06/02/2010 recurso	Análise matemática 3A	MIEB

1. *(4 valores)* Considere uma população $N(t)$ que cresce segundo a equação diferencial

$$\dot{N} = -2N + 3\,.$$

Determine o estado estacionário e discuta o comportamento assimptótico das outras soluções.

O estado estacionário é $\overline{N} = 3/2$. A solução de $\dot{N} = -2N + 3$ com condição inicial arbitrária $N(0) = N_0$ é

$$N(t) = (N_0 - \overline{N})e^{-2t} + \overline{N}$$

(a equação diferencial para a diferença $x(t) = N(t) - \overline{N}$ é $\dot{x} = -2x$, e portanto $x(t) = x(0)e^{-2t}$). Logo $N(t) \to \overline{N}$ quando $t \to \infty$.

2. *(4 valores)* Determine a solução de

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \qquad \text{tal que} \qquad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 1\,.$$

A função $x(t) = e^{zt}$ é solução da equação homogénea $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ se

$$(z^2 + 4z + 5)e^{zt} = 0\,, \quad \text{ou seja, se} \qquad z = -2 \pm i\,.$$

Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ é

$$x(t) = ae^{-2t}\cos(t) + be^{-2t}\sin(t)\,,$$

onde a e b são constantes arbitrárias. As condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$ implicam que

$$\begin{cases} a & = & 0 \\ -2a + b & = & 1 \end{cases},$$

e portanto que $a = 0$ e $b = 1$. Logo, a solução é $x(t) = e^{-2t}\sin(t)$.

3. *(4 valores)* Determine, usando a transformada de Laplace, a solução de

$$\ddot{x} + \pi^2 x = u_2(t) \qquad \text{tal que} \qquad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 0\,,$$

onde $u_2(t)$ é a função salto unitário em 2, definida por

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}.$$

Sejam $X(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$ e $U_2(s) = \int_0^\infty e^{-st}u_2(t)dt = \frac{e^{-2s}}{s}$ as transformadas de Laplace da solução e do segundo membro, respectivamente. Então

$$(s^2 + \pi^2)X(s) = U_2(s) \qquad \text{e portanto} \qquad X(s) = H(s) \cdot U_2(s)$$

onde

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2}$$

é a função de transferência. A resposta impulsiva, ou seja, a transformada de Laplace inversa de $H(s)$, é

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\,.$$

Portanto a solução é o produto de convolução $x = u_2 * h$, ou seja,

$$x(t) = \int_0^t u_2(\tau)h(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ \frac{1}{\pi}\int_2^t \sin(\pi(t-\tau))d\tau = \frac{1-\cos(\pi(t-2))}{\pi^2} & \text{se } t \geq 2 \end{cases}.$$

4. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \le x \le \pi\,,$$

com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t \ge 0$, e com condição inicial

$$u(x,0) = 5 \qquad\qquad \text{se } 0 < x < \pi\,.$$

A série de Fourier de senos da temperatura inicial é a série de Fourier da função $5 \cdot (2\Theta(x) - 1)$, periódica de período 2π, ou seja (formulário, página 39 das folhas práticas),

$$u(x,0) \sim \frac{20}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right)\,.$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{20}{\pi}\left(e^{-3t}\sin(x) + \frac{1}{3}e^{-27t}\sin(3x) + \frac{1}{5}e^{-75t}\sin(5x) + \dots\right)\,.$$

5. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $0 \le x \le \pi$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,0) = 0$ para cada tempo $t \ge 0$, e com condições iniciais

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} v & \text{se } \beta - \varepsilon \le x \le \beta + \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$

onde $0 < \beta < \pi$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno (ou seja, $\varepsilon < \min\{|\beta|\,,\,|\pi - \beta|\}$).

A série de Fourier de senos da velocidade inicial é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad \text{onde} \qquad b_n = \frac{2v}{\pi}\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} \sin(nx)dx = \frac{4v}{\pi n}\sin(n\beta)\sin(n\varepsilon)$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{4v}{\pi c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\beta)\sin(n\varepsilon)}{n^2}\sin(cnt)\sin(nx)\,.$$