aligned} u(x,0) &\sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots\right) \\ &\sim \frac{4}{\pi}\cdot \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n}\sin(nx) \end{aligned}$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{4}{\pi}\cdot \sum_{n \text{ ímpar}} \left(\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2}\cos(\sqrt{3}\,nt) + \frac{1}{\sqrt{3}\,n^2}\sin(\sqrt{3}\,nt)\right)\sin(nx)\,.$$