22/10/2009 1^o teste	Análise matemática 3	FIS

1. Considere a equação logística
$$\dot{x} = \lambda x(1-x)$$
com $\lambda > 0$.

- *(4 valores)* Determine o comportamento assimptótico das soluções (ou seja, os limites $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$, dependendo da condição inicial $x(0)$).

As soluções de equilíbrio são $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$. A velocidade $\dot{x}$ é positiva se $0 < x < 1$, e negativa se $x < 0$ ou $x > 1$, portanto
$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0 \quad \text{se} \quad x(0) < 1$$
e
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1 \quad \text{se} \quad x(0) > 0\,.$$
Se $x(0) < 0$, existe um tempo $\bar{t}$ tal que $\lim_{t\nearrow\bar{t}} x(t) = -\infty$, pois $y(t) = -x(t)$ satisfaz $\dot{y} = \lambda(y + y^2) \geq \lambda y^2$ (crescimento super-exponencial). Se $x(0) > 1$, existe um tempo $\bar{t}$ tal que $\lim_{t\searrow\bar{t}} x(t) = \infty$, pois $z(t) = x(-t)$ satisfaz $\dot{z} = \lambda(z^2 - z) \geq 0.9 \cdot \lambda z^2$ se $z \gg 1$ (crescimento super-exponencial).

2. A temperatura $T(t)$ de um corpo num meio ambiente cuja temperatura é $M(t)$ segue a *lei do arrefecimento de Newton*
$$\dot{T} = -k\left(T - M(t)\right)\,,$$
onde $k > 0$.

- *(4 valores)* Escreva a solução geral $T(t)$ como função da temperatura inicial $T(0)$ e da temperatura do meio ambiente $M(s)$, com $0 \leq s \leq t$.

A solução é
$$T(t) = e^{-kt}\left(T(0) + k\int_0^t e^{ks} M(s)ds\right)\,.$$

- *(4 valores)* Uma chávena de café, com temperatura inicial $T(0) = 100^o$C, é colocada numa sala mantida à temperatura constante de $M = 20^o$C. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine o valor da constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

Quando M é constante,
$$T(t) - M = e^{-kt}\left(T(0) - M\right)\,.$$
Portanto, se $T(0) - M = 80^o$C e $T(10) - M = 40^o$C, a constante é $k = \frac{\log 2}{10}$ min^{-1}, e o café atinge a temperatura de 40^oC em 20 minutos.

3. Considere a equação das oscilações forçadas
$$\ddot{x} = -9x + \sin(\gamma t)\,,$$

- *(4 valores)* Determine uma solução da equação quando $\gamma = \pi$.

Uma solução quando $\gamma = \pi$ é
$$x(t) = \frac{1}{9 - \pi^2}\sin(\pi t)\,.$$

- *(4 valores)* Determine uma solução da equação quando $\gamma = 3$.

Uma solução quando $\gamma = 3$ é
$$x(t) = -\frac{1}{6}t\cos(3t)\,.$$

20/11/2009 2^o teste	Análise matemática 3	FIS

1. *(4 valores)* Mostre que se ω é uma raiz n-ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$$

Um cálculo mostra que
$$(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1})(1 - \omega) = (1 - \omega^n)$$
Se $\omega \neq 1$ podemos dividir por $(1 - \omega)$ e obter
$$(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1}) = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$$
donde, se $\omega^n = 1$, o resultado.

2. *(4 valores)* Diga se a função
$$f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$
(onde $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$) é holomorfa.

A função é holomorfa pois satisfaz as condições de Cauchy-Riemann. De facto
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - xy^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - xy^2$$
e
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$$

3. *(4 valores)* Calcule o integral
$$\int_\gamma z dz$$
onde o contorno γ é o arco de parábola $t \mapsto t + it^2$, com $t \in [-1, 1]$.

Uma primitiva da função $f(z) = z$ é $F(z) = \frac{1}{2}z^2$, portanto
$$\begin{aligned} \int_\gamma z dz &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(-1)) \\ &= \frac{1}{2}\left((1 - i)^2 - (-1 + i)^2\right) \\ &= 2i \end{aligned}$$

4. *(4 valores)* Determine a expansão em série de Laurent de
$$f(z) = \frac{1}{z(1 - z)}$$
numa região à sua escolha.

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \ldots \qquad \text{em } 0 < |z| < 1\,.$$

5. *(4 valores)* Calcule um dos seguintes integrais
$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \qquad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)} \qquad \oint_{|z|=2\pi} \frac{z e^z}{(z - \pi)^2} dz$$

A função $f(z) = \frac{e^z}{z^2+4}$ é holomorfa no disco $|z| < 2$, que contém o disco unitário $|z| \leq 1$. Logo, pelo teorema de Cauchy,
$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz = 0\,.$$

1/12/2009 3^o teste	Análise matemática 3	FIS

1. *(4 valores)* Determine soluções separáveis da EDP

$$u_x + u_y = 0$$

com $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

A função $u(x, y) = X(x)Y(y)$ é solução de $u_x + u_y = 0$ se $X'Y + XY' = 0$, ou seja, se existe uma constante $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $X' = \lambda X$ e $Y' = -\lambda Y$. Soluções de $X' = \lambda X$ são $X(x) = ae^{\lambda x}$, e soluções de $Y' = -\lambda Y$ são $Y(y) = be^{-\lambda y}$. Portanto, soluções separáveis do problema são

$$u_\lambda(x, y) = ce^{\lambda(x-y)} \qquad \text{com } c \in \mathbf{R} \text{ e } \lambda \in \mathbf{R}.$$

2. *(4 valores)* Resolva o problema das ondas

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0$$

na recta $x \in \mathbf{R}$ com condições iniciais

$$u(x, 0) = e^{-|x|} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(x)\,.$$

Pela fórmula de d'Alembert, a solução é

$$u(x, t) = \frac{e^{-|x+3t|} + e^{-|x-3t|}}{2} + \frac{\cos(x - 3t) - \cos(x + 3t)}{6}$$

3. *(4 valores)* Determine a série de Fourier de senos da função definida no intervalo $[0, \pi]$ por

$$f(x) = 1$$

A série de Fourier de senos da função $f(x) = 1$ em $[0, \pi]$ é

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots\right)$$

4. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para cada tempo t e com condições iniciais

$$u(x, 0) = \begin{cases} hx & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ h(\pi - x) & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

onde $h > 0$.

A série de Fourier de senos do deslocamento inicial é

$$u(x, 0) \sim \frac{4h}{\pi}\left(\sin(x) - \frac{1}{9}\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(5x) - \frac{1}{49}\sin(7x) + \ldots\right)$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x, t) \sim \frac{4h}{\pi}\left(\sin(ct)\sin(x) - \frac{1}{9}\sin(3ct)\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(5ct)\sin(5x) - \frac{1}{49}\sin(7ct)\sin(7x) + \ldots\right)$$

5. *(4 valores)* Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \le x \le \pi\,,$$

com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t \ge 0$ e com condição inicial

$$u(x,0) = 10 \qquad\qquad \text{se } 0 < x < \pi$$

A série de Fourier de senos da temperatura inicial é

$$u(x,0) \sim \frac{40}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right)$$

Portanto, a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{40}{\pi}\left(e^{-3t}\sin(x) + \frac{1}{3}e^{-27t}\sin(3x) + \frac{1}{5}e^{-75t}\sin(5x) + \dots\right)$$

26/01/2010 4^o teste	Análise matemática 3	FIS

1. *(4 valores)* Resolva, usando a transformada de Laplace, o seguinte problema de Cauchy:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 2e^t \quad \text{com} \quad x(0) = 0 \;\text{ e }\; \dot{x}(0) = 1$$

A função de transferência e a resposta impulsiva do operador diferencial $\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} + 1$ são $H(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$ e $h(t) = te^t$, respectivamente. A solução da equação homogénea $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$ é $y(t) = te^t$. Portanto a solução é

$$x(t) = y(t) + \int_0^t 2e^\tau h(t-\tau)d\tau = te^t + 2\int_0^t e^\tau (t-\tau)e^{t-\tau}d\tau = te^t + t^2e^t\ .$$

2. *(4 valores)* Considere a equação diferencial

$$L\dot{I} + RI = V\,,$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RL alimentado com tensão $V(t)$. Determine a função de transferência e a resposta impulsiva do circuito. Determine a corrente $I(t)$ quando $I(0) = 0$ e

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ 10 & \text{se } t \geq 1 \end{cases} .$$

A função de transferência e a resposta impulsiva do circuito são $H(s) = \frac{1}{Ls+R}$ e $h(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$, respectivamente. Portanto a solução é

$$I(t) = \int_0^t h(t-\tau)V(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ \frac{10}{L}\int_1^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}d\tau = \frac{10}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-1)}\right) & \text{se } t \geq 1 \end{cases} .$$

3. *(4 valores)* Mostre que se $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}\{f(x)\}(\xi)$ é a transformada de Fourier de $f(x)$, então $e^{-i\alpha\xi}\widehat{f}(\xi)$ é a transformada de Fourier de $f(x-\alpha)$, ou seja,

$$\mathcal{F}\{f(x-\alpha)\}(\xi) = e^{-i\alpha\xi}\widehat{f}(\xi)$$

A transformada de Fourier de $f(x-\alpha)$ é

$$\begin{aligned} F\{f(x-\alpha)\}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha)e^{-i\xi x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi(y+\alpha)}dy \qquad \text{onde } y = x-\alpha \\ &= e^{-i\alpha\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}dy \\ &= e^{-i\alpha\xi}\widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

4. *(8 valores)* Use a transformada de Fourier para achar a solução formal do problema de convecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \beta > 0 \quad \alpha > 0$$

na recta $x \in \mathbf{R}$, com condição inicial $u(x,0) = f(x)$ contínua e limitada.

A transformada de Fourier (formal) $\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx$ é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi,t) = -(\beta\xi^2 - i\alpha\xi)\widehat{u}(\xi,t) \qquad \text{com condição inicial} \qquad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)\,,$$

e portanto

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-(\beta\xi^2 - i\alpha\xi)t}\widehat{f}(\xi)$$

. O exponencial $e^{-(\beta\xi^2 - i\alpha\xi)t}$ é a transformada de Fourier da função

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\beta t}} e^{-\frac{(x+\alpha t)^2}{4\beta t}}\,,$$

portanto a solução formal é dada pelo produto de convolução

$$u(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(H_t * f\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y+\alpha t)^2}{4\beta t}} f(y)dy\,.$$