9503N2 - Análise Matemática 3A - Folhas práticas EngBiol 2009/10

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho
Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL
gab B.4023, tel 253 604086 (atendimento: 4^a-feira 14h-18h)
e-mail scosentino@math.uminho.pt
url http://w3.math.uminho.pt/~scosentino

19 de Setembro de 2010

Conteúdo

1 Equações diferenciais ordinárias

1. (equações diferenciais ordinárias) Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem é uma "lei"
$$\dot{x} = v(t,x)$$
para a trajectória $t \mapsto x(t)$ no *espaço de fase* $X \subset \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{R}^n$) de um sistema dinâmico, onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ denota a derivada do observável/is x em ordem ao tempo t, e $v(t,x)$ é um *campo de direcções* (uma recta com declive $v(t,x)$ para cada ponto $(t,x) \in \mathbf{R} \times X$). Se $v : X \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{R}^n$) é um *campo de vectores* no espaço de fase X, então a equação $\dot{x} = v(x)$ é dita *autónoma*.

   Uma *solução* da EDO é um caminho diferenciável $t \mapsto x(t)$ cuja velocidade é $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num certo intervalo, ou seja, uma função cujo gráfico Γ é tangente ao campo de direcções em cada ponto $(t, x(t)) \in \Gamma$. Uma *solução local* da EDO com *condição inicial* $x(t_0) = x_0$ (ou solução do "problema de Cauchy") é uma solução definida numa vizinhança de t_0, cujo gráfico passa pelo ponto (t_0, x_0).

   O *teorema de Peano* afirma que, se o campo $v(t,x)$ é contínuo, então existem sempre soluções locais do problema de Cauchy. O *teorema de Picard* afirma que, se o campo $v(t,x)$ é suficientemente regular (contínuo, e localmente Lipschitziano[1] (por exemplo, diferenciável de classe $\mathcal{C}^1$) na variável x), então para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.

   As soluções constantes, $x(t) = \overline{x}\ \ \forall t \in \mathbf{R}$, são ditas soluções de *equilíbrio*, ou *estacionárias*.

   A EDO de ordem k
$$\frac{d^k y}{dt^k} = F\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right),$$
para o observável $y(t) \in \mathbf{R}$ é equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem
$$\dot{x} = v\,(t,x)$$
para o observável $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}) \in \mathbf{R}^k$ definido por
$$x_0 = y \qquad x_1 = \dot{y} \qquad x_2 = \ddot{y} \qquad \ldots \qquad x_{k-1} = \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}},$$
onde o campo de direcções é $v(t,x) = (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, F\,(t, x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-2}, x_{k-1}))$.

   - Esboce o campo de direcções e (quando autónoma) o campo de vectores das EDOs
$$\dot{x} = t \qquad \dot{x} = -x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = x + t$$
$$\dot{x} = x(1-x) \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3) \qquad \dot{x} = (x-1)^2(x-2)^2$$
e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.
   - A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?

2. (o exponencial) Considere a EDO
$$\dot{x} = x$$
   - Verifique que $x(t) = x_0 e^t$ é uma solução com condição inicial $x(0) = x_0$.
   - Mostre que, se $y(t)$ é uma solução com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $y(t)/e^t$ é constante e igual a x_0. Deduza a unicidade das soluções do problema de Cauchy.

[1] A função $f : U \to \mathbf{R}^m$ é *Lipschitziana* no domínio $U \subset \mathbf{R}^n$ se
$$\exists\, L > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in U\,.$$

3. (sistemas conservativos: Newton, Lagrange, Hamilton) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = F$$

para a trajectória $t \mapsto q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \in \mathbf{R}^3$ de uma partícula de massa m num campo de forças conservativo $F(q) = -\nabla V(q)$, onde $V(q)$ é um(a energia) *potencial.*

- Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)[2]

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \|\dot{q}\|^2 + V(q)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$ ao longo das trajectórias.

- Verifique que a equação de Newton é equivalente às *equações de Euler-Lagrange*[3]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

onde a *Lagrangiana* do sistema é

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \|\dot{q}\|^2 - V(q) \ .$$

- O vector $p = m\dot{q}$, de coordenadas $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, é dito *momento (linear).* O espaço $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, com coordenadas (q, p), é dito *espaço de fase* do sistema mecânico. Verifique que a equação de Newton é equivalente às *equações de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

onde a *Hamiltoniana* do sistema é a "transformada de Legendre" da Lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \sup_v \left(p \cdot v - L(q, v)\right) \\ &= \frac{1}{2m} \|p\|^2 + V(q) \ . \end{aligned}$$

- Mostre que a Hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = 0$ ao longo das trajectórias. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fase estão contidas nas curvas/superfícies de nível $H(q, p) = c$ da Hamiltoniana.

4. (lei de Hooke) Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas no espaço de fase) de uma partícula sujeita à *lei de Hooke*

$$m\ddot{q} = -k^2 q \, .$$

5. (pêndulo matemático) Esboce o retrato de fase de um *pêndulo matemático*

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) \, .$$

---

[2] A *norma (Euclidiana)* de um vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ é

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \, , \qquad \text{onde} \qquad x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

é o *produto interno (Euclidiano)* em $\mathbf{R}^n$.

[3] As trajectórias são extremos locais da *acção*, o funcional

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

definido no espaço dos caminhos com condições de fronteira $q(t_0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$.

6. (simulações: método de Euler) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x) \,.$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt \,,$$

dado um "passo" dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_0 + n \cdot dt)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$, é estimada pela sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt}$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$. Numa linguagem como `c++` ou `Java`, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) =$ `x`, é

```
while (time < t)
  {
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
  }
```

- Considere a equação diferencial
$$\dot{x} = x$$
com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$, então o método de Euler fornece a aproximação
$$x(t) \simeq (1 + \varepsilon)^n$$
onde $n \simeq t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \to 0$, as aproximações convergem para a solução e^t, pois
$$\lim_{\varepsilon \to 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$
- Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)\, x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t - t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...
- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico
$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q \end{aligned}$$
com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

7. (simulações: método RK-4) O *método de Runge-Kutta* (de ordem) *4* para simular a solução de
$$\dot{x} = v(t, x) \qquad \text{com condição inicial} \qquad x(t_0) = x_0$$
consiste em escolher um "passo" dt, e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão x_n definida recursivamente por
$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \tfrac{dt}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)}$$
onde os coeficientes k_i são definidos recursivamente por
$$\boxed{k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2} \cdot k_1\right) \quad k_3 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)}$$
e $t_n = t_0 + n \cdot dt$.

- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

2 EDOs autónomas e separáveis

1. (integração de EDOs simples) O *teorema fundamental do cálculo*[4] implica que a solução de uma EDO simples
$$\dot{x} = v(t)$$
com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,
$$\boxed{\dot{x} = v(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)ds}$$
   - Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(t)$, então também $x(t) + c$ é solução, $\forall c \in \mathbf{R}$.
   - Integre as seguintes EDOs, definidas em oportunos domínios.
$$\dot{x} = 2\sin(t) \qquad \dot{x} = e^{-t} \qquad \dot{x} = \cos(3t) \qquad \dot{x} = 1/t$$

2. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela *equação de Newton*
$$m\ddot{r} = -mg$$
onde r é a altura, m é a massa da partícula, $g \simeq 9.8\ m/s^2$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\ddot{r}$ denota a segunda derivada de r em ordem ao tempo t.
   - Escreva a solução geral desta equação.
   - Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.
   - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
   - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

3. (EDOs autónomas) Considere o problema de determinar a solução da EDO *autónoma*
$$\dot{x} = v(x)$$
com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio*) da equação. Se x_0 não é um ponto singular, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então uma solução local é determinanda separando as variáveis, $\frac{dx}{v(x)} = dt$, e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$. Ou seja,
$$\boxed{\dot{x} = v(x)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}}$$
   - Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(x)$, então também $x(t - c)$ é solução, $\forall c \in \mathbf{R}$.
   - Considere as seguintes EDOs de primeira ordem
$$\dot{x} = -3x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = e^x \qquad \dot{x} = \sqrt{x}$$
$$\dot{x} = (x-1)(x-2) \qquad \dot{x} = e^x \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

   Encontre, caso existam, as soluções estacionárias.

   Desenhe os respectivos campos de direcções e conjecture sobre o comportamento das soluções.

   Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(t_0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

---

[4] A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é "*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*".

4. (decaimento radioactivo) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\dot{N} = -\beta N \,,$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a "vida média" dos núcleos[5].

- Determine a solução do problema de Cauchy com condição inicial $N(0) = N_0$.
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, ou seja, o tempo T tal que $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$. Determine a relação entre o tempo de meia-vida T e o parâmetro β, e mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$.
- O radiocarbono ${}^{14}C$ (que decai segundo ${}^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + e^- + \overline{\nu}_e$) tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, sabendo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é fixa e conhecida[6].
- Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante α, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha \,.$$

  Verifique que a solução de equilíbrio é $\overline{N} = \alpha/\beta$. Mostre que $N(t) \to \overline{N}$ quando $t \to \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (use a mudança de variável $x(t) = N(t) - \overline{N}$).

5. (crescimento exponencial) O crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado segue a EDO de primeira ordem

$$\dot{N} = \lambda N$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t, e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$).

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$. O que acontece quando $t \to \infty$?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante γ, então

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma$$

  Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assimptótico das outras soluções.

6. (logística) Um modelo mais realista da dinâmica populacional é dado pela *equação logística*[7]

$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/N_{max})$$

onde a constante positiva N_{max} é a população máxima permitida num dado meio limitado. Note que, tal como antes, $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll N_{max}$, e que $\dot{N} \to 0$ quando $N \to N_{max}$.

- Seja $x(t) = N(t)/N_{max}$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística "adimensional"

$$\dot{x} = \lambda x(1 - x)$$

[5] O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X, com lei $\mathbf{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$, se $t \geq 0$, e média $\mathbf{E}X = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.

[6] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

[7] Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0,1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}},$$

- Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.

7. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é
$$\dot{N} = \alpha N^2.$$
   - Determine soluções da equação.
   - Note que as soluções que determinou não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!

8. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO *separável*
$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$
com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se $f(x_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por
$$\boxed{\dot{x} = f(x)/g(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}}$$
   - Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.
$$\dot{x} = tx^3 \qquad t\dot{x} + t = t^2 \qquad \dot{x} = t^3/x^2 \qquad x\dot{x} = e^{x+3t^2} t$$
$$\dot{x} = \frac{t-1}{x^2} \qquad \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$\left(t^2+1\right)\dot{x} = 2tx \qquad \dot{x} = t\left(x^2 - x\right) \qquad \dot{x} = e^{t-x}\,,$$

9. (EDOs homogéneas) Uma EDO *homogénea*
$$\dot{x} = v(t,x) \qquad \text{com} \qquad v(\lambda t, \lambda x) = v(x,t) \quad \forall \lambda > 0\,,$$
é transformada numa EDO separável com a mudança de variável $y(t) = x(t)/t$, i.e.
$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \qquad \Rightarrow \qquad y + t\dot{y} = v(1,y)}$$
   - Seja
$$\dot{x} = v(t,x)$$
uma EDO homogénea, ou seja tal que $v(t,x) = v(\lambda t, \lambda x)$ para todo o $\lambda > 0$. Mostre que se $\varphi(t)$ é uma solução então também $\phi(t) = \lambda\varphi(t/\lambda)$ é uma solução.
Seja $\varphi(t)$ uma solução tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?
   - Resolva as seguintes EDOs homogéneas
$$\dot{x} = -t/x \qquad \dot{x} = \frac{x-t}{x+t} \qquad \dot{x} = 1 + x/t$$
$$\dot{x} = x/t \qquad \dot{x} = 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} \qquad \frac{dy}{dx} = y/x + \sin(y/x)\,,$$
definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

10. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá no instante t é proporcional à diferença entre a temperatura do ar e a temperatura do chá no instante t.
- A taxa de variação do número de elementos de uma população de cogumelos no instante t é proporcional à raiz quadrada do número de elementos da população no instante t.
- A velocidade de um foguetão no instante t é inversamente proporcional à altura atingida no instante t.
- A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

11. (reacções químicas simples) Considere a reacção

$$A \leftrightarrows B$$

entre duas espécies químicas A e B. Assuma que as velocidades[8] sejam dadas por $v_{\rightarrow} = k_{\rightarrow}[A]$ e $v_{\leftarrow} = k_{\leftarrow}[B]$, onde $[A]$ e $[B]$ são as concentrações de A e B, respectivamente, e $k_{\rightarrow}$ e $k_{\leftarrow}$ são constantes. No equilíbrio, as concentrações verificam

$$[B]_e/[A]_e = k_{\rightarrow}/k_{\leftarrow} \, .$$

- Mostre que $x = [A] - [A]_e$ satisfaz a equação diferencial
$$\dot{x} = -(k_{\rightarrow} + k_{\leftarrow})x$$
e calcule $x(t)$ dado um valor inicial $x(0)$.
- Mostre como estimar as velocidades de reacção, $k_{\rightarrow}$ e $k_{\leftarrow}$, utilizando as observações de $[A]_t$ e $[B]_t$.

[8]Segundo a *lei de acção das massas*, "numa dada temperatura, a velocidade de uma reacção química é proporcional ao produto das concentrações molares dos reagentes, elevadas a expoentes iguais aos respectivos coeficientes da equação química balanceada". Por exemplo, a velocidade da reação

$$aA + bB + ... \rightarrow xX + yY + ...$$

é dada por

$$v_{\rightarrow} = K_T^{\rightarrow}[A]^a[B]^b ...$$

onde $[A]$, $[B]$, ... são as concentrações molares de A, B, ... , e $K_T^{\rightarrow}$ é uma constante (que pode depender da temperatura T, por exemplo, segundo a *lei de Arrhenius* $K_T = Ae^{-E/RT}$, com A e E constantes). A velocidade da reação inversa

$$aA + bB + ... \leftarrow xX + yY + ...$$

é

$$v_{\leftarrow} = K_T^{\leftarrow}[X]^x[Y]^y ...$$

Então no equilíbrio as concentrações satisfazem a lei

$$\frac{[A]^a[B]^b ...}{[X]^x[Y]^y ...} = K_T$$

onde $K_T = K_T^{\leftarrow}/K_T^{\rightarrow}$.

3 EDOs lineares de primeira ordem

1. (EDOs lineares de primeira ordem) A solução de uma EDO *linear de primeira ordem*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogénea associada $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogénea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,\;\; x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(u)du}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} q(s)ds\right)\,.}$$

- Mostre que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem $\dot{x} + p(t)x = q(t)$, então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da equação homogénea associada, $\dot{y} + p(t)y = 0$.
- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \qquad \dot{x} + 2x = t \qquad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \qquad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.
- Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t^3 \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r\tan\theta = \cos\theta \qquad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

2. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força $-k\dot{r}$ proporcional e contrária à velocidade, assim a equação de Newton escreve-se $m\ddot{r} = -k\dot{r} - mg$, onde k é uma constante positiva. Chamando $v = \dot{r}$ a velocidade da partícula, somos levados a EDO

$$m\dot{v} = -kv - mg$$

- Resolva o problema de Cauchy com condição inicial $v(0) = 0$.
- Mostre que a velocidade v tende para um valor assimptótico quando $t \to \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
- Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $r(t)$ com condição inicial $r(0) = s$.

3. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.

- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E\sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω, L e R.

4. (lei do arrefecimento de Newton) A temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\,(T - M(t))$$

onde k é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução geral como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e de $M(\tau)$ com $0 \leq \tau \leq t$.
- Determine a solução assimptótica (ou seja, quando t é grande) $T(t)$ quando $M(t) = M\sin(\omega t)$.
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100^oC, é colocada numa sala cuja temperatura é de 20^oC. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

5. (equações de Bernoulli) Uma EDO da forma

$$\dot{x} + P(t)x = Q(t)x^n,$$

onde P e Q são funções contínuas num intervalo I e com $n \neq 0$ ou 1 (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação de Bernoulli.*

- Verifique que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio da equação de Bernoulli.
- Seja $k = 1 - n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$ sse a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$\dot{y} + kP(t)y = kQ(t)$$

com condição inicial $y(t_0) = (x_0)^{1/k}$.
- Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2(\cos t - \sin t) \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}x = x^2 \log t \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

4 EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes

1. (EDOs de segunda ordem homogéneas com coeficientes constantes) Soluções da EDO homogénea
$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$$
podem ser determinadas usando a conjectura $x(t) = e^{zt}$. Se $z_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ são as raizes do *polinómio caractéristico* $z^2 + 2\alpha z + \beta$, então duas soluções independentes são

$e^{-\alpha t}e^{kt}$, $e^{-\alpha t}e^{-kt}$	raizes reais e distintas $z_\pm = -\alpha \pm k$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$, $e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	raizes complexas conjugadas $z_\pm = -\alpha \pm i\omega$
$e^{-\alpha t}$, $te^{-\alpha t}$	raiz dupla $z_\pm = -\alpha$

   - Determine a solução geral das seguintes EDOs homogéneas:
$$\ddot{x} - 2x = 0 \qquad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 \qquad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 \qquad \ddot{x} - \dot{x} = 0$$
$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \qquad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0\,.$$
   - Resolva os seguintes problemas de Cauchy:
$$\ddot{x} + 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$
$$\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1$$
$$\ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0$$
$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9$$
$$\ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1\,.$$
   - Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:
$$e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}\,, \qquad e^{-t}\sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t}\cos(2\pi t)\,, \qquad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t)\,,$$
$$e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}\,, \qquad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2)\,, \qquad 3 \quad \text{e} \quad 5t\,.$$

2. (oscilador harmónico) Considere a equação do *oscilador harmónico*
$$\ddot{q} = -\omega^2 q\,.$$
   - Determine a solução com condição inicial $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, mostre que é periódica e determine o período das oscilações.
   - Mostre que a solução pode ser escrita nas formas
$$q(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad A\cos(\omega t + \phi)\,,$$
onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais q_0 e v_0.
   - Mostre que a energia
$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$
é uma constante do movimento, ou seja que se $q(t)$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$ para todo o tempo t.
   - Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.
   - Esboce as curvas de fase no plano q-$\dot{q}$.

3. (partícula numa montanha) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = k^2 q\,,$$

que descreve uma partícula de massa m num potencial $U(q) = -\frac{1}{2}k^2q^2$.

- Determine a solução geral.
- Existem soluções de equilíbrio? Existem outras órbitas periódicas ou limitadas?

4. (oscilações amortecidas) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q\,,$$

onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito.

- Resolva a equação, esboce algumas soluções e discuta os casos
  $\alpha^2 < \omega^2$ (amortecimento sub-crítico),
  $\alpha^2 = \omega^2$ (amortecimento crítico),
  e $\alpha^2 > \omega^2$ (amortecimento super-crítico).
- Mostre que a energia
$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$
  não é uma constante do movimento.
- O que acontece quando α é negativo?

5. (equação de Schrödinger estacionária) Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

para a função de onda $\Psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J·s. Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

6. (equações equidimensionais) Uma equação diferencial da forma

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional* (é invariante pela transformação $x \mapsto \lambda x$ com $\lambda > 0$).

- Mostre que a substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) = y(x(t))$.
- Resolva a equação
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0\,,$$
  na semirecta $x > 0$.

7. (variação dos parâmetros) Uma solução particular da EDO

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = r(t)$$

é dada por

$$z(t) = \lambda_+(t)\phi_+(t) + \lambda_-(t)\phi_-(t)$$

onde

$$\boxed{\lambda_+(t) = -\int \phi_-(t)\frac{r(t)}{W_{\phi_+,\phi_-}(t)}dt\,, \qquad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t)\frac{r(t)}{W_{\phi_+,\phi_-}(t)}dt\,,}$$

$\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ são duas soluções independentes da equação homogénea $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, e $W_{\phi_+,\phi_-}(t) = \phi_+(t)\dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t)\phi_-(t)$ é o Wronskiano.

- Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em oportunos domínios, utilizando o método de variação dos parâmetros:

$$\ddot{x} + x = 1/\sin(t) \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t} \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}\log t\,.$$

$$\ddot{x} + x = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \qquad \ddot{x} + x = \tan(t) \qquad \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = \frac{e^{2t}}{\cos(2t)} \qquad .$$

8. (coeficientes indeterminados) O *método dos coeficientes indeterminados* permite determinar soluções particulares de uma EDO linear

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = r(t)$$

quando o segundo membro pertence a álgebra gerada por polinómios, exponenciais, senos e cosenos, ou seja, quando $r(t)$ é uma combinação linear de termos

$$t^k \cdot e^{\rho t} \cdot (\cos(\omega t) \;\text{ ou }\; \sin(\omega t))$$

A conjectura para uma solução particular é

$$z(t) = p(t) \cdot e^{\rho t} \cdot (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$

onde $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ é um polinómio de grau $n \leq k + 2$.

- Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\ddot{x} + x = t \qquad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 \qquad \ddot{x} - 4x = e^{-2t}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^3 e^{-t} + e^t \qquad \ddot{x} + x = \sin(t) \qquad \ddot{x} + 4x = 2t\cos(t)$$

$$\ddot{x} + 9x = \sin(\pi t) \qquad \ddot{x} + 4x = \cos(2t) \qquad \ddot{x} - 4x = te^{-2t} \qquad \ddot{x} + 4x = te^{-t}\cos(2t)\,.$$

9. (representação integral da resposta de um oscilador) Mostre que uma solução particular da equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = r(t) \qquad \text{é} \qquad x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t r(\tau)\sin\left(\omega(t-\tau)\right) d\tau\,,$$

e que uma solução particular da equação

$$\ddot{x} - k^2 x = r(t) \qquad \text{é} \qquad x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t r(\tau)\sinh\left(k(t-\tau)\right) d\tau\,.$$

10. (partícula num campo de forças dependente do tempo) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} + F(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$, onde $\alpha \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajectória quando a força é

- $F(t) = g$, ou seja, constante,
- $F(t) = 3 - t^2$,
- $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$,
- $F(t) = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\gamma_i t)$.

11. (oscilações forçadas) Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + F(t)\,.$$

onde a força é $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$.

- Determine a solução geral da equação quando $\gamma^2 \neq \omega^2$.

- Mostre que a solução quando $\gamma^2 = \omega^2$ (frequência ressonante) é

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) \ .$$

onde a amplitude A e a fase φ dependem dos dados iniciais.

12. (oscilações forçadas amortecidas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha \dot{q} - \omega^2 q + F(t) \, ,$$

onde $\alpha > 0$ e a força é $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$.

- Mostre que, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), a solução geral é

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t + \varphi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \sin(\gamma t + \phi) \ ,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais. A primeira parcela da solução representa um regime transitório (transiente), desprezável para grandes valores do tempo. A segunda é dita solução estacionária, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função

$$R(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}}$$

é dita *curva de ressonância* do sistema, pois representa o factor de proporcionalidade entre a amplitude da força e a amplitude da resposta.

- Esboce o gráfico da curva de ressonância. Mostre que a curva de ressonância $R(\gamma)$ atinge um máximo para o valor

$$\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}$$

da frequência, chamada *frequência de ressonância*.

- Determine a solução estacionária quando a força é uma sobreposição

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos(\gamma_i t) \, .$$

- Discuta também os casos $\alpha^2 = \omega^2$ e $\alpha^2 > \omega^2$.

13. (circuito RLC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R, indutância L e capacidade C, é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{V} \, ,$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$, e esboce as soluções.
- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).
- Determine a frequência de ressonância do circuito.

Formulário primitivas

	(função)	("uma" primitiva)
	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x)$
(por substituição)	$f(y(x))y'(x)$	$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy$
(por partes)	$f(x)g'(x)$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
(constantes)	λ	$\int \lambda dx = \lambda x$
(potências, $\alpha \neq -1$)	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
(logaritmo)	$1/x$	$\int \frac{dx}{x} = \log\|x\|$
(exponencial)	e^x	$\int e^x dx = e^x$
(seno)	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
(coseno)	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)$
(tangente)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
(cotangente)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\text{cotan}(x)$
(arco cujo seno)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$
(arco cuja tangente)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
(exponencial $\times$ seno)	$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x)-\beta\cos(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
(exponencial $\times$ coseno)	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
(coseno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\cos(nx)\cos(mx)$	$\int \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ seno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx)\sin(mx)$	$\int \sin(nx)\sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx)\cos(mx)$	$\int \sin(nx)\cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)}$
($x \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x\cos(nx)$	$\int x\cos(nx)dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n}$
($x \times$ seno, $n \neq 0$)	$x\sin(nx)$	$\int x\sin(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}$
($x^k \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x^k\cos(nx)$	$\int x^k\cos(nx)dx = \frac{x^k\sin(nx)}{n} - \frac{k}{n}\int x^{k-1}\sin(nx)dx$
($x^k \times$ seno, $n \neq 0$)	$x^k\sin(nx)$	$\int x^k\sin(nx)dx = -\frac{x^k\cos(nx)}{n} + \frac{k}{n}\int x^{k-1}\cos(nx)dx$

5 Transformada de Laplace

1. (transformada de Laplace) Seja $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial[9] m. A *transformada de Laplace* de $f(t)$ é a função $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z)$, definida pelo integral impróprio

$$\boxed{F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt}$$

$F(z)$ é holomorfa no domínio $\Re(z) > m$ onde o integral é absolutamente convergente. A restrição de $F(z)$ à recta real, ou seja em $s = \Re(z) > m$, é denotada por $F(s)$.

- Verifique as seguintes propriedades elementares da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\}(s) = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \mu \mathcal{L}\{g(t)\}(s) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}\,, \text{ com } s > m\,,$$

$$\mathcal{L}\{f(\lambda t)\}(s) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}\{f\}(s/\lambda) \quad \forall \lambda > 0\,, \text{ com } s > \lambda m\,.$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{kt} f(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-k) \quad \forall k \in \mathbf{R}\,, \text{ com } s > m + k\,.$$

- Verifique as seguintes fórmulas para as transformadas de Laplace das funções elementares: [10]

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \ldots \qquad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{com } s > 0\,.$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{kt}\right\}(s) = \frac{1}{s-k} \qquad \text{com } s > k$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{com } s > 0\,.$$

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s} \qquad \text{com } s > 0$$

- Verifique que a transformada de Laplace da potência $f(t) = t^q$, com $q \geq 0$, é

$$\mathcal{L}\{t^q\}(s) = \frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}} \qquad \text{com } s > 0\,,$$

onde a *função Gama* é definida pelo integral impróprio

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \text{em } \Re(z) > 0$$

Mostre que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, e que $\Gamma(1) = 1$. Deduza que Γ extende o factorial, ou seja, $\Gamma(n+1) = n!$ se $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

2. (transformada de Laplace de funções periódicas) Se $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ é uma função seccionalmente contínua e periódica de período T então a sua transformada de Laplace é

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \tfrac{F_T(s)}{1-e^{-sT}} \qquad \text{onde} \qquad F_T(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt}$$

- Determine a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas: [11]

$$f(t) = t - [t] \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 & \text{se } [t] \text{ é impar} \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} t - [t] & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 + [t] - t & \text{se } [t] \text{ é impar} \end{cases}$$

[9] A função $f(t)$ tem crescimento exponencial se $\exists\, m \geq 0$ e $M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{mt}$, $\forall t \geq 0$. A *ordem exponencial* de $f(t)$ é o $\inf\{m \geq 0 \text{ t.q. } \exists M > 0 \text{ t.q. } |f(t)| \leq Me^{mt}, \forall t \geq 0\}$

[10] A *função de salto unitário* (ou *função de Heaviside*) em $a \geq 0$ é definida por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases}\,.$$

[11] $[t]$ denota a parte inteira de t, ou seja, o maior inteiro $n \in \mathbf{Z}$ tal que $n \leq t$.

3. (transformada de Laplace e translações/retardos) Seja $f : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial m. Mostre que, se $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m\,,$$

e portanto

$$\mathcal{L}\{f(t+a)\}(s) = e^{as}\mathcal{L}\{u_a(t)f(t)\} \quad \text{com } s > m\,.$$

4. (produto de convolução) Sejam f e $g : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ duas funções seccionalmente contínuas e de ordem exponencial m. O *produto de convolução (para sistemas causais)* de f e g é a função $f * g : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

   - Mostre que
$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \text{com } s > m\,.$$
   - Deduza que
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m\,.$$

5. (derivadas e transformada de Laplace) Seja $f : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial m, e seja $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, com $s > m$, a sua transformada de Laplace.

   - Mostre que $F(s)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e
$$\frac{d^nF}{ds^n}(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}(s)\,.$$
   - Mostre que, se f e as suas derivadas f', f'', ..., $f^{(n)}$ são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial m, então
$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\,.$$

6. (transformadas de Laplace de funçẽs elementares) Determine a transformada de Laplace das seguintes funções $f(t)$:

$$t^2 - 2t + 1 \qquad 2 + e^{3t} - 5\sin(\pi t) \qquad (t-1)e^{2t} \qquad \sin(5t)\cos(4t)$$

$$t^n e^{kt} \qquad \cosh(\beta t) \qquad \sinh(\beta t)$$

$$e^{-\alpha t}\cos(\omega t) \qquad e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \qquad t\cos(\omega t) \qquad t\sin(\omega t)$$

$$u_a(t)e^{-\alpha t} \qquad u_a(t)\sin(\omega t) \qquad (1-u_a(t))\,t\,.$$

$$A\sin(\omega t + \varphi) \qquad Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi) \qquad Ae^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \varphi)$$

$$A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos(\gamma t) \qquad A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2\omega}t\sin(\omega t)$$

$$Ae^{-\alpha t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}}\sin(\gamma t + \phi)$$

7. (transformada de Laplace inversa) Se $F(z)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$, então $f(t)$ é dita *transformada de Laplace inversa* de $F(z)$, e denotada por $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$. Nos pontos de continuidade de $f(t)$, vale a *fórmula (de inversão) de Mellin* (ou de *Bromwich*)

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{zt}F(z)dz}$$

onde $\beta > m$ e m é a ordem exponencial de $f(t)$.

- Mostre as seguintes propriedades da transformada de Laplace inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\lambda F(s)+\mu G(s)\right\}(t)=\lambda\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t)+\mu\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}(t)\quad\forall\,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\,,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\}(t)=e^{at}\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t)\qquad\forall\,a\in\mathbf{R}\,,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}(t)=u_a(t)\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t-a)\qquad\forall\,a>0\,,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\lambda}F(s/\lambda)\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(\lambda t)\qquad\forall\,\lambda>0\,,$$

- Determine uma transformada de Laplace inversa das seguintes funções $F(s)$:

$$\frac{2}{s}+\frac{1}{s^4}\qquad\frac{2}{s^2+9}\qquad\frac{1}{s\,(s^2+1)}\qquad\frac{s-1}{s^2-2s+5}$$

$$\frac{e^{-3s}}{s}\qquad\frac{e^{-s}}{(s-2)^2}\qquad\frac{e^{-4s}-e^{-7s}}{s^2}\qquad\frac{1}{s^3+4s^2+3s}$$

Transformadas de Laplace (para sistemas causais)

	(espaço dos *tempos* $t \geq 0$)	(espaço das *frequências* $s > m$)
	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m+\varepsilon-i\infty}^{m+\varepsilon+i\infty} e^{zt}F(z)dz$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
(linearidade)	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(s) + \mu G(s)$
(homotetias no espaço dos tempos)	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda}F(s/\lambda)$
(translações no espaço dos tempos, retardo)	$f(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
(translações no espaço das frequências)	$e^{-\alpha t}f(t)$	$F(s+\alpha)$
(funções periódicas)	$f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-Ts}}$
(convolução)	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
(integração no espaço dos tempos)	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$
(integração no espaço das frequências)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_m^\infty F(s)ds$
(derivação no espaço dos tempos)	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f^{(k)}(t)$	$s^kF(s) - s^{k-1}f(0) - ... - f^{(k-1)}($
(derivação no espaço das frequências)	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
(constante)	$1 = u(t-0)$	$\frac{1}{s}$
(impulso unitário em $\tau \geq 0$)	$\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$
(salto unitário em $\tau \geq 0$)	$u_\tau(t) = u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
(potências inteiras)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
(outras potências, $q \geq 0$)	t^q	$\frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$
(crescimento/decaimento exponencial)	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
(potências com decaimento)	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
(potências com decaimento retardadas)	$e^{-\alpha(t-\tau)}(t-\tau)^n u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s+\alpha)^{n+1}}$
(coseno e seno)	$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$	$\frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
(coseno e seno hiperbólicos)	$\cosh(\beta t)$ e $\sinh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$ e $\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$
(oscilações amortecidas)	$e^{-\alpha t}e^{i\omega t} = e^{-\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$	$\frac{s+\alpha+i\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+}$

6 Aplicações da transformada de Laplace

1. (função de transferência e resposta impulsiva) Sejam $L = m\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\frac{d}{dt} + \beta$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes e $f(t)$ uma função seccionalmente contínua com crescimento exponencial, e considere a equação diferencial $Lx = f(t)$, ou seja,

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t)\,.$$

.

- Mostre que a solução do problema de Cauchy

$$Lx = f(t) \qquad \text{com} \qquad x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

pode ser escrita como

$$x(t) = y(t) + z(t)\,,$$

onde $y(t)$ é a única solução da equação homogénea $Ly = 0$ com condição inicial $y(0) = x_0$ e $\dot{y}(0) = v_0$, e $z(t)$ é a solução particular da equação não-homogénea $Lz = f(t)$ com condição inicial trivial $z(0) = 0$ e $\dot{z}(0) = 0$.

- Mostre que, se $Z(s)$ denota a transformada de Laplace de $z(t)$ e $F(s)$ denota a transformada de Laplace do segundo membro $f(t)$, então

$$Z(s) = \frac{F(s)}{P(s)}\,,$$

onde $P(s) = ms^2 + \alpha s + \beta$ é o polinómio característico do operador diferencial L.
A função $H(s) = 1/P(s)$, que representa o quociente entre a resposta $Z(s)$ e a força externa $F(s)$ (no espaço das frequências), é chamada *função de transferência* do sistema.

- Seja $h(t)$ a transformada de Laplace inversa contínua da função de transferência, ou seja, uma função contínua tal que

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st}h(t)dt\,,$$

chamada *resposta impulsiva* do sistema. Mostre que $h(t)$ é a solução da equação homogénea $Lh = 0$ com condição inicial $h(0) = 0$ e $m\dot{h}(0) = 1$, assim como a solução da equação diferencial formal[12] $Lh = \delta(t)$ com condição inicial trivial.

- Deduza que a solução particular $z(t)$ da equação não-homogénea $Lz = r(t)$ com condição inicial trivial $z(0) = 0$ e $z'(0) = 0$ pode ser escrita como

$$z(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau\,,$$

e que portanto a solução do problema de Cauchy é

$$x(t) = y(t) + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau\,.$$

- Prove a fórmula acima sem utilizar a transformada de Laplace.
- Enuncie e mostre um resultato análogo para equações diferenciais ordinarias lineares com coeficientes constantes de ordem arbitrário.

[12] A *função delta de Dirac* $\delta(t)$ é definida pela identidade formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\,,$$

onde $f(t)$ é uma função contínua arbitrária. A sua transformada de Laplace é $\int_0^\infty e^{-st}\delta(t)dt = 1$, e a transformada de Laplace de $\delta(t-\tau)$ é $\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-\tau)dt = e^{-\tau s}$. De facto, δ não é uma função, mas um funcional linear $\langle\delta|$ definido no espaço das funções contínuas $|f\rangle$, que associa à função $f(t)$ o valor $\langle\delta|f\rangle =$ "$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt$" $= f(0)$.

2. (treino) Resolva, usando a transformada de Laplace (por exemplo, os resultados do exercício um!), os seguintes problemas de Cauchy:

$$\dot{x} + x = 0 \qquad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = -e^t \qquad \text{com } x(0) = \sqrt{2}$$

$$\ddot{x} + 4x = 3t \qquad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \qquad \text{com } x(0) = -1 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \qquad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = 1 \qquad \text{com } x(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 4x = 1 \qquad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = t - [t] \qquad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \delta(t - t_0) \qquad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1$$

$$\ddot{x} + \pi^2 x = 3\left(1 - u_{t_0}(t)\right) \qquad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

3. (oscilações) Considere as equações das *oscilações forçadas* e das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t) \qquad \text{e} \qquad \ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2 q = f(t)\,.$$

- Determine a função de transferência e a resposta impulsiva dos dois sistemas.
- Determine a solução do problema de Cauchy com condição inicial $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, quando a força é

$$f(t) = f_0\delta(t - t_0) \qquad f(t) = f_0 u_{t_0}(t) \qquad f(t) = f_0\left(1 - u_{t_0}(t)\right) \qquad f(t) = f_0\cos(\gamma t)\,.$$

4. (circuito RL) Considere a equação

$$L\dot{I} + RI = V\,,$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RL alimentado com tensão $V(t)$.

- Determine a função de transferência do circuito.
- Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a V_0, é desligado no instante $t_0 > 0$, dada uma corrente inicial (lei de Ohm) $I(0) = V_0/R$.
- Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante $t_0 > 0$ e fornece uma tensão constante $V(t) = V_0 u_{t_0}(t)$ ou alternada $V(t) = V_0 u_{t_0}(t)\sin(\omega t)$, dada uma corrente inicial nula.

5. (circuito RCL) Considere a equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}\,,$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RLC alimentado com tensão $V(t)$.

- Determine a função de transferência do circuito e uma fórmula integral para a corrente $I(t)$, dada uma corrente inicial $I(0) = 0$ e $\dot{I}(0) = 0$.
- Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a V_0, é desligado no instante $t_0 > 0$, dada uma corrente inicial estacionária $I(0) = V_0/R$ e $\dot{I}(0) = 0$. .
- Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante $t_0 > 0$ e fornece uma tensão constante $V(t) = V_0 u_{t_0}(t)$ ou alternada $V(t) = V_0 u_{t_0}(t)\sin(\omega t)$, dada uma corrente inicial $I(0) = 0$ e $\dot{I}(0) = 0$.

6. (injecções) A quantidade de medicamento que circula no sangue de um paciente decresce segundo o modelo exponencial $\dot{x} = -\beta x$, com $\beta > 0$. Uma injecção com dose $a > 0$ no instante τ é idealizada como sendo um impulso instantâneo $a\delta_\tau(t)$, e portanto

$$\dot{x} = -\beta x + a\delta_\tau(t)\,.$$

   - Determine a quantidade de medicamento $x(t)$ que circula no sangue de um paciente que recebe uma série de injecções nos instantes $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, com doses $x_1, x_2, ..., x_n$, respectivamente, dada uma quantidade inicial $x(0) = 0$.

7 Ondas e difusão, método de separação de variáveis

1. (separação de variáveis) Determine soluções separáveis das seguintes EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$$

2. (equação de onda e solução de d'Alembert) Considere a equação de onda

$$\boxed{\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{com } x \in \mathbf{R}}$$

   - Mostre que a mudança de variáveis independentes $(x,t) \mapsto (\xi, \eta)$, onde $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$, transforma a equação acima na forma canónica

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0\,,$$

   cuja solução geral é uma sobreposição de duas ondas

   $$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)\,,$$

   onde f e g são funções diferenciáveis arbitrárias.
   - Verifique que a *fórmula de d'Alembert*

   $$\boxed{u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(y)dy}$$

   é uma solução da equação de ondas com condições iniciais

   $$u(x,0) = \phi(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x)\,.$$

   - Mostre que, se as condições iniciais $\phi(x)$ e $\varphi(x)$ são nulas fora dum intervalo $[-L, L]$, então a solução $u(x,t)$ é nula fora do intervalo $[-L-ct, L+ct]$, e interprete este facto.
   - Determine uma solução quando as condições iniciais são

   $$u(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(2\pi x)\,,$$

   ou

   $$u(x,0) = e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

   - Mostre que, se as condições iniciais $u(x,0) = \phi(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x)$ são funções ímpares, então a solução $u(x,t)$ é uma função ímpar de x para cada tempo t. Use esta observação para resolver o problema das ondas na semi-recta $x \geq 0$ com condição de fronteira nula $u(0,t) = 0$.

3. (corda vibrante e harmónicas) Considere as pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ, tensão k e densidade linear ρ. O deslocamento transversal $u(x,t)$ da corda verifica a equação de onda

$$\boxed{\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

   - Mostre que a energia

   $$E = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx$$

   é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$.

- Verifique que umas soluções da equação com as extremidades fixas são as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \Big(a_n\cos(2\pi\nu_n t) + b_n\sin(2\pi\nu_n t)\Big)\sin(2\pi x/\lambda_n) \\ &= A_n\sin(2\pi\nu_n t+\tau_n)\sin(2\pi x/\lambda_n)\,, \qquad \text{com } n=1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

  onde a_n e b_n, ou $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ e τ_n, são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n = \frac{c}{2\ell}n \qquad \text{e} \qquad \lambda_n = \frac{2\ell}{n}\,, \qquad \text{com } n=1,2,3,\ldots.$$

  respectivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = \frac{c}{2\ell}$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = \frac{cn}{2\ell}$, são ditas n-ésimas *harmónicas* da corda.
- Determine a energia da uma sobreposição de ondas estacionárias

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} A_n\sin(2\pi\nu_n t+\tau_n)\sin(2\pi x/\lambda_n)\,,$$

  suposta convergente, em função das amplitudes das harmónicas.
- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?
- Determine umas soluções da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad \text{com } 0\leq x\leq \pi\,,$$

  com condições de fronteira nulas, $u(0,t)=0$ e $u(\pi,t)=0$, e condições iniciais

$$u(x,0)=\sin(3x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin(4x)\,,$$

  ou

$$u(x,0) = 3\sin(x)-\sin(2x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,.$$

4. (condução de calor com temperatura constante na fronteira e modos) Considere a condução de calor num fio condutor de comprimento ℓ e difusividade térmica β. A temperatura $u(x,t)$ na posição x e no tempo t verifica a equação de calor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

- Verifique que a função

$$a + \frac{b-a}{\ell}x$$

  é uma solução estacionária da equação de calor com condições de fronteira constantes $u(0,t)=a$ e $u(\ell,t)=b$. Deduza que a solução da equação com condições de fronteira constantes $u(0,t)=a$ e $u(\ell,t)=b$ é igual a

$$u(x,t) = a + \frac{b-a}{\ell}x + v(x,t)\,,$$

  onde $v(x,t)$ é a solução da equação com condições de fronteira nulas $v(0,t)=0$ e $v(\ell,t)=0$.
- Verifique que umas soluções da equação de calor com condições de fronteira nulas $u(0,t)=0$ e $u(\ell,t)=0$ são os *modos*

$$u_n(x,t) = s_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) \qquad \text{com } n=1,2,3,\ldots,$$

  onde s_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} s_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

também é solução da equação com condições de fronteira nulas $u(0,t) = 0$ e $u(\ell,t) = 0$, e determine o limite de $u(x,t)$ quando $t \to \infty$.

- Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica $10^{-2}\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de 0^oC. Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\mathrm{m}} x\right) \times 60^o\mathrm{C}\,,$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a 4^oC? O que acontece para grandes valores do tempo?
E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de 0^oC e 100^oC, respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

- Determine as soluções da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad \text{com } 0 \le x \le \pi\,,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 0$, e condição inicial

$$u(x,0) = \sin(x) + 3\sin(2x)\,,$$

ou

$$u(x,0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

5. (condução de calor com fluxo nulo na fronteira) Considere a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

em $0 \le x \le \ell$, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0$, que descreve o perfil de temperatura de um fio condutor termicamente isolado.

- Verifique que umas soluções são os modos

$$u_n(x,t) = c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \ldots\,,$$

onde c_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

também é uma solução, e determine o limite de $u(x,t)$ quando $t \to \infty$.

6. (ondas e calor na recta) Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda e de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com $x \in \mathbf{R}$.

7. (equação de Schrödinger) Considere a *equação de Schrödinger* unidimensional

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

para a função de onda $\Psi(x,t) \in \mathbf{C}$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida.

- Determine soluções separáveis quando $x \in [0,\ell]$ com condições de fronteira nulas, $\Psi(0,t) = \Psi(\ell,t) = 0$.
- Mostre que as soluções separáveis e limitadas na recta, ou seja, quando $x \in \mathbf{R}$, são proporcionais a
$$\Psi_E(x,t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}e^{i\frac{px}{\hbar}}\ ,$$
onde $E \geq 0$ e $p = \sqrt{2mE}$.

8 Séries de Fourier

1. (séries de Fourier complexas) Se $f(z)$ é uma função holomorfa num domínio que contém a circunferência unitária, então a sua expansão em série de Laurent pode ser escrita, nos pontos $z = e^{i\theta}$, como

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad \text{onde} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Em geral, se $f(\theta)$ é uma função integrável em $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (ou seja, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ é uma função periódica com período 2π), a sua *série de Fourier complexa* é

$$\boxed{f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta}}$$

(o símbolo "$\sim$" é apenas uma notação!), onde os *coeficientes de Fourier complexos* de $f(\theta)$ são

$$\boxed{\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta}$$

Se $f(\theta)$ é uma função seccionalmente de classe $\mathcal{C}^1$, então a sua série de Fourier no ponto θ converge uniformemente para o valor médio $(f(\theta_+) + f(\theta_-))/2$. Em particular, a série de Fourier de uma função $f(\theta) \in \mathcal{C}^1(S^1)$ converge para $f(\theta)$ na norma uniforme, ou seja,

$$\sup_{\theta\in S^1} \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{in\theta} \right| \to 0 \qquad \text{quando } N \to \infty\,.$$

O produto interno e a norma L^2 no espaço $L^2(S^1)$ das funções complexas em $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ com quadrado integrável são definidos por

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\theta \qquad \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

A aplicação $f(\theta) \mapsto \hat{f}(n)$ define um isomorfismo de $L^2(S^1)$ em ℓ_2, o espaço das sucessões $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ tais que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, munido do produto interno $(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. De facto, vale

$$\boxed{(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}}$$

e a *identidade de Parseval*

$$\boxed{\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2}$$

A série de Fourier de uma função $f(\theta) \in L^2(S^1)$ converge para $f(\theta)$ na norma L^2, ou seja,

$$\left\| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{in\theta} \right\| \to 0 \qquad \text{quando } N \to \infty\,.$$

- Verifique as relações de ortogonalidade

$$(e^{in\theta}, e^{im\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

- Mostre que, se $f(\theta)$ é diferenciável e a derivada $f'(\theta)$ é integrável, então

$$\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$$

2. (séries de Fourier) A *série de Fourier* da função integrável $f(x)$, periódica de período 2ℓ, é

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)\right)}$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx}$$

Se $f(x)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, então a sua série de Fourier converge uniformemente para $f(x)$.

- Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas de período 2π (as soluções estão no formulário!):
  $f(x) = \cos(\pi x) - 2\sin(3\pi x)$,
  $f(x) = x \quad$ se $-\pi \leq x < \pi$, $\quad$ e periódica de período 2π ,
  $f(x) = |x| \quad$ se $-\pi \leq x < \pi$, $\quad$ e periódica de período 2π .
- Mostre que a série de Fourier da função $\Theta(x)$, periódica de período 2π e definida por

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

  no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$\Theta(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots\right)$$

  Deduza que a série de Fourier da função $2\Theta(x) - 1$, periódica de período 2π e definida por

$$2\Theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

  no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$2\Theta(x) - 1 \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots\right) .$$

- Mostre que a série de Fourier da função $f(x)$, periódica de período 2π e definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \dots\right) .$$

  Deduza que o valor da *função zeta de Riemann* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ no ponto $s = 2$ é

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = \frac{\pi^2}{6} .$$

3. (séries de Fourier de senos) A *série de Fourier de senos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão ímpar 2ℓ-periódica de f, ou seja,

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{onde} \qquad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx}$$

- Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, das extensões ímpares e 2π-periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad\qquad 1 - \cos(2x) \qquad\qquad \delta(x - \pi/2) \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

4. (séries de Fourier de cosenos) A *série de Fourier de cosenos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão par 2ℓ-periódica de f, ou seja,

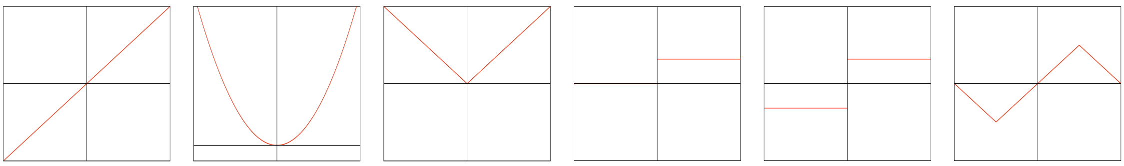
$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \,, \qquad \text{onde} \qquad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx}$$

- Determine as séries de Fourier de co-senos (ou seja, das extensões pares e 2π-periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad \sin(2x) \qquad \delta(x - \pi/2) \qquad \pi - x$$

Algumas séries de Fourier das extensões periódicas de período 2π de funções definidas no intervalo $-\pi \leq x < \pi$

(função em $[-\pi,\pi]$)	(série de Fourier)
x	$\sim 2\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + ...\right)$
x^2	$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + ...\right)$
$\|x\|$	$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{49}\cos(7x) + ...\right)$
$\left.\begin{array}{cc} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{array}\right\} = \Theta(x)$	$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + ...\right)$
$\left.\begin{array}{cc} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{array}\right\} = 2\Theta(x) - 1$	$\sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + ...\right)$
$\left.\begin{array}{cc} \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\pi/2 \end{array}\right\} = Z(x)$	$\sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) - \frac{1}{9}\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(5x) - \frac{1}{49}\sin(7x) + ...\right)$
$\delta(x-\alpha) - \delta(x+\alpha)$	$\sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)\sin(nx)$
$\delta(x-\alpha) + \delta(x+\alpha)$	$\sim \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\alpha)\cos(nx)$



x $\quad x^2$ $\quad |x|$ $\quad \Theta(x)$ $\quad 2\Theta(x) - 1$ $\quad Z(x)$

Integrais úteis

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2\, dx = \pi \qquad \text{se } n = 1, 2, 3, ...$$

$$\int \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} \qquad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int \sin(nx)\sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} \qquad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int \sin(nx)\cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} \qquad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int x^k \cos(nx)dx = \frac{x^k \sin(nx)}{n} - \frac{k}{n}\int x^{k-1}\sin(nx)dx \qquad \text{se } n \neq 0 \text{ e } k = 1, 2, 3, 4, ...$$

$$\int x^k \sin(nx)dx = -\frac{x^k \cos(nx)}{n} + \frac{k}{n}\int x^{k-1}\cos(nx)dx \qquad \text{se } n \neq 0 \text{ e } k = 1, 2, 3, 4, ...$$

9 Aplicações das séries de Fourier

1. (corda vibrante) A solução formal do problema da corda vibrante

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in [0, \ell]\,, \qquad \text{com } \; u(0,t) = u(\ell,t) = 0}$$

com condições iniciais

$$\boxed{u(x,0) \sim \sum_{n=1}^\infty a_n \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{e} \qquad \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sim \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

é

$$\boxed{u(x,t) \sim \sum_{n=1}^\infty \Big(a_n \cos\left(\tfrac{\pi c n}{\ell} t\right) + b_n \tfrac{\ell}{\pi c n} \sin\left(\tfrac{\pi c n}{\ell} t\right) \Big) \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,, \qquad \text{com } \; u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,$$

e com condições iniciais (deslocamento inicial "triangular")

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

- com condições iniciais (impulso inicial concentrado num ponto)

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sim \delta(x - \pi/2)\,.$$

2. (condução de calor) A solução formal do problema da condução de calor com condições de fronteira nulas

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in [0, \ell]\,, \qquad \text{com } \; u(0,t) = u(\ell,t) = 0}$$

e com condição inicial

$$\boxed{u(x,0) \sim \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{é} \qquad u(x,t) \sim \sum_{n=1}^\infty b_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

A solução formal do problema da condução de calor com fluxo nulo nas extremidades

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in [0, \ell]\,, \qquad \text{com } \; \tfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0}$$

com condição inicial

$$\boxed{u(x,0) \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{é} \qquad u(x,t) \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,,$$

com condição inicial

$$u(x,0) \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \sin(nx)\,,$$

e condições de fronteira nulas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi \,,$$

  com condição inicial

$$u(x,0) = 100 \qquad \text{se } 0 < x < \pi \,,$$

  e condições de fronteira constantes $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 200$.

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi \,,$$

  com condição inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} \,,$$

  e fluxo de calor nulo nas extremidades, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$.

- com condição inicial

$$u(x,0) \sim \delta(x - \pi/2) \,,$$

  e condições de fronteira nulas $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 0$.

3. (timbres) Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento ℓ, densidade linear ρ e afinada com tensão k.

   Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

$$u(x,0) \simeq \begin{cases} h\frac{x}{\alpha} & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\ell-\alpha}(\ell - x) & \text{se } \alpha \leq x < \ell \end{cases}$$

   onde $0 < \alpha < \ell$ é o ponto onde dedilhamos a corda, e h é o máximo do deslocamento inicial.

   Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo tansmite à corda apenas um impulso instantâneo localizado num ponto (ou num intervalo de comprimento pequeno 2ε à volta de um ponto) $0 < \beta < \ell$ da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x-\beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x-\beta| > \varepsilon \end{cases}$$

   - Determine as vibrações, ou seja, as amplitudes das harmónicas excitadas, da corda do cavaquinho e da corda do piano.
   - Determine as energias E_n das n-ésimas harmónicas nos dois casos. Explique porque o som do piano é mais "cheio" do que o som do cavaquinho.

4. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante "amortecida"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \,.$$

   em $0 \leq x \leq \ell$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

   - Mostre que a conjectura $u_n(x,t) = q_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha\dot{q}_n = 0 \,,$$

     com frequência $\omega_n^2 = (\pi c n/\ell)^2$.
   - Deduza as soluções separáveis do problema.

Referências

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

[Arnold$_{78}$] Vladimir I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, Roma 1978.

[Arnold$_{79}$] Vladimir I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Edizioni MIR - Editori Riuniti, Roma 1978.

[Arnold$_{85}$] Vladimir I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR 1985.

[Berkeley] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics*, McGraw-Hill 1962.

[BoyceDiPrima] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley 1992.

[BrownChurchill] James W. Brown and Ruel V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill 1993.

[ButtàNegrini] Paolo Buttà e Piero Negrini, *Note del corso di Sistemi Dinamici*, Università di Roma "La Sapienza", 2005.
http://www.mat.uniroma1.it/people/butta/didattica/index.html

[Dyke] P.P.G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer 2002.

[Feynman] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.

[Figueiredo] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA 1987.

[Folland] Gerald B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Brooks/Cole Publishing Company 1992.

[HasselblattKatok] B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.

[HirschSmale] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press (Pure and Applied Mathematics. A series of Monographs and Textbooks), San Diego 1974.

[KolmogorovFomin] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR 1983.

[Iório] Valéria Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA 2005.

[LandauLifshitz] L.D. Landau and E.M.Lifshitz, *Physics*,

[MorseFeshbach] Philip McCord Morse and Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill 1953. Reprinted by Feshbach Publishing 2005.

[NagleSaffSnider] R.K. Nagle, E.B. Saff and A.D. Snider, *Fundamentals of differential equations*, Addison-Wesley 2000.

[Olver] Peter J. Olver, *Applied Mathematics Lecture Notes.*
http://www.math.umn.edu/~olver/appl.html

[O'Neil] Peter V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons 1999.

[Pinsky] Mark A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill 1991

[Robinson] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[Ross] S.L. Ross, *Differential equations*, John Wiley & Sons, 1984.

[Rudin] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill 1987.

[Schiff] Joel L. Schiff, *The Laplace transform: theory and applications*, Springer 1999.

[Simmons] G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, 1991.

[Spiegel] Murray R. Spiegel, *Análise de Fourier*, McGraw-Hill 1976.

Murray R. Spiegel, *Transformadas de Laplace*, McGraw-Hill 1971.

[SvesnikovTichonov] A.G. Svesnikov e A.N. Tichonov, *The Theory of Functions of a Complex Variables*, MIR 1971.

[TichonovSamarskij] A.N. Tichonov, A.A. Samarskij *Equazioni della fisica matematica*, Edizioni MIR, Mosca 1981.