20/11/2009 1^o teste	Análise matemática 3A	MIEB

1. *(4 valores)* Considere uma população $N(t)$ que cresce segundo a equação diferencial

$$\dot{N} = 2N^2 \,.$$

Determine o tempo $\bar{t}$ tal que $\lim_{t \nearrow \bar{t}} N(t) = \infty$ sabendo que a população inicial é $N(0) = 100$.

A solução de $\dot{N} = 2N^2$ com condição inicial $N(0) = 100$ é

$$\left(\frac{dN}{N^2} = 2dt \quad \ldots \quad \int_{100}^{N} \frac{dx}{x^2} = 2\int_0^t ds \quad \ldots \quad \frac{1}{100} - \frac{1}{N} = 2t \right) \qquad N(t) = \frac{1}{\frac{1}{100} - 2t} \,.$$

Logo $N(t) \to \infty$ quando o tempo $t \to \bar{t} = 1/200$.

2. *(4 valores)* Uma chávena de café, com temperatura inicial $T(0) = 100^o$C, é colocada numa sala mantida à temperatura constante de $M = 20^o$C. A temperatura $T(t)$ do café segue a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k\,(T - M) \;,$$

onde $k > 0$. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine o valor da constante k e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

A solução de $\dot{T} = -k\,(T - M)$ é

$$T(t) - M = e^{-kt}\,(T(0) - M) \;.$$

Portanto, se $T(0) - M = 80^o$C e $T(10) - M = 40^o$C, a constante é $k = \frac{\log 2}{10}$ min^{-1}, e o café atinge a temperatura de 40^oC em 20 minutos.

3. *(4 valores)* Determine a solução de

$$\dot{x} + x = e^{3t} \qquad \text{tal que} \quad x(1) = 2$$

Uma solução não trivial da equação homogénea $\dot{y} + y = 0$ é $y(t) = e^{1-t}$. O produto $x(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{x} + x = e^{3t}$ se

$$\dot{\lambda}e^{1-t} = e^{3t} \quad \text{ou seja, se} \quad \lambda(t) = \lambda(1) + \int_1^t e^{4s-1}ds \quad \text{ou seja, se} \quad \lambda(t) = \lambda(1) + \frac{1}{4}\left(e^{4t-1} - e^3\right) \,.$$

Mas $x(1) = \lambda(1)$ (pois $y(1) = 1$), logo a solução de $\dot{x} + x = e^{3t}$ com condição inicial $x(1) = 2$ é

$$x(t) = e^{1-t}\left(2 + \frac{1}{4}\left(e^{4t-1} - e^3\right)\right) = \left(2 - \frac{e^4}{4}\right)e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}$$

4. *(4 valores)* Determine a solução de

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \qquad \text{tal que} \quad x(0) = 2 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 1$$

A função $x(t) = e^{zt}$ é solução de $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$ se

$$(z^2 + 3z + 2)e^{zt} = 0 \quad \text{ou seja, se} \quad (z+2)(z+1) = 0 \quad \text{ou seja, se} \quad z = -1 \;\text{ ou }\; -2 \,.$$

Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$ é $x(t) = ae^{-t} + be^{-2t}$. As condições iniciais $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 1$ implicam que

$$\begin{cases} a + b &= 2 \\ -a - 2b &= 1 \end{cases} \qquad \text{e portanto que} \qquad \begin{cases} a = & 5 \\ b = & -3 \end{cases}$$

Logo, a resposta é $x(t) = 5e^{-t} - 3e^{-2t}$.

5. *(4 valores)* Determine uma solução da equação diferencial

$$\ddot{x} + 9x = \cos(t)$$

Uma solução é

$$x(t) = \frac{1}{8}\cos(t)$$

1. *(4 valores)* Resolva, usando a transformada de Laplace, o seguinte problema de Cauchy:

$$\ddot{x} + 4x = 3t \quad \text{com} \quad x(0) = 0 \;\text{ e }\; \dot{x}(0) = 2$$

A função de transferência e a resposta impulsiva do operador diferencial $\frac{d^2}{dt^2} + 4$ são $H(s) = \frac{1}{s^2+4}$ e $h(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$, respectivamente. A solução da equação homogénea $\ddot{y} + 4y = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 2$ é $y(t) = \sin(2t)$. Portanto a solução é

$$x(t) = y(t) + \int_0^t 3\tau h(t-\tau)d\tau = \sin(2t) + \frac{3}{2}\int_0^t \tau \sin(2(t-\tau))d\tau \ .$$

2. *(4 valores)* Considere a equação diferencial

$$L\dot{I} + RI = V \ ,$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RL alimentado com tensão $V(t)$. Determine a função de transferência e a resposta impulsiva do circuito. Determine a corrente $I(t)$ quando $I(0) = 0$ e

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 3 & \text{se } t \geq 2 \end{cases} \ .$$

A função de transferência e a resposta impulsiva do circuito são $H(s) = \frac{1}{Ls+R}$ e $h(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$, respectivamente. Portanto a solução é

$$I(t) = \int_0^t h(t-\tau)V(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ \frac{3}{L}\int_2^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}d\tau = \frac{3}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-2)}\right) & \text{se } t \geq 2 \end{cases} \ .$$

3. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para cada tempo t e com condições iniciais

$$u(x,0) = \begin{cases} 5x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 5\pi - 5x & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

A série de Fourier de senos do deslocamento inicial é

$$u(x,0) \sim \frac{20}{\pi}\left(\sin(x) - \frac{1}{9}\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(5x) - \frac{1}{49}\sin(7x) + ...\right)$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{20}{\pi}\left(\cos(\sqrt{2}\cdot t)\sin(x) - \frac{1}{9}\cos(3\sqrt{2}\cdot t)\sin(3x) + \frac{1}{25}\cos(5\sqrt{2}\cdot t)\sin(5x) - \frac{1}{49}\cos(7\sqrt{2}\cdot t)\sin(7x) + ...\right)$$

4. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,,$$

com condição inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} -10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 10 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}\,,$$

e fluxo de calor nulo nas extremidades, ou seja, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para cada tempo t.

A série de Fourier de co-senos da temperatura inicial é

$$u(x,0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$$

onde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,0)\cos(nx)dx = \frac{20}{\pi}\left(-\int_0^{\pi/2}\cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)dx\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ -\frac{40}{\pi n}\sin(n\pi/2) & \text{se } n = 1,2,3,\dots \end{cases}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x,0) \sim -\frac{40}{\pi}\left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \dots\right)$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,t) \sim -\frac{40}{\pi}\left(e^{-3t}\cos(x) - \frac{1}{3}e^{-27t}\cos(3x) + \frac{1}{5}e^{-75t}\cos(5x) - \frac{1}{7}e^{-147t}\cos(7x) + \dots\right)\,.$$

5. *(4 valores)* Determine soluções separáveis da EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,,$$

com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

As soluções separáveis da equação $\frac{\partial u}{\partial t} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ são os modos

$$u_n(x,t) = s_n e^{-5n^2 t}\sin(nx) \qquad \text{com } n = 1,2,3,\dots\,,$$

onde s_n são constantes arbitrárias.