19/11/2010 1^o teste	9503N2 - Análise Matemática 3A	2010/11 ENGBIOL

1. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\dot{x} = tx^3 \qquad \text{tal que} \qquad x(0) = 1\,.$$

A solução de $\dot{x} = tx^3$ com condição inicial $x(0) = 1$ é
$$\left(\frac{dx}{x^3} = tdt \qquad \dots \qquad \int_1^x \frac{dy}{y^3} = \int_0^t sds \qquad \dots \qquad 1 - x^{-2} = t^2 \right) \qquad x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,,$$
definida no intervalo de tempos $-1 < t < 1$.

2. *(4 valores)* A corrente $I(t)$ num circuito RL, alimentado com tensão constante E, é determinada pela EDO
$$L\dot{I} + RI = E\,,$$
onde L e R são constantes positivas. Determine a solução estacionária. Determine a solução con condição inicial $I(0) = 2E/R$, esboce a sua representação gráfica, e calcule o limite $\lim_{t\to\infty} I(t)$.

A solução estacionária é dada pela lei de Ohm, $\overline{I} = E/R$. A diferença $x(t) = I(t) - \overline{I}$ satisfaz a EDO
$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x\,,$$
cuja solução é $x(t) = x(0)e^{-\frac{R}{L}t}$. Portanto, a solução con condição inicial $I(0) = 2E/R$ é
$$I(t) = \left(I(0) - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 + e^{-\frac{R}{L}t} \right)\,.$$
Em particular, $\lim_{t\to\infty} I(t) = E/R$.

3. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\dot{x} + tx = t \qquad \text{tal que} \qquad x(0) = 0\,.$$

Uma solução não trivial da homogénea $\dot{y} + ty = 0$ é $y(t) = e^{-t^2/2}$. O produto $x(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{x} + tx = t^3$ se
$$\dot{\lambda}e^{-t^2/2} = t \qquad \text{ou seja, se} \qquad \dot{\lambda} = te^{t^2/2}\,, \qquad \text{donde} \qquad \lambda(t) = \lambda(0) + \int_0^t se^{s^2/2}ds = \lambda(0) + e^{t^2/2} - 1\,.$$
Portanto, a solução con condição inicial $x(0) = \lambda(0) = 0$ é
$$x(t) = 1 - e^{-t^2/2}\,.$$

4. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \qquad \text{tal que} \qquad x(0) = 2 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(0) = -1\,.$$

A função $x(t) = e^{zt}$ é solução de $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ se
$$(z^2 + 4z + 5)e^{zt} = 0 \qquad \text{ou seja, se} \qquad z = -2 \pm i\,.$$
Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$ é
$$x(t) = ae^{-2t}\cos(t) + be^{-2t}\sin(t)\,.$$
As condições iniciais $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = -1$ implicam que
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ -2a + b & = & -1 \end{array} \right. , \qquad \text{donde} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 3 \end{array} \right. .$$
Portanto, a resposta é $x(t) = e^{-2t}\left(2\cos(t) + 3\sin(t)\right)$.

5. *(4 valores)* Determine uma solução da equação diferencial
$$\ddot{x} + x = 2\cos(t)\,.$$

Uma solução é
$$x(t) = t\sin(t)\,.$$

14/01/2011 2^o teste	9503N2 - Análise matemática 3A	ENGBIOL

1. *(4 valores)* Resolva, usando a transformada de Laplace, o seguinte problema:

$$\dot{x} + 3x = f(t) \qquad \text{com} \qquad x(0) = 2\,,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases} .$$

A função de transferência e a resposta impulsiva são $H(s) = \frac{1}{s+3}$ e $h(t) = e^{-3t}$, respectivamente. A solução da equação homogénea $\dot{y} + 3y = 0$ com condição inicial $y(0) = 2$ é $y(t) = 2e^{-3t}$. Portanto a solução é

$$x(t) = y(t) + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 2e^{-3t} & \text{se } t < 1 \\ 2e^{-3t} + \int_1^t e^{-3(t-\tau)}\, d\tau & \text{se } t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-3t} & \text{se } t < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{6-e^3}{3} \cdot e^{-3t} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

2. *(4 valores)* Considere a equação diferencial

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{V}\,,$$

que determina a corrente $I(t)$ num circuito LC ($L > 0$ e $C > 0$) alimentado com tensão $V(t)$. Determine a função de transferência e a resposta impulsiva do circuito. Determine a corrente $I(t)$ quando $I(0) = 0$, $\dot{I}(0) = 0$ e $V(t) = \sin(t)$.

A função de transferência e a resposta impulsiva do circuito são $H(s) = \frac{1}{Ls^2 + 1/C}$ e $h(t) = \sqrt{C/L} \cdot \sin(\omega t)$, respectivamente., onde $\omega = \sqrt{1/(LC)}$. Portanto a solução é

$$I(t) = \int_0^t h(\tau) \dot{V}(t-\tau) d\tau = \sqrt{C/L} \cdot \int_0^t \sin(\omega\tau) \cos(t-\tau)\, d\tau$$

3. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi, t) = 0$ para cada tempo t e com condições iniciais

$$u(x,0) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

A série de Fourier de senos do deslocamento inicial é $u(x,0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ onde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x,0) \sin(nx)\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin(nx)\, dx = \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n} = \begin{cases} 1/n & \text{se } n = 1,3,5,7,9,\dots \\ 2/n & \text{se } n = 2,6,10,\dots \\ 0 & \text{se } n = 4,8,12,\dots \end{cases}$$

ou seja,

$$u(x,0) \sim \sin(x) + \sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{3}\cos(6x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,0) \sim \cos(t)\sin(x) + \cos(2t)\sin(2x) + \frac{1}{3}\cos(3t)\sin(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x)\sin(5x) + \frac{1}{3}\cos(6t)\sin(6x) + \frac{1}{7}\cos(7t)\sin(7x) + \dots$$

4. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em} \;\; 0 \le x \le \pi \,,$$

com condição inicial

$$u(x,0) = x\,,$$

e fluxo de calor nulo nas extremidades, ou seja, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t > 0$.

A série de Fourier de co-senos da temperatura inicial é a série de Fourier da sua extensão par, ou seja, da função definida por $|x|$ em $[-\pi,\pi]$. Portanto

$$u(x,0) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{49}\cos(7x) + \ldots\right)$$

e a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(e^{-2\cdot t}\cos(x) + \frac{1}{9}e^{-18\cdot t}\cos(3x) + \frac{1}{25}e^{-50\cdot t}\cos(5x) + \frac{1}{49}e^{-98\cdot t}\cos(7x) + \ldots\right) \;.$$

5. *(4 valores)* Determine soluções separáveis da EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

com $x \in \mathbf{R}$ e $t \in \mathbf{R}$.

Se $u(x,t) = X(x)T(t)$, então $XT' + X'T = 0$. Isto acontece se existe uma constante μ tal que $X' = \mu X$ e $T' = -\mu T$. Portanto, soluções separáveis da equação são

$$u_{c,\mu}(x,t) = ce^{\mu(x-t)}$$

com $c, \mu \in \mathbf{R}$.