

3803O4 - Análise Matemática 3
Folhas práticas
FIS 2009/10

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática - Universidade do Minho

Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086 (atendimento: 4^a-feira 14h-18h)

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

Outubro 2010

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	2
2	EDOs autónomas e separáveis	6
3	EDOs lineares de primeira ordem	11
4	EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes	13
5	Plano complexo e funções holomorfas	19
6	Integração complexa e fórmula de Cauchy	23
7	Séries de potências	26
8	Séries de Laurent e cálculo dos resíduos	28
9	Equações de derivadas parciais	30
10	Separação de variáveis, ondas e difusão	33
11	Séries de Fourier	36
12	Aplicações das séries de Fourier	40
13	Transformada de Fourier	43
14	Aplicações da transformada de Fourier	48
15	Transformada de Laplace	51
16	Aplicações da transformada de Laplace	55

1 Equações diferenciais ordinárias

1. **(equações diferenciais ordinárias)** Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem é uma “lei”

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória $t \mapsto x(t)$ no *espaço de fase* $X \subset \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{R}^n$) de um sistema dinâmico, onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ denota a derivada do observável/is x em ordem ao tempo t , e $v(t, x)$ é um *campo de direcções* (uma recta com declive $v(t, x)$ para cada ponto $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$). Se $v : X \rightarrow \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{R}^n$) é um *campo de vectores* no espaço de fase X , então a equação $\dot{x} = v(x)$ é dita *autónoma*.

Uma *solução* da EDO é um caminho diferenciável $t \mapsto x(t)$ cuja velocidade é $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num certo intervalo, ou seja, uma função cujo gráfico Γ é tangente ao campo de direcções em cada ponto $(t, x(t)) \in \Gamma$. Uma *solução local* da EDO com *condição inicial* $x(t_0) = x_0$ (ou solução do “problema de Cauchy”) é uma solução definida numa vizinhança de t_0 , cujo gráfico passa pelo ponto (t_0, x_0) .

O *teorema de Peano* afirma que, se o campo $v(t, x)$ é contínuo, então existem sempre soluções locais do problema de Cauchy. O *teorema de Picard* afirma que, se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (contínuo, e localmente Lipschitziano¹ (por exemplo, diferenciável de classe $\mathcal{C}^1$) na variável x), então para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.

As soluções constantes, $x(t) = \bar{x} \quad \forall t \in \mathbf{R}$, são ditas soluções de *equilíbrio*, ou *estacionárias*.

A EDO de ordem k

$$\frac{d^k y}{dt^k} = F\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right),$$

para o observável $y(t) \in \mathbf{R}$ é equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para o observável $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \in \mathbf{R}^k$ definido por

$$x_0 = y \quad x_1 = \dot{y} \quad x_2 = \ddot{y} \quad \dots \quad x_{k-1} = \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}},$$

onde o campo de direcções é $v(t, x) = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, F(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}))$.

- Esboce o campo de direcções e (quando autónoma) o campo de vectores das EDOs

$$\dot{x} = t \quad \dot{x} = -x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = x + t$$

$$\dot{x} = x(1 - x) \quad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad \dot{x} = (x - 1)^2(x - 2)^2$$

e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?

2. **(o exponencial)** Considere a EDO

$$\dot{x} = x$$

- Verifique que $x(t) = x_0 e^t$ é uma solução com condição inicial $x(0) = x_0$.
- Mostre que, se $y(t)$ é uma solução com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $y(t)/e^t$ é constante e igual a x_0 . Deduza a unicidade das soluções do problema de Cauchy.

¹A função $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ é *Lipschitziana* no domínio $U \subset \mathbf{R}^n$ se

$$\exists L > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

3. (equação de Lane-Emden e soluções de Chandrasekhar) Um modelo do perfil de equilíbrio hidrostático de uma estrela é a equação de Lane-Emden²

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^p,$$

onde $\xi \geq 0$ é uma “distância adimensional” do centro da estrela, $\theta(\xi)$ é proporcional à densidade, e p é um parâmetro que depende da equação de estado $P = K\rho^{1+1/p}$ do gás que forma a estrela. O problema físico é determinar a solução com condições iniciais $\theta(0) = 1$ e $d\theta/d\xi(0) = 0$, e o menor zero de $\theta(\xi)$ com $\xi > 0$ é interpretado como sendo o raio da estrela.

- Verifique que

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad \theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \text{e} \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}$$

são soluções da equação de Lane-Emden quando $p = 0, 1$ e 5 , respectivamente.

4. (sistemas conservativos: Newton, Lagrange, Hamilton) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = F$$

para a trajectória $t \mapsto q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \in \mathbf{R}^3$ de uma partícula de massa m num campo de forças conservativo $F(q) = -\nabla V(q)$, onde $V(q)$ é um(a energia) *potencial*.

- Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)³

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 + V(q)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$ ao longo das trajectórias.

- Verifique que a equação de Newton é equivalente às equações de Euler-Lagrange⁴

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

onde a *Lagrangiana* do sistema é

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 - V(q).$$

- O vector $p = m\dot{q}$, de coordenadas $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, é dito *momento (linear)*. O espaço $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, com coordenadas (q, p) , é dito *espaço de fase* do sistema mecânico. Verifique que a equação de Newton é equivalente às equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

onde a *Hamiltoniana* do sistema é a “transformada de Legendre” da Lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \sup_v (p \cdot v - L(q, v)) \\ &= \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q). \end{aligned}$$

²Subrahmanyan Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York (1939) 1958.

³A *norma (Euclidiana)* de um vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ é

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad \text{onde} \quad x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

é o *produto interno (Euclidiano)* em $\mathbf{R}^n$.

⁴As trajectórias são extremos locais da acção, o funcional

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

definido no espaço dos caminhos com condições de fronteira $q(t_0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$.

- Mostre que a Hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = 0$ ao longo das trajetórias. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fase estão contidas nas curvas/superfícies de nível $H(q, p) = c$ da Hamiltoniana.
5. (lei de Hooke) Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas no espaço de fase) de uma partícula sujeita à lei de Hooke

$$m\ddot{q} = -k^2q.$$

6. (pêndulo matemático) Esboce o retrato de fase de um *pêndulo matemático*

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta).$$

7. (simulações: método de Euler) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x).$$

O método de Euler consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_0 + n \cdot dt)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$, é estimada pela sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$. Numa linguagem como **c++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) = \mathbf{x}$, é

```
while (time < t)
{
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
}
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq (1 + \varepsilon)^n$$

onde $n \simeq t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução e^t , pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

- Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...
- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q \end{aligned}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

8. (simulações: método RK-4) O método de Runge-Kutta (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão x_n definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde os coeficientes k_i são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right) \quad k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

e $t_n = t_0 + n \cdot dt$.

- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

2 EDOs autónomas e separáveis

1. (integração de EDOs simples) O teorema fundamental do cálculo⁵ implica que a solução de uma EDO simples

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\dot{x} = v(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

- Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(t)$, então também $x(t) + c$ é solução, $\forall c \in \mathbf{R}$.
- Integre as seguintes EDOs, definidas em oportunos domínios.

$$\dot{x} = 2 \sin(t) \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = 1/t$$

2. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{r} = -mg$$

onde r é a altura, m é a massa da partícula, $g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\ddot{r}$ denota a segunda derivada de r em ordem ao tempo t .

- Escreva a solução geral desta equação.
 - Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?
3. (EDO autónomas) Considere o problema de determinar a solução da EDO autónoma

$$\dot{x} = v(x)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se x_0 é um ponto singular de $v(x)$, i.e. se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$ é uma solução estacionária (ou de equilíbrio) da equação. Se x_0 não é um ponto singular, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então uma solução local é determinada separando as variáveis, $\frac{dx}{v(x)} = dt$, e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$. Ou seja,

$$\dot{x} = v(x), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

- Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(x)$, então também $x(t - c)$ é solução, $\forall c \in \mathbf{R}$.
- Considere as seguintes EDOs de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= \sqrt{x} \\ \dot{x} &= (x - 1)(x - 2) & \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

Encontre, caso existam, as soluções estacionárias.

Desenhe os respectivos campos de direcções e conjecture sobre o comportamento das soluções.

Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(t_0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

⁵A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é “Data aequatione quocunque fontes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa”.

4. (decaimento radioactivo) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\dot{N} = -\beta N,$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a “vida média” dos núcleos⁶.

- Determine a solução do problema de Cauchy com condição inicial $N(0) = N_0$.
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, ou seja, o tempo T tal que $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$. Determine a relação entre o tempo de meia-vida T e o parâmetro β , e mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$.
- O radiocarbono ^{14}C (que decai segundo $^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$) tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, sabendo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é fixa e conhecida⁷.
- Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante α , então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha.$$

Verifique que a solução de equilíbrio é $\bar{N} = \alpha/\beta$. Mostre que $N(t) \rightarrow \bar{N}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (use a mudança de variável $x(t) = N(t) - \bar{N}$).

5. (crescimento exponencial) O crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado segue a EDO de primeira ordem

$$\dot{N} = \lambda N$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t , e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$).

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$. O que acontece quando $t \rightarrow \infty$?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante γ , então

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções.

6. (logística) Um modelo mais realista da dinâmica populacional é dado pela *equação logística*⁸

$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/N_{max})$$

onde a constante positiva N_{max} é a população máxima permitida num dado meio limitado. Note que, tal como antes, $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll N_{max}$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow N_{max}$.

- Seja $x(t) = N(t)/N_{max}$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística “adimensional”

$$\dot{x} = \lambda x(1 - x)$$

⁶O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X , com lei $\mathbf{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$, se $t \geq 0$, e média $\mathbf{E}X = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.

⁷J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151. W.F. Libby, *Radiocarbon Dating*, University of Chicago Press, 1955.

⁸Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)e^{-\lambda t}},$$

- Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.

7. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \alpha N^2.$$

- Determine soluções da equação.
- Note que as soluções que determinou não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!

8. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO *separável*

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se $f(x_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\dot{x} = f(x)/g(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^t \frac{ds}{g(s)}}$$

- Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\begin{array}{llll} \dot{x} = tx^3 & t\dot{x} + t = t^2 & \dot{x} = t^3/x^2 & x\dot{x} = e^{x+3t^2}t \\ \dot{x} = \frac{t-1}{x^2} & \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 & \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} & \\ (t^2+1)\dot{x} = 2tx & \dot{x} = t(x^2-x) & \dot{x} = e^{t-x}, & \end{array}$$

9. (EDOs homogêneas) Uma EDO *homogênea*

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com} \quad v(\lambda t, \lambda x) = v(x, t) \quad \forall \lambda > 0,$$

é transformada numa EDO separável com a mudança de variável $y(t) = x(t)/t$, i.e.

$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \quad \Rightarrow \quad y + t\dot{y} = v(1, y)}$$

- Seja

$$\dot{x} = v(t, x)$$

uma EDO homogênea, ou seja tal que $v(t, x) = v(\lambda t, \lambda x)$ para todo o $\lambda > 0$. Mostre que se $\varphi(t)$ é uma solução então também $\phi(t) = \lambda\varphi(t/\lambda)$ é uma solução.

Seja $\varphi(t)$ uma solução tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?

- Resolva as seguintes EDOs homogêneas

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = -t/x & \dot{x} = \frac{x-t}{x+t} & \dot{x} = 1 + x/t \\ \dot{x} = x/t & \dot{x} = 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} & \frac{dy}{dx} = y/x + \sin(y/x), \end{array}$$

definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

10. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá no instante t é proporcional à diferença entre a temperatura do ar e a temperatura do chá no instante t .
- A taxa de variação do número de elementos de uma população de cogumelos no instante t é proporcional à raiz quadrada do número de elementos da população no instante t .
- A velocidade de um foguetão no instante t é inversamente proporcional à altura atingida no instante t .
- A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

11. (sistemas conservativos em dimensão 1) Considere um sistema conservativo em dimensão um, descrito pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = F(q)$$

onde $F(q) = -U'(q)$ é um campo de forças diferenciável definido num certo intervalo da recta. A energia

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q)$$

é uma constante do movimento. Em particular, fixado um valor $E(q(0), \dot{q}(0)) = E$ da energia inicial, o movimento é limitado aos intervalos

$$U_{\leq E} = \{q \in \mathbf{R} \mid \text{t.q. } U(q) \leq E\}$$

(pois a energia cinética é $\frac{1}{2}m\dot{q}^2 \geq 0$) e a posição $q(t)$ satisfaz a EDO “quadrática” de primeira ordem

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q) = E$$

- Assuma que E seja um valor regular da energia (ou seja, que $U' \neq 0$ nos pontos da curva de nível E) e que $U_{\leq E}$ seja um intervalo $[q_-, q_+]$. Mostre que o tempo que a partícula demora para ir do ponto q_- , com velocidade inicial nula, até o ponto q , com $q_- \leq q \leq q_+$, é dado pelo integral

$$t(q) = \int_{q_-}^q \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}.$$

Deduz a fórmula integral para o período das oscilações entre os pontos q_- e q_+ .

- Determine uma fórmula para os períodos das oscilações de um *pêndulo matemático*, modeladas pela equação de Newton

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta),$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional e ℓ é o comprimento do pêndulo.

- Calcule o período das pequenas oscilações de um pêndulo (na aproximação $\sin(\theta) \simeq \theta$, se o ângulo θ é suficientemente pequeno), ou seja, o período das oscilações do *oscilador harmónico*

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta.$$

O período das oscilações depende da energia?

- Considere o potencial $U(q) = q^4$. Determine o período das oscilações $P(E)$ em função da energia E , e calcule o limite de $P(E)$ quando $E \rightarrow 0$.

12. (tractriz de Leibniz) A *tractriz de Leibniz* é a curva $y(x)$ solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{\ell^2 - y^2}}$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$ e $0 < y_0 < \ell$.

- Separe as variáveis,

$$\int_{y_0}^y \frac{\sqrt{\ell^2 - z^2}}{z} dz = x_0 - x,$$

e utilize a mudança de variável $z = \ell \sin \theta$, para mostrar que a solução é dada, em forma implícita, por

$$x - x_0 = \sqrt{\ell^2 - y_0^2} - \sqrt{\ell^2 - y^2} - \ell \log(y/y_0) + \ell \log\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - y^2}}{\ell + \sqrt{\ell^2 - y_0^2}}\right).$$

13. (reações químicas simples) Considere a reação



entre duas espécies químicas A e B . Assuma que as velocidades⁹ sejam dadas por $v_{\rightarrow} = k_{\rightarrow}[A]$ e $v_{\leftarrow} = k_{\leftarrow}[B]$, onde $[A]$ e $[B]$ são as concentrações de A e B , respectivamente, e $k_{\rightarrow}$ e $k_{\leftarrow}$ são constantes. No equilíbrio, as concentrações verificam

$$[B]_e/[A]_e = k_{\rightarrow}/k_{\leftarrow}.$$

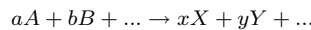
- Mostre que $x = [A] - [A]_e$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = -(k_{\rightarrow} + k_{\leftarrow})x$$

e calcule $x(t)$ dado um valor inicial $x(0)$.

- Mostre como estimar as velocidades de reação, $k_{\rightarrow}$ e $k_{\leftarrow}$, utilizando as observações de $[A]_t$ e $[B]_t$.

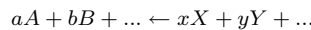
⁹Segundo a *lei de acção das massas*, “numa dada temperatura, a velocidade de uma reacção química é proporcional ao produto das concentrações molares dos reagentes, elevadas a expoentes iguais aos respectivos coeficientes da equação química balanceada”. Por exemplo, a velocidade da reacção



é dada por

$$v_{\rightarrow} = K_T^{\rightarrow} [A]^a [B]^b \dots$$

onde $[A]$, $[B]$, $\dots$ são as concentrações molares de A , B , $\dots$, e $K_T^{\rightarrow}$ é uma constante (que pode depender da temperatura T , por exemplo, segundo a *lei de Arrhenius* $K_T = Ae^{-E/RT}$, com A e E constantes). A velocidade da reacção inversa



é

$$v_{\leftarrow} = K_T^{\leftarrow} [X]^x [Y]^y \dots$$

Então no equilíbrio as concentrações satisfazem a lei

$$\frac{[A]^a [B]^b \dots}{[X]^x [Y]^y \dots} = K_T$$

onde $K_T = K_T^{\leftarrow} / K_T^{\rightarrow}$.

3 EDOs lineares de primeira ordem

1. (EDOs lineares de primeira ordem) A solução de uma EDO linear de primeira ordem

$$\dot{x} + p(t)x = q(t),$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogênea associada $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogênea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u)du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u)du} q(s)ds \right).$$

- Mostre que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem $\dot{x} + p(t)x = q(t)$, então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da equação homogênea associada, $\dot{y} + p(t)y = 0$.
- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t^3 \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

2. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força $-k\dot{r}$ proporcional e contrária à velocidade, assim a equação de Newton escreve-se $m\ddot{r} = -k\dot{r} - mg$, onde k é uma constante positiva. Chamando $v = \dot{r}$ a velocidade da partícula, somos levados a EDO

$$m\dot{v} = -kv - mg$$

- Resolva o problema de Cauchy com condição inicial $v(0) = 0$.
 - Mostre que a velocidade v tende para um valor assintótico quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
 - Utilize a solução encontrada para determinar a trajetória $r(t)$ com condição inicial $r(0) = s$.
3. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.

- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω , L e R .

4. (lei do arrefecimento de Newton) A temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k(T - M(t))$$

onde k é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução geral como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e de $M(\tau)$ com $0 \leq \tau \leq t$.
- Determine a solução assintótica (ou seja, quando t é grande) $T(t)$ quando $M(t) = M \sin(\omega t)$.
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

5. (equações de Bernoulli) Uma EDO da forma

$$\dot{x} + P(t)x = Q(t)x^n,$$

onde P e Q são funções contínuas num intervalo I e com $n \neq 0$ ou 1 (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita equação de Bernoulli.

- Verifique que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio da equação de Bernoulli.
- Seja $k = 1 - n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$ sse a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$\dot{y} + kP(t)y = kQ(t)$$

com condição inicial $y(t_0) = (x_0)^{1/k}$.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2 (\cos t - \sin t) \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}x = x^2 \log t \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

4 EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes

1. (EDOs de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes) Soluções da EDO homogênea

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$$

podem ser determinadas usando a conjectura $x(t) = e^{zt}$. Se $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ são as raízes do *polinômio característico* $z^2 + 2\alpha z + \beta$, então duas soluções independentes são

$e^{-\alpha t}e^{kt}, e^{-\alpha t}e^{-kt}$ $e^{-\alpha t}\cos(\omega t), e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$ $e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}$	raízes reais e distintas $z_{\pm} = -\alpha \pm k$ raízes complexas conjugadas $z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$ raiz dupla $z_{\pm} = -\alpha$
--	---

- Determine a solução geral das seguintes EDOs homogêneas:

$$\ddot{x} - 2x = 0 \quad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 \quad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0.$$

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

$$\ddot{x} + 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1$$

$$\ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1.$$

- Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}, \quad e^{-t}\sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t}\cos(2\pi t), \quad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t),$$

$$e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}, \quad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2), \quad 3 \quad \text{e} \quad 5t.$$

2. (oscilador harmónico) Considere a equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

- Determine a solução com condição inicial $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, mostre que é periódica e determine o período das oscilações.
- Mostre que a solução pode ser escrita nas formas

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais q_0 e v_0 .

- Mostre que a energia

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $q(t)$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$ para todo o tempo t .

- Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.
- Esboce as curvas de fase no plano q - $\dot{q}$.

3. (partícula numa montanha) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = k^2 q,$$

que descreve uma partícula de massa m num potencial $U(q) = -\frac{1}{2}k^2 q^2$.

- Determine a solução geral.
- Existem soluções de equilíbrio? Existem outras órbitas periódicas ou limitadas?

4. (oscilações amortecidas) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q,$$

onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito.

- Resolva a equação, esboce algumas soluções e discuta os casos $\alpha^2 < \omega^2$ (amortecimento sub-crítico), $\alpha^2 = \omega^2$ (amortecimento crítico), e $\alpha^2 > \omega^2$ (amortecimento super-crítico).
- Mostre que a energia

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

não é uma constante do movimento.

- O que acontece quando α é negativo?

5. (equação de Schrödinger estacionária) Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = E \Psi$$

para a função de onda $\Psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.626 \times 10^{-34}$ J.s. Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

6. (equações equidimensionais) Uma equação diferencial da forma

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional* (é invariante pela transformação $x \mapsto \lambda x$ com $\lambda > 0$).

- Mostre que a substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) = y(x(t))$.
- Resolva a equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

na semirecta $x > 0$.

7. (variação dos parâmetros) Uma solução particular da EDO

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = r(t)$$

é dada por

$$z(t) = \lambda_+(t)\phi_+(t) + \lambda_-(t)\phi_-(t)$$

onde

$$\lambda_+(t) = -\int \phi_-(t) \frac{r(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt, \quad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t) \frac{r(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt,$$

$\phi_+(t)$ and $\phi_-(t)$ são duas soluções independentes da equação homogénea $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, e $W_{\phi_+, \phi_-}(t) = \phi_+(t)\dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t)\phi_-(t)$ é o Wronskiano.

- Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em oportunos domínios, utilizando o método de variação dos parâmetros:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 1/\sin(t) & \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= e^{-t} & \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x &= e^{-2t} \log t. \\ \ddot{x} + x &= \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} & \ddot{x} + x &= \tan(t) & \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x &= \frac{e^{2t}}{\cos(2t)}. \end{aligned}$$

8. **(coeficientes indeterminados)** O método dos coeficientes indeterminados permite determinar soluções particulares de uma EDO linear

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = r(t)$$

quando o segundo membro pertence a álgebra gerada por polinómios, exponenciais, senos e cossenos, ou seja, quando $r(t)$ é uma combinação linear de termos

$$t^k \cdot e^{\rho t} \cdot (\cos(\omega t) \text{ ou } \sin(\omega t))$$

A conjectura para uma solução particular é

$$z(t) = p(t) \cdot e^{\rho t} \cdot (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$

onde $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ é um polinómio de grau $n \leq k + 2$.

- Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= t & \ddot{x} - \dot{x} &= t^2 & \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x &= t^2 - 1 & \ddot{x} - 4x &= e^{-2t} \\ \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= t^3 e^{-t} + e^t & \ddot{x} + x &= \sin(t) & \ddot{x} + 4x &= 2t \cos(t) \\ \ddot{x} + 9x &= \sin(\pi t) & \ddot{x} + 4x &= \cos(2t) & \ddot{x} - 4x &= t e^{-2t} & \ddot{x} + 4x &= t e^{-t} \cos(2t). \end{aligned}$$

9. **(representação integral da resposta de um oscilador)** Mostre que uma solução particular da equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = r(t) \quad \text{é} \quad x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t r(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau,$$

e que uma solução particular da equação

$$\ddot{x} - k^2 x = r(t) \quad \text{é} \quad x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t r(\tau) \sinh(k(t - \tau)) d\tau.$$

10. **(partícula num campo de forças dependente do tempo)** Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} + F(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$, onde $\alpha \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajectória quando a força é

- $F(t) = g$, ou seja, constante,
- $F(t) = 3 - t^2$,
- $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$,
- $F(t) = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\gamma_i t)$.

11. **(oscilações forçadas)** Considere a equação das oscilações forçadas

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + F(t).$$

onde a força é $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$.

- Determine a solução geral da equação quando $\gamma^2 \neq \omega^2$.

- Mostre que a solução quando $\gamma^2 = \omega^2$ (frequência ressonante) é

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) .$$

onde a amplitude A e a fase φ dependem dos dados iniciais.

12. (oscilações forçadas amortecidas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q + F(t) ,$$

onde $\alpha > 0$ e a força é $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$.

- Mostre que, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), a solução geral é

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \sin(\gamma t + \phi) ,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais. A primeira parcela da solução representa um regime transitório (transiente), desprezável para grandes valores do tempo. A segunda é dita solução estacionária, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função

$$R(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}}$$

é dita *curva de ressonância* do sistema, pois representa o factor de proporcionalidade entre a amplitude da força e a amplitude da resposta.

- Esboce o gráfico da curva de ressonância. Mostre que a curva de ressonância $R(\gamma)$ atinge um máximo para o valor

$$\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}$$

da frequência, chamada *frequência de ressonância*.

- Determine a solução estacionária quando a força é uma sobreposição

$$F(t) = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\gamma_i t) .$$

- Discuta também os casos $\alpha^2 = \omega^2$ e $\alpha^2 > \omega^2$.

13. (circuito RLC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R , indutância L e capacidade C , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V} ,$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$, e esboce as soluções.
- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).
- Determine a frequência de ressonância do circuito.

14. (campo central e problema de Kepler) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = F(\|\vec{r}\|) \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

que modela o movimento de uma partícula de massa m num campo central de intensidade $F(\|\vec{r}\|)$. A conservação do momento angular $\vec{M} = m\dot{\vec{r}} \wedge \vec{r}$ implica que o movimento é planar, e portanto podemos considerar $\vec{r} \in \mathbf{R}^2$. Em coordenadas polares $\vec{r} = \rho e^{i\theta}$, as equações são

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= F(\rho)/m \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0 . \end{aligned}$$

- Mostre que a segunda equação implica a *segunda lei de Kepler*¹⁰: a “velocidade areal” $\ell = \rho^2 \dot{\theta}$ é constante.

Considere a força gravitacional¹¹

$$F(\rho) = -G \frac{mM}{\rho^2},$$

onde M é a massa do Sol e $G \simeq 6.670 \times 10^{-8}$ dina·cm²/gm² a constante de gravitação. A primeira equação pode ser escrita

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} V_\ell(\rho),$$

onde o “potencial efectivo” é $V_\ell(\rho) = \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{\rho^2} - G\frac{mM}{\rho}$. A energia conservada é

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{\rho^2} - G\frac{mM}{\rho}.$$

- Defina $\rho = 1/x$. Verifique que $dx/d\theta = -\dot{\rho}/\ell$ e que $d^2x/d\theta^2 = -\rho^2\ddot{\rho}/\ell^2$, e deduza que $x(\theta)$ satisfaz a EDO linear

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{1}{\ell^2 x^2 m} F(1/x), \quad \text{ou seja,} \quad \frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{GM}{\ell^2}.$$

- Mostre que a solução geral é

$$x(\theta) = \frac{GM}{\ell^2} (1 + e \cdot \cos(\theta - \theta_0)),$$

onde $e \geq 0$ e θ_0 são constantes. Deduza que as órbitas são as cónicas

$$\rho(\theta) = \frac{\ell^2/(GM)}{1 + e \cdot \cos(\theta - \theta_0)},$$

de “excentricidade” e : elipses se $0 \leq e < 1$ (quando a energia é $E < 0$), parábolas se $e = 1$ (quando a energia é $E = 0$), hipérbolas se $e > 1$ (quando a energia é $E > 0$).

¹⁰ Johannes Kepler, *Astronomia nova*, 1609, e *Harmonices mundi*, 1619.

¹¹ Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Josephi Streater, Londini MDCLXXXVII.

Formulário primitivas

	(função)	("uma" primitiva)
	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x)$
(por substituição)	$f(y(x))y'(x)$	$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy$
(por partes)	$f(x)g'(x)$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
(constantes)	λ	$\int \lambda dx = \lambda x$
(potências, $\alpha \neq -1$)	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
(logaritmo)	$1/x$	$\int \frac{dx}{x} = \log x $
(exponencial)	e^x	$\int e^x dx = e^x$
(seno)	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
(coseno)	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)$
(tangente)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
(cotangente)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cotan(x)$
(arco cujo seno)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$
(arco cuja tangente)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
(exponencial $\times$ seno)	$e^{\alpha x} \sin(\beta x)$	$\int e^{\alpha x} \sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$
(exponencial $\times$ coseno)	$e^{\alpha x} \cos(\beta x)$	$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$
(coseno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\cos(nx) \cos(mx)$	$\int \cos(nx) \cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ seno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx) \sin(mx)$	$\int \sin(nx) \sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx) \cos(mx)$	$\int \sin(nx) \cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)}$
($x \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x \cos(nx)$	$\int x \cos(nx)dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n}$
($x \times$ seno, $n \neq 0$)	$x \sin(nx)$	$\int x \sin(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n}$
($x^k \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x^k \cos(nx)$	$\int x^k \cos(nx)dx = \frac{x^k \sin(nx)}{n} - \frac{k}{n} \int x^{k-1} \sin(nx)dx$
($x^k \times$ seno, $n \neq 0$)	$x^k \sin(nx)$	$\int x^k \sin(nx)dx = -\frac{x^k \cos(nx)}{n} + \frac{k}{n} \int x^{k-1} \cos(nx)dx$

5 Plano complexo e funções holomorfas

1. **(plano complexo)** O corpo dos *números complexos* é o conjunto $\mathbf{C}$ dos $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbf{R}$, munido das operações

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

e

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Em particular, $i \cdot i = -1$. O *conjugado* de $z = x + iy$ é $\bar{z} = x - iy$. O *módulo* de $z = x + iy$ é

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Os números reais

$$x = \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$.

- Verifique que o inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0$ é

$$1/z = \bar{z}/|z|^2$$

- Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexos

$$1/i \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2$$

- Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

2. **(representação polar e fórmula de Euler)** A *representação polar* do número complexo $z = x + iy$ é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde $\rho = |z|$, $\theta \in \mathbf{R}$ é um *argumento* de z , ou seja, um “ângulo” $\arg(z) = \theta + 2\pi n$, com $n \in \mathbf{Z}$, tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$, e o símbolo $e^{i\theta}$ é definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

- Verifique que $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
- Verifique a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

- Verifique que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
- Calcule

$$\sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i}$$

- Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^5 = 1$ e $z^3 = 81$.
- Mostre que se ω é uma raiz n -ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

3. **(funções holomorfas)** Uma função $f(z)$, definida num domínio $\Omega \subset \mathbf{C}$ do plano complexo, é dita *holomorfa* (ou *analítica*) se admitir *derivada*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

em todos os pontos $z \in \Omega$. É dita *inteira* quando o domínio é $\Omega = \mathbf{C}$.

Se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ (com u e v funções reais) tem derivada $f'(z)$ num ponto z , então as derivadas parciais de u e v satisfazem as *condições de Cauchy-Riemann*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)}$$

Se, por outro lado, $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções reais de classe $\mathcal{C}^1$ num domínio $\Omega \subset \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, então $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é holomorfa em Ω .

- Verifique se as seguintes funções são holomorfas, determine possíveis domínios, e calcule as derivadas $f'(z)$, $f''(z)$, ...

$$f(z) = z^2 \quad f(z) = |z|^2 \quad f(z) = z^3 - z \quad f(z) = 1/z \quad f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad f(z) = \bar{z} \quad f(z) = \Re(z) \quad f(z) = 1/(1 - z) \quad f(z) = 1/z^2$$

- Considere o polinómio

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad \text{com } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}.$$

Mostre que é uma função holomorfa, calcule as suas derivadas, e mostre que

$$a_0 = P(0) \quad a_1 = P'(0) \quad a_2 = \frac{1}{2} P''(0) \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(0)$$

- Mostre que as condições de Cauchy-Riemann são equivalentes a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, onde o operador diferencial $\partial/\partial \bar{z}$ é definido por

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

- Mostre que uma função holomorfa com valores reais é localmente constante (calcule o limite que define a derivada quando $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ e quando $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$).

4. (**funções harmónicas**) Uma função $\varphi(x, y)$, definida num domínio do plano $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, é dita *harmónica* se satisfaz a *equação de Laplace*

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

onde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é o *Laplaciano*.

- Mostre que se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é holomorfa num domínio $\Omega \subset \mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$, e se a sua parte real $u(x, y)$ e a sua parte imaginária $v(x, y)$ são funções reais de classe $\mathcal{C}^2$ (esta hipótese não é necessária, sendo uma consequência do teorema de Cauchy!), então u e v são funções harmónicas em Ω (ditas funções “harmónicas conjugadas”).
- Mostre que as curvas de nível de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são ortogonais.
- Esboce as curvas de nível das funções harmónicas conjugadas definidas pelas partes real e imaginária das seguintes funções holomorfas

$$f(z) = z^2 \quad f(z) = z^3 \quad f(z) = 1/z \quad f(z) = z + 1/z$$

5. (**exponencial**) Uma definição da função exponencial $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ (notação: $\exp(z) = e^z$) é

$$\boxed{\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y)}$$

- Verifique que e^z satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em todos os pontos de $\mathbf{C}$, e que portanto é uma função inteira.
- Verifique a fórmula de adição

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

e deduza que $e^z \neq 0$ para todo o $z \in \mathbf{C}$.

- Verifique que e^z é igual à sua derivada,

$$\exp'(z) = \exp(z),$$

ou seja, que o exponencial e^z é a solução da equação diferencial $f' = f$ com condição inicial $f(0) = 1$.

- Mostre que, se $t \in \mathbf{R}$, então o conjugado de e^{it} é e^{-it} , e portanto $|e^{it}| = 1$.
- Mostre que o exponencial é uma função periódica de período $i2\pi$, ou seja,

$$e^{z+i2\pi} = e^z \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

6. (**oscilador harmónico em coordenadas complexas**) Considere a equação diferencial do oscilador harmónico

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

- Mostre que, na variável complexa $z = \omega q + i\dot{q}$, a equação assume a forma

$$\dot{z} = -i\omega z$$

- Mostre que a solução é $z(t) = e^{-i\omega t} z(0)$.

7. (**impedância**) A resposta estacionária de um elemento de circuito a uma tensão alternada $V(t) = e^{i\omega t}$ é descrita pela *impedância*¹² $Z = R + iX = |Z|e^{i\theta}$ (a parte real R é a resistência e a parte imaginária X a *reatância*), definida pela lei de Ohm generalizada

$$V = ZI$$

- Mostre que a impedância de um elemento de circuito RLC é

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

e determine o módulo e a fase de Z .

- Mostre que a impedância de dois elementos em série, de impedância Z_1 e Z_2 , é

$$Z = Z_1 + Z_2$$

e que a impedância de dois elementos em paralelo, de impedância Z_1 e Z_2 , é (a metade da média harmónica)

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

8. (**fluido ideal numa região planar**) O campo de velocidades estacionário $\vec{v}(x, y)$ de um *fluido ideal* numa região do plano satisfaz as equações

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{rot} \vec{v} = 0$$

(ou seja, um fluido ideal é incompressível e irrotacional).

- Verifique que o campo $\vec{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ é o campo de velocidades de um fluido ideal em $\Omega \subset \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ sse a função

$$f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y),$$

dita *velocidade complexa*, é holomorfa em Ω (o sinal “−” não é uma gralha!).

¹²http://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_impedance

As *linhas de corrente* (*streamlines*), ou seja, as trajectórias das partículas, de um fluido com campo de velocidades $\vec{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ são as curvas integrais do sistema de EDOs

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(x, y) \\ \dot{y} &= v(x, y)\end{aligned}$$

ou seja, de

$$\dot{z} = \bar{f}(z)$$

Uma função holomorfa $\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ tal que $\Phi'(z) = f(z)$ é dita *potencial complexo*.

- Verifique que

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{v}$$

ou seja, as curvas de nível $\{\varphi(x, y) = c\}$, ditas *curvas equipotenciais*, são ortogonais ao campo de velocidades, e as curvas de nível $\{\psi(x, y) = c\}$ são tangentes às linhas de corrente.

- Esboce as linhas de corrente e as curvas equipotenciais de um fluido ideal descrito pelas velocidades complexas

$$f(z) = 1 \quad f(z) = 1 + i \quad f(z) = z \quad f(z) = z + 1/z$$

6 Integração complexa e fórmula de Cauchy

1. **(integrais de contorno)** O integral da função $f(z)$ ao longo do contorno¹³ γ , definido por $[a, b] \mapsto z(t)$, é

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

Se γ é um contorno fechado, a notação é $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

Se o comprimento do contorno é $|\gamma| = \ell$ e se $|f(z)| \leq M$ nos pontos de γ , então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell$$

- Calcule, se possível,

$$\int_{\gamma} z dz \quad \int_{\gamma} (i - z^2) dz \quad \int_{\gamma} x dz \quad \int_{\gamma} z^n dz \quad \int_{\gamma} \bar{z} dz$$

quando γ é o segmento $t \mapsto t(3 + i)$, com $t \in [0, 1]$, quando γ é o arco de parábola $t \mapsto t + it^2$, com $t \in [-1, 1]$, quando γ é o arco de circunferência $\theta \mapsto re^{i\theta}$, com $\theta \in [0, \pi]$ e $r > 0$, e quando γ é a espiral $t \mapsto e^{(i-1)t}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

- Calcule (as circunferências são percorridas no sentido anti-horário)

$$\oint_{|z|=3} z^2 dz \quad \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1} \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \quad \oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z-i} dz$$

2. **(primitivas)** Seja $D \subset \mathbf{C}$ um domínio do plano complexo. A função holomorfa $F : D \rightarrow \mathbf{C}$ é dita *primitiva* da função contínua $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ quando $F'(z) = f(z) \forall z \in D$.

Se $F(z)$ é uma primitiva de $f(z)$ em D , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)) \quad \forall \text{ contorno } \gamma \subset D \text{ de } z(a) \text{ até } z(b)$$

Se $f(z)$ é contínua em D , as seguintes afirmações são equivalentes:

$$f(z) \text{ admite uma primitiva } F(z) \text{ em } D,$$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \text{ contorno fechado } \gamma \text{ em } D,$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz \text{ depende apenas dos pontos inicial e final de } \gamma.$$

- Calcule

$$\int_{\gamma} e^z dz \quad \int_{\gamma} (z^3 - iz^2 + 7 - i) dz \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$$

quando γ é o contorno $t \mapsto \sin(\pi t) + ie^t$, com $t \in [0, 1]$.

- Calcule

$$\oint_{|z|=\rho} z^n dz \quad \oint_{|z|=\rho} e^z dz \quad \oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a}$$

- Mostre que

$$\oint_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ i2\pi & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

¹³Um *caminho* γ no domínio $\Omega \subset \mathbf{C}$ do plano complexo é uma função contínua $[a, b] \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) \in \Omega$. A *derivada* do caminho γ no instante t é $z'(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$. O *comprimento* do caminho diferenciável γ é o integral

$$|\gamma| = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Um *contorno* é um caminho seccionalmente diferenciável. Um contorno é *fechado* se $z(a) = z(b)$. Um contorno fechado é *simples* quando $z(t) \neq z(s)$ se $a \leq t < s < b$.

- A função $f(z) = 1/z$, definida em $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, admite primitivas? E $f(z) = \bar{z}$?
3. (teorema de Cauchy) Seja $D \subset \mathbf{C}$ um domínio limitado cuja fronteira¹⁴ ∂D é uma reunião de contornos fechados simples. Se $f(z)$ é holomorfa numa vizinhança de $D \cup \partial D$ então

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

Em particular¹⁵,

$$f \text{ holomorfa em } \Omega \text{ simplesmente conexo} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \text{ contorno fechado } \gamma \text{ em } \Omega$$

- Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z-3} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z+2} \quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+4} dz \quad \oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z}$$

4. (integrais gaussianas)

- Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ (calcule o quadrado usando coordenadas polares).
- Integre a função inteira $e^{-z^2/2}$ ao longo do retângulo de vértices $\pm R$, $it \pm R$ e mostre, calculando o limite quando $R \rightarrow \infty$, que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-itx} dx = e^{-t^2/2}$$

- Seja A uma matriz real $n \times n$ simétrica e positiva definida (e portanto diagonalizável com valores próprios positivos). Mostre que

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\pi \langle x, Ax \rangle - 2\pi \langle y, x \rangle} d^n x = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi \langle y, A^{-1} y \rangle}$$

5. (polinômios de Hermite) Os polinômios e as funções ortogonais de Hermite são definidos por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad \text{e} \quad \phi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Integre a função inteira $e^{(z-it)^2/2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2})$ ao longo do retângulo de vértices $\pm R$, $it \pm R$ e mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) e^{-itx} dx = (-i)^n \phi_n(t)$$

6. (fórmula integral de Cauchy) Seja $D \subset \mathbf{C}$ um domínio limitado cuja fronteira ∂D é uma reunião de contornos fechados simples, e seja $f(z)$ uma função holomorfa numa vizinhança de $D \cup \partial D$. Se $z_0 \in D$ então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Corolário é que $f(z)$ é infinitamente diferenciável em D , e que todas as suas derivadas são funções holomorfas. Em particular, as derivadas admitem a representação integral

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \quad \dots \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

¹⁴O teorema da curva de Jordan afirma que um caminho fechado simples γ divide o plano $\mathbf{C}$ em dois domínios, um dos quais, o interior de γ , é limitado. A orientação positiva de um caminho fechado simples é a orientação tal que “ao deslocarmo-nos ao longo do caminho observamos o interior à nossa esquerda”. Os caminhos γ_k que formam a fronteira $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ de um domínio $D \subset \mathbf{C}$ limitado do plano são orientados de maneira tal que o domínio fica à esquerda de cada γ_k . O integral de $f(z)$ ao longo da fronteira ∂D é

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z) dz.$$

¹⁵Um domínio $\Omega \subset \mathbf{C}$ é simplesmente conexo quando o interior de todo o caminho fechado simples γ em Ω está contido em Ω . Exemplos são os domínios convexos, os domínios $D \subset \mathbf{C}$ tais que se $a, b \in D$ então $a + t(b-a) \in D$ $\forall t \in [0, 1]$.

- Seja $f(z)$ uma função holomorfa no domínio D , e seja $z_0 \in D$. Mostre que, se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno, então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

- Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+1} \quad \oint_{|z|=2\pi} \frac{ze^z}{(z-\pi)^2} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)}$$

- Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} \quad \text{com } n \in \mathbf{Z}$$

- Mostre que, se $a \in \mathbf{R}$,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz = i2\pi$$

e deduza que

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

7. (polinômios de Legendre) Os *polinômios de Legendre* são definidos por

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Calcule $P_0(z)$, $P_1(z)$ e $P_2(z)$.
- Mostre que

$$P_n(z) = \frac{1}{i\pi 2^{n+1}} \oint_{|w-z|=\rho} \frac{(w^2-1)^n}{(w-z)^{n+1}} dw$$

8. (teorema de Liouville e teorema fundamental da álgebra) O *teorema de Liouville* afirma que uma função inteira (i.e. holomorfa no plano complexo $\mathbf{C}$) e limitada é constante.

- Mostre que, se $f(z)$ é uma função inteira e limitada, $|f(z)| \leq M$, então a fórmula integral de Cauchy, aplicada a uma circunferência γ de raio $R \rightarrow \infty$ e centro z_0 , implica que

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{M}{R} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty.$$

Deduza o teorema de Liouville.

- Use o teorema de Liouville para provar o *teorema fundamental da álgebra*: todo o polinômio $P(z)$ de grau $n \geq 1$ admite uma raiz em $\mathbf{C}$ (observe que, se $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbf{C}$, então $f(z) = 1/P(z)$ é uma função inteira ...).

7 Séries de potências

1. (séries de potências) Uma *série de potências*

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

em torno do ponto $z_0 \in \mathbf{C}$ converge uniformemente (e portanto define uma função contínua $f(z)$) em cada subconjunto compacto do seu “disco de convergência” $B_R(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z - z_0| < R\}$, onde o “raio de convergência” R é dado por ¹⁶

$$1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}.$$

O *teorema de Abel* afirma que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

é uma função holomorfa em $B_R(z_0)$, e que as suas derivadas $f'(z)$, $f''(z)$, ..., podem ser obtidas derivando termo a termo a série de potências.

- Mostre que a *série geométrica* é convergente no disco unitário, e

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{se } |z| < 1,$$

utilizando a identidade $(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$.

- Derive a série geométrica para obter as séries de potências de

$$\frac{1}{(1 - z)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(1 - z)^3}$$

em torno de 0.

- Determine o disco de convergência das seguintes séries de potências, e, se possível, uma expressão compacta para as funções que definem.

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n & \sum_{n \geq 0} n z^n & \sum_{n \geq 0} n^n z^n \\ & \sum_{n \geq 0} 2^n z^n & \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} z^{2n} & \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z - 1)^n \end{aligned}$$

- Mostre que, se $|\zeta| = \rho$ e $|z| < \rho$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{z}{\zeta} + \left(\frac{z}{\zeta} \right)^2 + \left(\frac{z}{\zeta} \right)^3 + \dots \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

2. (exponencial e funções trigonométricas) A *função exponencial* $\exp(z)$, ou e^z , é a função inteira definida pela série de potências

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

- Verifique a fórmula de adição $e^{z+w} = e^z e^w$, e deduza que $e^z \neq 0$ para todo o $z \in \mathbf{C}$.
- Verifique que e^z é igual à sua derivada, ou seja, $\exp'(z) = \exp(z)$.

¹⁶se o “limsup” é ∞ , então $R = 0$, se o “limsup” é 0, então $R = \infty$, ou seja, o disco de convergência é $\mathbf{C}$.

- Mostre que, se $t \in \mathbf{R}$, então o conjugado de e^{it} é e^{-it} , e portanto $|e^{it}| = 1$. Defina as funções reais de variável real “cos” e “sin” usando a fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

e deduza as suas expansões em série de potências em torno de 0.

- Determine as séries de potências que definem as funções trigonométricas

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

3. (funções de Bessel) As funções de Bessel de ordem $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ são definidas pelas séries de potências

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)! 2^{n+2k}} z^{n+2k}$$

- Mostre que $J_n(z)$ são funções inteiras.
- Mostre que as funções de Bessel satisfazem a “equação diferencial de Bessel”

$$J_n'' + \frac{1}{z} J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) J_n = 0.$$

4. (séries de Taylor) Se $f(z)$ é holomorfa no domínio $D \subset \mathbf{C}$, então $f(z)$ admite uma expansão em série de Taylor em torno de cada $z_0 \in D$, ou seja,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

numa vizinhança de z_0 (no disco $B_R(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z - z_0| < R\}$ onde $R = \text{dist}(z_0, \partial D)$), onde os coeficientes de Taylor são

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

se ρ é suficientemente pequeno (ou seja, $0 < \rho < R$).

- Determine a expansão em série de potências em torno de $z = 0$ e o raio de convergência das seguintes funções

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{1+z} & e^{2z} & z^2 e^z \\ \frac{1}{z^2+1} & e^{-z^2} & \frac{z}{z^4+4} \end{array}$$

- Determine as séries de potências de

$$\frac{1}{z} \quad \frac{1}{z^2} \quad e^z$$

em torno do ponto $z_0 = 1$ ou $z_0 = i$.

5. (séries de potências em ∞) Uma função $f(z)$ é “holomorfa em $z = \infty$ ” se a função $g(w) = f(1/w)$ é holomorfa em $w = 0$, ou seja, se admite a expansão

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{1}{z^n}$$

em $|z| > 1/\rho$. Os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z) z^{n-1} dz$$

onde $r > 1/\rho$.

- Determine, se existir, a expansão em série de potências em torno de ∞ de

$$1/z^3 \quad e^z \quad \frac{1}{z^2+1} \quad e^{1/z^2}$$

8 Séries de Laurent e cálculo dos resíduos

1. (**séries de Laurent**) Se $f(z)$ é holomorfa no anel $A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } r < |z - z_0| < R\}$, então admite uma expansão em *série de Laurent*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad \text{se } z \in A_{r,R}(z_0) \end{aligned}$$

em torno de z_0 , e os coeficientes são dados pelos integrais

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi \quad \text{com } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

onde $r < \rho < R$.

- Determine séries de Laurent das seguintes funções em anéis oportunos

$$e^{1/z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{e^z}{z^2}$$

- Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 das seguintes funções

$$\frac{1}{z(z-1)} \quad \frac{z-1}{z+1} \quad z \sin(1/z)$$

2. (**singularidades isoladas, pólos e resíduos**) Um ponto $z_0 \in \mathbf{C}$ é uma *singularidade isolada* de $f(z)$ se $f(z)$ é holomorfa num disco perfurado $A_{0,R}(z_0) = B_R(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } 0 < |z - z_0| < R\}$, e portanto

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{se } 0 < |z| < R$$

O *resíduo* de $f(z)$ em z_0 é

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz$$

onde $0 < \rho < R$.

A singularidade isolada z_0 de $f(z)$ é

- *removível* quando $c_n = 0 \ \forall n < 0$ (ou seja, se $f(z)$ é limitada numa vizinhança de z_0),
- um *pólo* de *ordem* $m \geq 1$ quando $c_{-n} = 0 \ \forall n > m$ e $c_{-m} \neq 0$ (ou seja, quando $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$, com $g(z)$ holomorfa numa vizinhança de z_0 e $g(z_0) \neq 0$),
- *essencial* quando $c_n \neq 0$ para infinitos n negativos.

- Determine singularidades isoladas e calcule resíduos de

$$\frac{e^z}{z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{1}{z^2} \quad ze^{1/z} \quad \frac{e^{3z}}{z^2 - 2z - 3}$$

- Mostre que, se z_0 é um pólo *simples* de $f(z)$ (ou seja, de ordem 1), então

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z),$$

se z_0 é um pólo *duplo* de $f(z)$ (ou seja, de ordem 2), então

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 f(z)),$$

se z_0 é um pólo de ordem m então

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

3. **(teorema dos resíduos)** Seja $D \subset \mathbf{C}$ um domínio limitado cuja fronteira ∂D é uma reunião de contornos fechados simples. Se $f(z)$ é holomorfa numa vizinhança de $D \cup \partial D$ excepto num número finito de singularidades isoladas $z_1, z_2, \dots, z_N \in D$, então

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{n=1}^N \text{Res}_{z=z_n} f(z)$$

- Calcule os integrais

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz & \quad \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz & \quad \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz \\ \oint_{|z|=R} e^{1/z^2} dz & \quad \oint_{|z|=2} \frac{z-3}{z(z-1)} dz & \quad \oint_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2-2z-3} dz \end{aligned}$$

4. **(cálculo de integrais reais)** Utilize o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais reais

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1} dx & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+\beta^2} dx \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)} & \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{3-\cos(\theta)} \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha+\beta \sin(\theta)} & \quad \text{com } \alpha > \beta > 0 \end{aligned}$$

5. **(integral do núcleo de Poisson)** Mostre que, se $0 \leq r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta) + r^2} d\theta = 1$$

9 Equações de derivadas parciais

1. (equação do transporte) Considere a *equação do transporte*

$$u_t + vu_x = 0$$

onde $v(x, t)$ é um campo de velocidades dado.

- Mostre que

$$u(x, t) = f\left(x + \int_0^t v(s) ds\right)$$

é uma solução da equação do transporte $u_t + vu_x = 0$ com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ se o campo de velocidades $v(x, t) = v(t)$ depende apenas do tempo.

2. (equação de Euler) Considere um fluido de partículas não interagentes na recta. O campo de velocidades do fluido é $v(x, t) = \dot{x}(t)$ se $s \mapsto x(s)$ é a trajectória da partícula que passa pelo ponto x no instante t .

- Mostre que a equação de Newton $\ddot{x} = 0$ implica que $v(x, t)$ satisfaz a *equação de Euler*

$$v_t + vv_x = 0$$

- Mostre que a equação pode ser escrita

$$v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(v^2) = 0$$

- Se $x(t)$ é uma solução da EDO $\dot{x} = v(x, t)$, então a função $E(t) = v(x(t), t)$ é uma constante. Deduza que a solução implícita é dada por

$$u(x + tv(x, 0), t) = \text{constante}$$

se t é suficientemente pequeno ...

- Mostre que a equação implica ondas de choque.

3. (equação “eikonal”) Considere a equação “*eikonal*” da óptica geométrica

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$$

- Mostre que $u(x, y) = \|(x, y)\|$ é uma solução.
- Mostre que, se $C \subset \mathbf{R}^2$ é um subconjunto convexo do plano limitado por uma curva fechada, então

$$u(x, y) = \text{dist}((x, y), C) = \min_{(x', y') \in C} \|(x, y) - (x', y')\|$$

é uma solução em $\mathbf{R}^2 \setminus C$

4. (Laplaciano e equação de Laplace) O *Laplaciano* (ou *operador de Laplace*) no espaço euclidiano $\mathbf{R}^n$ é o operador diferencial Δ definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ num domínio $D \subset \mathbf{R}^n$.

A *equação de Laplace* para a função/campo $u(\mathbf{x})$ num domínio $D \subset \mathbf{R}^n$ é a EDP

$$\Delta u = 0$$

- Quais funções satisfazem a equação de Laplace na recta?

- Determine a solução da equação de Laplace no intervalo $[a, b] \subset \mathbf{R}$ com condições de fronteira $u(a) = c$ e $u(b) = d$.

- Verifique que

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

é uma solução da equação de Laplace em $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Verifique que (o potencial eléctrico/gravitacional gerado por uma carga/massa posta na origem)

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

é uma solução da equação de Laplace em $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

5. (equação do calor) A equação do calor/difusão é

$$u_t = k \Delta u$$

- Mostre que a substituição $\tau = kt$ transforma a equação do calor acima em $u_\tau = \Delta u$.
- Verifique que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4kt}$$

é uma solução da equação do calor $u_t = k u_{xx}$ em $t > 0$.

- Verifique que

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4kt}$$

é uma solução da equação do calor $u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$ em $t > 0$.

6. (equação da(s) onda(s)) A equação das ondas é

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

- Mostre que a substituição $\tau = ct$ transforma a equação das ondas acima em $u_{\tau\tau} = \Delta u$.
- Verifique que as “ondas planas”

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{i(\xi \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções da equação das ondas $u_{tt} = c^2 \Delta u$ no “espaço-tempo” $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, se a frequência ω e o vector $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ satisfazem

$$\omega^2 = -c^2 \|\xi\|^2$$

7. (equação de onda e solução de d’Alembert) Considere a equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{com } x \in \mathbf{R}$$

- Mostre que a mudança de variáveis independentes $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$, onde $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$, transforma a equação acima na forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0,$$

cujas soluções gerais são uma sobreposição de duas ondas

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

onde f e g são funções diferenciáveis arbitrárias.

- Verifique que a *fórmula de d'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(y) dy$$

é uma solução da equação de ondas com condições iniciais

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x).$$

- Mostre que, se as condições iniciais $\phi(x)$ e $\varphi(x)$ são nulas fora dum intervalo $[-L, L]$, então a solução $u(x, t)$ é nula fora do intervalo $[-L - ct, L + ct]$, e interprete este facto.
- Determine uma solução quando as condições iniciais são

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(2\pi x),$$

ou

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Mostre que, se as condições iniciais $u(x, 0) = \phi(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x)$ são funções ímpares, então a solução $u(x, t)$ é uma função ímpar de x para cada tempo t .
- Resolva o problema das ondas na semi-recta $x \geq 0$ com condição de fronteira nula $u(0, t) = 0 \forall t$ e condições iniciais

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(x),$$

ou

$$u(x, 0) = e^{-x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

8. (equação do telégrafo)

$$i_x + Cv_t + Gv = 0 \quad v_x + Li_t + Ri = 0$$

- Deduza que i e v satisfazem a *equação do telégrafo*

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + LG)u_t + RG u$$

- Defina $u(x, t) = e^{st} f(x, t)$, e mostre que, se $LC \neq 0$, é possível escolher s de maneira tal que f satisfaz uma PDE do género

$$f_{xx} = Af_{tt} + Bf$$

9. (equação de Schrödinger) Considere a *equação de Schrödinger*

$$i\hbar\Psi_t = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(\vec{x})\Psi$$

- Mostre que se $\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\mathbf{x})$, então ψ satisfaz a equação de Schrödinger estacionária

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\vec{x})\psi = E\psi$$

10. (equação de Burgers) Considere a *equação de Burgers*

$$u_t = \mu u_{xx} + uu_x$$

com viscosidade $\mu \neq 0$.

- (substituição de Cole-Hopf ¹⁷) Mostre que se $v(x, t)$ é uma solução da equação do calor $v_t = \mu v_{xx}$, então

$$u = 2\frac{\partial}{\partial x} \log v = \frac{2}{v} v_x$$

é uma solução da equação de Burgers $u_t = \mu u_{xx} + uu_x$.

¹⁷E. Hopf, The partial differential equation $ut + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201-230.
J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), 225-236.

10 Separação de variáveis, ondas e difusão

1. **(EDPs e separação de variáveis)** O método de *separação de variáveis* para determinar soluções de uma EDPs linear homogênea $L(u) = 0$, por exemplo nas variáveis x e t , consiste em substituir a conjectura

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

na equação e deduzir $(L_x X)T = (L_t T)X$, onde L_x e L_t operadores diferenciais lineares nas variáveis x e t , respectivamente. A igualdade então implica que existe uma constante λ tal que X e T satisfazem as equações de Sturm-Liouville $L_x X = \lambda X$ e $L_t T = \lambda T$. As condições de fronteira determinam certas soluções admissíveis $X_\lambda(x)$ e $T_\lambda(t)$, e portanto a solução $X_\lambda(x)T_\lambda(t)$. Pelo princípio de sobreposição são também soluções combinações lineares finitas

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t).$$

- Determine, se possível, soluções separáveis das seguintes EDPs.

$$\begin{array}{ll} u_x + u_y = 0 & t u_{xx} + u_t = 0 \\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 & u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0 \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & y u_{xx} + x u_{yy} + x y u_{zz} = 0 \end{array}$$

2. **(corda vibrante e harmônicas)** Considere as pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ . O deslocamento transversal $u(x, t)$ da corda verifica a equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Mostre que a energia

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt} E = 0$.

- Verifique que umas soluções da equação com as extremidades fixas são as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(a_n \cos(2\pi\nu_n t) + b_n \sin(2\pi\nu_n t) \right) \sin(2\pi x/\lambda_n) \\ &= A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

onde a_n e b_n , ou $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e τ_n , são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n = \frac{c}{2\ell} n \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

respectivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = \frac{c}{2\ell}$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo fundamental*), e as outras, $\nu_n = \frac{cn}{2\ell}$, são ditas *n-ésimas harmônicas* da corda.

- Determine a energia da uma sobreposição de ondas estacionárias

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n),$$

suposta convergente, em função das amplitudes das harmônicas.

- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?
- Determine umas soluções da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{com } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \sin(4x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 \sin(x) - \sin(2x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

3. (condução de calor com temperatura constante na fronteira e modos) Considere a condução de calor num fio condutor de comprimento ℓ e difusividade térmica β . A temperatura $u(x, t)$ na posição x e no tempo t verifica a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- Verifique que a função

$$a + \frac{b-a}{\ell}x$$

é uma solução estacionária da equação de calor com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\ell, t) = b$. Deduza que a solução da equação com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\ell, t) = b$ é igual a

$$u(x, t) = a + \frac{b-a}{\ell}x + v(x, t),$$

onde $v(x, t)$ é a solução da equação com condições de fronteira nulas $v(0, t) = 0$ e $v(\ell, t) = 0$.

- Verifique que umas soluções da equação de calor com condições de fronteira nulas $u(0, t) = 0$ e $u(\ell, t) = 0$ são os *modos*

$$u_n(x, t) = s_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde s_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N s_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)$$

também é solução da equação com condições de fronteira nulas $u(0, t) = 0$ e $u(\ell, t) = 0$, e determine o limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

- Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica $10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$ é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de 0°C . Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}}x\right) \times 60^\circ\text{C},$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a 4°C ? O que acontece para grandes valores do tempo?

E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de 0°C e 100°C , respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

- Determine as soluções da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{com } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

4. (condução de calor com fluxo nulo na fronteira) Considere a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

em $0 \leq x \leq \ell$, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0$, que descreve o perfil de temperatura de um fio condutor termicamente isolado.

- Verifique que umas soluções são os modos

$$u_n(x, t) = c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

onde c_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

também é uma solução, e determine o limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

5. (ondas e calor na recta) Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda e de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com $x \in \mathbf{R}$.

6. (equação de Schrödinger) Considere a equação de Schrödinger unidimensional

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

para a função de onda $\Psi(x, t) \in \mathbf{C}$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida.

- Determine soluções separáveis quando $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira nulas, $\Psi(0, t) = \Psi(\ell, t) = 0$.
- Mostre que

$$\Psi_E(x, t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} e^{i \frac{px}{\hbar}},$$

onde $E \geq 0$ e $p = \sqrt{2mE}$, são soluções separáveis na recta.

11 Séries de Fourier

1. **(séries de Fourier complexas)** Se $f(z)$ é uma função holomorfa num domínio que contém a circunferência unitária, então a sua expansão em série de Laurent pode ser escrita, nos pontos $z = e^{i\theta}$, como

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{onde} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Em geral, se $f(\theta)$ é uma função integrável em $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (ou seja, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ é uma função periódica com período 2π), a sua *série de Fourier complexa* é

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$$

(o símbolo “ $\sim$ ” é apenas uma notação!), onde os *coeficientes de Fourier complexos* de $f(\theta)$ são

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Se $f(\theta)$ é uma função seccionalmente de classe $\mathcal{C}^1$, então a sua série de Fourier no ponto θ converge uniformemente para o valor médio $(f(\theta_+) + f(\theta_-))/2$. Em particular, a série de Fourier de uma função $f(\theta) \in \mathcal{C}^1(S^1)$ converge para $f(\theta)$ na norma uniforme, ou seja,

$$\sup_{\theta \in S^1} \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta} \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

O produto interno e a norma L^2 no espaço $L^2(S^1)$ das funções complexas em $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ com quadrado integrável são definidos por

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

A aplicação $f(\theta) \mapsto \hat{f}(n)$ define um isomorfismo de $L^2(S^1)$ em ℓ_2 , o espaço das sucessões $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ tais que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, munido do produto interno $(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. De facto, vale

$$(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$$

e a *identidade de Parseval*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

A série de Fourier de uma função $f(\theta) \in L^2(S^1)$ converge para $f(\theta)$ na norma L^2 , ou seja,

$$\left\| f(\theta) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

- Verifique as relações de ortogonalidade

$$(e^{in\theta}, e^{im\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

- Mostre que, se $f(\theta)$ é diferenciável e a derivada $f'(\theta)$ é integrável, então

$$\hat{f}'(n) = in \hat{f}(n)$$

2. (séries de Fourier) A série de Fourier da função integrável $f(x)$, periódica de período 2ℓ , é

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

onde os coeficientes de Fourier de f são

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

Se $f(x)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, então a sua série de Fourier converge uniformemente para $f(x)$.

- Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas de período 2π (as soluções estão no formulário!):

$$f(x) = \cos(\pi x) - 2 \sin(3\pi x),$$

$$f(x) = x \quad \text{se } -\pi \leq x < \pi, \quad \text{e periódica de período } 2\pi,$$

$$f(x) = |x| \quad \text{se } -\pi \leq x < \pi, \quad \text{e periódica de período } 2\pi.$$

- Mostre que a série de Fourier da função $\Theta(x)$, periódica de período 2π e definida por

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$\Theta(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$

Deduz a série de Fourier da função $2\Theta(x) - 1$, periódica de período 2π e definida por

$$2\Theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$2\Theta(x) - 1 \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right).$$

- Mostre que a série de Fourier da função $f(x)$, periódica de período 2π e definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right).$$

Deduz a que o valor da função zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ no ponto $s = 2$ é

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. (séries de Fourier de senos) A série de Fourier de senos da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão ímpar 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

- Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, das extensões ímpares e 2π -periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad 1 - \cos(2x) \qquad \delta(x - \pi/2) \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

4. (séries de Fourier de cossenos) A *série de Fourier de cossenos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão par 2ℓ -periódica de f , ou seja,

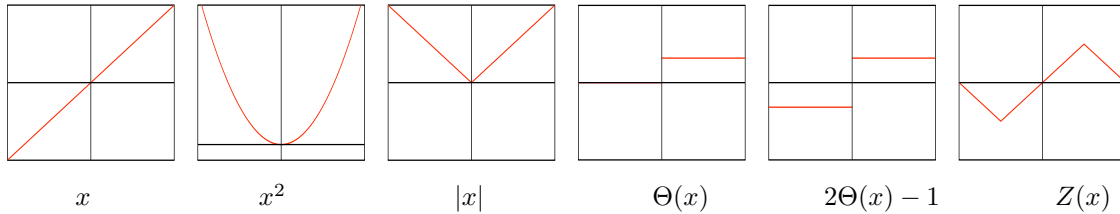
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

- Determine as séries de Fourier de co-senos (ou seja, das extensões pares e 2π -periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad \sin(2x) \qquad \delta(x - \pi/2) \qquad \pi - x$$

Algumas séries de Fourier das extensões periódicas de período 2π de funções definidas no intervalo $-\pi \leq x < \pi$

(função em $[-\pi, \pi]$)	(série de Fourier)
x	$\sim 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$
x^2	$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right)$
$ x $	$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right)$
$\left. \begin{array}{l} 1 \quad \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 \quad \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{array} \right\} = \Theta(x)$	$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$
$\left. \begin{array}{l} 1 \quad \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 \quad \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{array} \right\} = 2\Theta(x) - 1$	$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$
$\left. \begin{array}{l} \pi - x \quad \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \\ x \quad \text{se } -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ -\pi - x \quad \text{se } -\pi \leq x < -\pi/2 \end{array} \right\} = Z(x)$	$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \dots \right)$
$\delta(x - \alpha) - \delta(x + \alpha)$	$\sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha) \sin(nx)$
$\delta(x - \alpha) + \delta(x + \alpha)$	$\sim \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\alpha) \cos(nx)$



Integrais úteis

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2 dx = \pi \quad \text{se } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} \quad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int \sin(nx) \sin(mx) dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} \quad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int \sin(nx) \cos(mx) dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} \quad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int x^k \cos(nx) dx = \frac{x^k \sin(nx)}{n} - \frac{k}{n} \int x^{k-1} \sin(nx) dx \quad \text{se } n \neq 0 \text{ e } k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\int x^k \sin(nx) dx = -\frac{x^k \cos(nx)}{n} + \frac{k}{n} \int x^{k-1} \cos(nx) dx \quad \text{se } n \neq 0 \text{ e } k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

12 Aplicações das séries de Fourier

1. (corda vibrante) A solução formal do problema da corda vibrante

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell], \quad \text{com } u(0, t) = u(\ell, t) = 0}$$

com condições iniciais

$$\boxed{u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

é

$$\boxed{u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi c n}{\ell} t\right) + b_n \frac{\ell}{\pi c n} \sin\left(\frac{\pi c n}{\ell} t\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{com } u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

e com condições iniciais (deslocamento inicial “triangular”)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- com condições iniciais (impulso inicial concentrado num ponto)

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2).$$

2. (condução de calor) A solução formal do problema da condução de calor com condições de fronteira nulas

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell], \quad \text{com } u(0, t) = u(\ell, t) = 0}$$

e com condição inicial

$$\boxed{u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{é} \quad u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

A solução formal do problema da condução de calor com fluxo nulo nas extremidades

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell], \quad \text{com } \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0}$$

com condição inicial

$$\boxed{u(x, 0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{é} \quad u(x, t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx),$$

e condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = 100 \quad \text{se } 0 < x < \pi,$$

e condições de fronteira constantes $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 200$.

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

e fluxo de calor nulo nas extremidades, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$.

- com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2),$$

e condições de fronteira nulas $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$.

3. (timbres) Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento ℓ , densidade linear ρ e afinada com tensão k .

Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} h \frac{x}{\alpha} & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\ell - \alpha}(\ell - x) & \text{se } \alpha \leq x < \ell \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < \ell$ é o ponto onde dedilhamos a corda, e h é o máximo do deslocamento inicial.

Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo transmite à corda apenas um impulso instantâneo localizado num ponto (ou num intervalo de comprimento pequeno 2ε à volta de um ponto) $0 < \beta < \ell$ da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$

- Determine as vibrações, ou seja, as amplitudes das harmónicas excitadas, da corda do cavaquinho e da corda do piano.
- Determine as energias E_n das n -ésimas harmónicas nos dois casos. Explique porque o som do piano é mais “cheio” do que o som do cavaquinho.

4. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

em $0 \leq x \leq \ell$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Mostre que a conjectura $u_n(x, t) = q_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência $\omega_n^2 = (\pi c n / \ell)^2$.

- Deduza as soluções separáveis do problema.

5. (**fórmula integral de Poisson no disco unitário**) Considere o problema de determinar uma extensão harmónica $f(re^{i\theta})$, ou seja, uma solução da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

no disco $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\} \simeq \{z = re^{i\theta} \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z| = r \leq 1\}$ de uma função $g(e^{i\theta})$ definida na circunferência $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 1\} \simeq \{z = e^{i\theta} \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$.

- Verifique que $r^{|n|}e^{in\theta}$ é uma extensão harmónica de $e^{in\theta}$.
- Deduza que

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \quad re^{i\theta} \in D$$

é uma extensão harmónica da série de Fourier (suposta convergente)

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad e^{i\theta} \in S^1$$

- Use a definição dos coeficientes de Fourier complexos para mostrar que uma extensão harmónica de $g(e^{i\theta})$ é dada pela *fórmula integral de Poisson*

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) d\varphi$$

onde o *núcleo de Poisson* é definido por

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

- Mostre que o núcleo de Poisson admite as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \\ &= 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

onde $z = re^{i\theta}$, e portanto

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)}.$$

13 Transformada de Fourier

1. **(transformada de Fourier de funções integráveis)** A *transformada de Fourier* da função integrável¹⁸ $f(x)$ é a função $\mathcal{F}\{f(x)\}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ definida pelo integral impróprio

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

O *lema de Riemann-Lebesgue* afirma que $\widehat{f}(\xi)$ é contínua, limitada, e $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$.

- Verifique as seguintes propriedades elementares da transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{\lambda f(x) + \mu g(x)\}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\xi) + \mu \widehat{g}(\xi)$$

$$\mathcal{F}\{\overline{f(x)}\}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)} \quad \mathcal{F}\{f(\lambda x)\}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}(\xi/\lambda)$$

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\}(\xi) = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi) \quad \mathcal{F}\{e^{ibx} f(x)\}(\xi) = \widehat{f}(\xi-b)$$

- Calcule a transformada de Fourier de $1_{[-\ell, \ell]}$, a função característica do intervalo $[-\ell, \ell]$.
- Calcule, usando a técnica dos resíduos, a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \text{e} \quad f(x) = e^{-a|x|}.$$

- Mostre que a transformada de Fourier da gaussiana

$$g(x) = e^{-x^2/2} \quad \text{é} \quad \widehat{g}(\xi) = e^{-\xi^2/2},$$

e calcule a transformada de Fourier da gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

2. **(transformada de Fourier no espaço de Schwartz)** A transformada de Fourier é uma bijecção linear $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ do espaço de Schwartz¹⁹ cuja inversa é a *transformada de Fourier inversa* $\mathcal{F}^{-1} : g \mapsto \check{g}$, definida pelo integral impróprio

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Em particular, no espaço de Schwartz vale a *fórmula de inversão de Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \right) e^{i\xi x} d\xi$$

- Mostre que, se $f \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{\left(\frac{df}{dx}\right)}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi) \quad \text{e} \quad \widehat{(-ixf)}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi)$$

¹⁸O espaço $L^1(\mathbf{R})$ das *funções integráveis* na recta real é o espaço das funções $f(x)$ tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

¹⁹O *espaço de Schwartz* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ é o espaço das funções $f(x)$ infinitamente diferenciáveis na recta real que decrescem $|f(x)| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, com todas as suas derivadas, mais rápido que o inverso de qualquer polinómio. Ou seja, o espaço das funções $f(x)$ tais que $\forall p, q \in \mathbf{N}$ existe uma constante $C_{p,q} > 0$ tal que

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

3. (fórmula do somatório de Poisson) Dada uma função $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, seja

$$f_{2\pi\mathbf{Z}}(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2\pi n)$$

Então $f_{\mathbf{Z}}(x)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, periódica de período 2π , e como tal admite uma expansão em série de Fourier

$$f_{2\pi\mathbf{Z}}(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} \widehat{f_{\mathbf{Z}}}(n)$$

com coeficientes

$$\widehat{f_{2\pi\mathbf{Z}}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f_{\mathbf{Z}}(x) dx$$

- Mostre que

$$\begin{aligned} \widehat{f_{2\pi\mathbf{Z}}}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} f(x + 2\pi m) \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

- Deduza a fórmula do somatório de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n)$$

4. (produto de convolução) O produto de convolução de $f(x)$ e $g(x)$ é a função $(f * g)(x)$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$$

Se $f, g, \in \mathcal{S}$, então $f * g \in \mathcal{S}$ e

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$$

- Considere o núcleo de Poisson

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Mostre que $P_t * P_s = P_{t+s}$.

5. (identidade de Parseval e teorema de Plancherel) O produto interno e a norma L^2 são definidos por

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$$

Se $f \in \mathcal{S}$, então vale a identidade de Parseval

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \quad \text{ou seja,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

O teorema de Plancherel afirma que a transformada de Fourier estende a uma transformação unitária $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$ das funções de quadrado integrável²⁰, cuja inversa é a própria adjunta, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.

²⁰O espaço $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$ das funções de quadrado integrável é o espaço das funções $f(x)$ tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

- Calcule a norma L^2 da gaussiana $e^{-x^2/2}$.

6. (equação e funções de Hermite) As funções de Hermite $\phi_n(x) = e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$, soluções da equação de Hermite

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi_n(x) - x^2 \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x)$$

com $\lambda_n = -(2n+1)$, formam uma base ortogonal do espaço de Hilbert $L^2(\mathbf{R})$.

- Mostre que a transformada de Fourier transforma a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - x^2 f(x) = \lambda f(x) \quad \text{em} \quad \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{f}(\xi) - \xi^2 \hat{f}(\xi) = \lambda \hat{f}(\xi).$$

- Verifique que as funções de Hermite $\phi_n(x)$ são funções próprias, de valores próprios $(-i)^n$, da transformada de Fourier, ou seja

$$\mathcal{F}\{\phi_n\} = (-i)^n \phi_n.$$

7. (distribuições) O espaço das distribuições (temperadas) $\mathcal{S}'$ é o espaço dual do espaço de Schwartz $\mathcal{S}$, ou seja, o espaço dos funcionais lineares contínuos $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}$. A derivada da distribuição T é a distribuição T' definida pela identidade

$$T'(f) = -T(f') \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

- Dada $g(x) \in \mathcal{S}$, seja T_g a distribuição induzida, definida por $T_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$. Mostre que $(T_g)' = T_{g'}$.
- A delta de Dirac é a distribuição δ definida por

$$\delta(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx \right) = f(0)$$

(o integral é apenas uma notação, δ não é uma função!). A delta de Dirac em $x_0 \in \mathbf{R}$ é a distribuição δ_{x_0} definida por $\delta_{x_0}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0)$. Calcule as derivadas de δ_{x_0} .

- A distribuição de Heaviside é a distribuição $H = T_{u_0}$ definida por

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

onde a função de salto unitário (ou função de Heaviside) é definida por

$$u_{x_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_0 \\ 1 & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Calcule as derivadas de H .

- Considere o núcleo de Poisson

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Verifique que $P_t(x) \rightarrow \delta(x)$ quando $t \downarrow 0$, ou seja, que, se $f(x)$ é contínua e limitada,

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y)f(y)dy = \delta(f) = f(0)$$

8. (transformada de Fourier das distribuições) Se $T \in \mathcal{S}'$ é uma distribuição, a sua transformada de Fourier é a distribuição $\hat{T}$ definida pela identidade

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

- Verifique que se $g(x)$ é uma função integrável e T_g é a distribuição induzida, definida por $T_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$, então $\widehat{T_g} = T_{\widehat{g}}$.
 - Calcule a transformada de Fourier da distribuição T_1 , induzida pela função constante $g(x) = 1$.
 - Calcule a transformada de Fourier da delta de Dirac δ .
 - Calcule a transformada de Fourier da distribuição de Heaviside H .
9. (Heisenberg uncertainty principle) Seja $f \in L^2(\mathbf{R})$ uma função com norma $\|f\|_2 = 1$ (ou seja, tal que $|f(x)|$ é uma densidade de probabilidades), e seja $\widehat{f}(\xi)$ a sua transformada de Fourier. [Fo92] Sejam

$$\sigma_x^2 = \int (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \sigma_\xi^2 = \int (\xi - \bar{\xi})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

onde

$$\bar{x} = \int x \cdot |f(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \bar{\xi} = \int \xi \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Então

$$\sigma_x \sigma_\xi \geq \frac{1}{4}$$

- Verifique que a Gaussiana $\psi(x) = e^{-ax^2/2}$ realiza o mínimo para $\Delta X \Delta P$.
- Na mecânica quântica, às posição e momento correspondem os operadores $X : f(x) \mapsto xf(x)$ e $P : f(x) \mapsto -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}$, definidos no espaço de Hilbert $L^2(\mathbf{R})$. Verifique que $[X, P] = 1$ e mostre que

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Transformadas de Fourier

	(espaço da <i>posição</i> /tempo x)	(espaço do <i>momento</i> /frequência ξ)
	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$
(linearidade)	$\lambda f(x) + \mu g(x)$	$\lambda \hat{f}(\xi) + \mu \hat{g}(\xi)$
(conjugação)	$\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{f}(-\xi)}$
(homotetias, $\lambda \neq 0$)	$f(x/\lambda)$	$\lambda \hat{f}(\lambda \xi)$
(translações em x)	$f(x-a)$	$e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$
(translações em ξ)	$e^{ibx} f(x)$	$\hat{f}(\xi-b)$
(derivada em x / multiplicação em ξ)	$f'(x)$	$i\xi \hat{f}(\xi)$
(multiplicação em x / derivada em ξ)	$-ix f(x)$	$\hat{f}'(\xi)$
(convolução em x / produto em ξ)	$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$
(produto em x / convolução em ξ)	$\sqrt{2\pi} f(x)g(x)$	$(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$
(característica do intervalo)	$1_{[-\ell, \ell]}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\ell \xi)}{\xi} \rightarrow_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \ell$
(gaussiana)	$e^{-x^2/2}$	$e^{-\xi^2/2}$
(funções de Hermite, $n = 0, 1, 2, \dots$)	$\phi_n(x) = e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$	$(-i)^n \phi_n(\xi)$
(exponencial em x , $\beta > 0$)	$e^{-\beta x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \xi^2}$
(exponencial em ξ , $\alpha > 0$)	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$	$e^{-\alpha \xi }$
(delta de Dirac)	$\delta_{x_0}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 \xi}$
(Heaviside, salto unitário em 0)	$u_0(x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta_0(\xi) + \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\xi} \right) \right)$
(constante)	1	$\sqrt{2\pi} \delta_0(\xi)$
(sinal)	$\text{sgn}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i\xi}$
(exponencial complexo, $p \in \mathbf{R}$)	e^{ipx}	$\sqrt{2\pi} \delta_p(\xi)$

14 Aplicações da transformada de Fourier

1. (difusão na recta e núcleo de Poisson) Considere a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

na recta, com condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. Se $u(x, t)$ é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável x),

$$\widehat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t) dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -\xi^2 \widehat{u} \quad \text{com condição inicial} \quad \widehat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u_0(x) dx = \widehat{u_0}(\xi)$$

A solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \widehat{u_0}(\xi)$$

- Verifique que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2 t}$ é a transformada de Fourier do *núcleo de Poisson* (ou *heat kernel*)

$$P_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

- Deduza que a solução da equação de calor na recta com condição inicial $u_0(x)$ é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (P_t * u_0)(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \end{aligned}$$

2. (movimento Browniano) No modelo do movimento Browniano proposto por Einstein em 1905²¹, a densidade de probabilidade $P(x, t)$ de encontrar a partícula Browniana na posição x no tempo t sabendo que ela estava na posição 0 no tempo 0 é a solução não-negativa da equação da difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

tal que $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, t) = 0$ para todo o $x \neq 0$, e $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$ para todo o tempo $t > 0$. O “coeficiente de difusão” é $\beta = \frac{RT}{N\alpha}$, onde R é a constante de gás perfeito, T a temperatura absoluta, N o número de Avogadro, e $\alpha = 6\pi\eta\rho$ um coeficiente de fricção (que depende da viscosidade dinâmica η do líquido e do raio ρ da partícula Browniana).

- Verifique que a Gaussiana

$$P_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} e^{-x^2/(4\beta t)}.$$

resolve o problema do movimento Browniano.

- Verifique que

$$P_{t+s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) P_s(x-y) dy$$

e interprete este facto.

- Calcule o caminho quadrático médio da partícula Browniana no tempo t , definido por

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_t(x) dx.$$

²¹A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **17**, 549, 1905. Traduzido em A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover, New York, 1956.

3. (equação de calor com dissipação) Use a transformada de Fourier para achar a solução formal do problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha u$$

com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ contínua e limitada.

4. (equação de ondas) Use a transformada de Fourier para mostrar que a solução formal do problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha u$$

com condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ contínuas, limitadas e integráveis é dada pela fórmula de D'Alembert.

5. (equação de ondas com dissipação) Use a transformada de Fourier para achar a solução formal do problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha u$$

com condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ contínuas e limitadas.

6. (equação de calor com convecção) Use a transformada de Fourier para achar a solução formal do problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}$$

com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ contínua e limitadas.

7. (fórmula integral de Poisson no semi-plano) Considere o problema de determinar uma extensão harmónica $f(x, y)$, ou seja

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

no semi-plano superior $\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } y > 0\}$ de uma função $g(x)$ definida na fronteira $\partial\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } y = 0\}$. Se $f(x, y)$ é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável x),

$$\widehat{f}(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x, y) dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$-\xi^2 \widehat{f} + \frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com condição inicial} \quad \widehat{f}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx = \widehat{g}(\xi)$$

A solução limitada em $y \geq 0$ é

$$\widehat{f}(\xi, y) = e^{-|\xi|y} \widehat{g}(\xi)$$

- Verifique que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|\xi|y}$ é a transformada de Fourier do *núcleo de Poisson* em $\mathbf{H}$

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

- Deduza que a extensão harmónica de $g(x)$ em $\mathbf{H}$ é

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (P_y * g)(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} g(s) ds \end{aligned}$$

8. (oscilador harmónico quântico) Considere a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi$$

para a função de onda $\Psi(x, t) \in \mathbf{C}$ de uma partícula de massa m num potencial $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, onde $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. Determine as soluções separáveis, ou seja do género

$$\Psi_n(x, t) = e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} f_n(x),$$

com $f_n(x) \in L^2(\mathbf{R})$, e mostre que os “níveis de energia” são

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

9. (função característica e teorema limite central) A função característica de uma variável aleatória real X , com lei $\mathbf{P}$, é a média/esperança da variável $e^{i\xi X}$, com $\xi \in \mathbf{R}$, ou seja,

$$\phi_X(\xi) = \mathbf{E} e^{i\xi X} = \int e^{i\xi x} \mathbf{P}(dx).$$

Em particular, se X é absolutamente contínua com lei $\mathbf{P}(X \in A) = \int_A p(x) dx$, então a função característica $\phi_X(\xi)$ é a transformada de Fourier da densidade de X , pois

$$\phi_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} p(x) dx = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{p}(\xi).$$

O teorema de Lévy afirma que uma sequência de variáveis aleatórias (X_n) converge “em lei”²² para a variável X quando $n \rightarrow \infty$, i.e. $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$, sse $\phi_{X_n}(\xi) \rightarrow \phi_X(\xi)$ para cada $\xi \in \mathbf{R}$.

- Verifique que as derivadas da função característica na origem são

$$\phi_X(0) = 1 \quad \phi'_X(0) = i\mathbf{E}X \quad \phi''_X(0) = -\mathbf{E}X^2 \quad \dots$$

(desde que os momentos da variável X sejam finitos).

- Mostre que, se a variável aleatória X tem média $\mathbf{E}X = m$ e variância $\mathbf{V}X = \mathbf{E}(X - m)^2 = \sigma^2$, e se $Y = \frac{X-m}{\sigma}$, então²³

$$\phi_Y(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + o(\xi^2)$$

numa vizinhança da origem.

- Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média m e variância σ^2 , seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, e seja

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - m}{\sigma}$$

Verifique que

$$\phi_{S_n^*}(\xi) = (\phi_Y(\xi/\sqrt{n}))^n$$

onde $Y = \frac{X-m}{\sigma}$, e portanto

$$\phi_{S_n^*}(\xi) \rightarrow e^{-\xi^2/2} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

- Deduza o teorema limite central, que afirma que a sequência de variáveis (S_n^*) converge em lei para uma variável normal $N(0, 1)$, ou seja,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

10. (teorema de Wiener-Kinchin)

²²Convergência em lei: $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$ se, para cada função $f(x)$ contínua e limitada, $\mathbf{E}f(X_n) \rightarrow \mathbf{E}f(X)$, ou seja, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

para cada ponto de continuidade x da função de repartição de X .

²³Notação de Landau: $f(\xi) = o(\xi^k)$ quando $\xi \rightarrow 0$ significa que $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi)/\xi^k = 0$.

15 Transformada de Laplace

1. **(transformada de Laplace)** Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial²⁴ m . A transformada de Laplace de $f(t)$ é a função $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z)$, definida pelo integral impróprio

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$$

$F(z)$ é holomorfa no domínio $\Re(z) > m$ onde o integral é absolutamente convergente. A restrição de $F(z)$ à recta real, ou seja em $s = \Re(z) > m$, é denotada por $F(s)$.

- Verifique as seguintes propriedades elementares da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\}(s) = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \mu \mathcal{L}\{g(t)\}(s) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \text{ com } s > m,$$

$$\mathcal{L}\{f(\lambda t)\}(s) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}\{f\}(s/\lambda) \quad \forall \lambda > 0, \text{ com } s > \lambda m.$$

$$\mathcal{L}\{e^{kt} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s - k) \quad \forall k \in \mathbf{R}, \text{ com } s > m + k.$$

- Verifique as seguintes fórmulas para as transformadas de Laplace das funções elementares: ²⁵

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2} \quad \dots \quad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{com } s > 0.$$

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\}(s) = \frac{1}{s - k} \quad \text{com } s > k$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{com } s > 0.$$

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{com } s > 0$$

- Verifique que a transformada de Laplace da potência $f(t) = t^q$, com $q \geq 0$, é

$$\mathcal{L}\{t^q\}(s) = \frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}} \quad \text{com } s > 0,$$

onde a função Gama é definida pelo integral impróprio

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{em } \Re(z) > 0$$

Mostre que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, e que $\Gamma(1) = 1$. Deduza que Γ estende o factorial, ou seja, $\Gamma(n+1) = n!$ se $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2. **(transformada de Laplace de funções periódicas)** Se $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ é uma função seccionalmente contínua e periódica de período T então a sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} \quad \text{onde} \quad F_T(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

- Determine a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas: ²⁶

$$f(t) = t - [t] \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 & \text{se } [t] \text{ é ímpar} \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} t - [t] & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 + [t] - t & \text{se } [t] \text{ é ímpar} \end{cases}$$

²⁴A função $f(t)$ tem crescimento exponencial se $\exists m \geq 0$ e $M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{mt}$, $\forall t \geq 0$. A ordem exponencial de $f(t)$ é o $\inf\{m \geq 0 \text{ t.q. } \exists M > 0 \text{ t.q. } |f(t)| \leq Me^{mt}, \forall t \geq 0\}$

²⁵A função de salto unitário (ou função de Heaviside) em $a \geq 0$ é definida por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases}.$$

²⁶ $[t]$ denota a parte inteira de t , ou seja, o maior inteiro $n \in \mathbf{Z}$ tal que $n \leq t$.

3. (transformada de Laplace e translações/retardos) Seja $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial m . Mostre que, se $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m,$$

e portanto

$$\mathcal{L}\{f(t+a)\}(s) = e^{as}\mathcal{L}\{u_a(t)f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m.$$

4. (produto de convolução) Sejam f e $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ duas funções seccionalmente contínuas e de ordem exponencial m . O produto de convolução (para sistemas causais) de f e g é a função $f * g : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- Mostre que

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \text{com } s > m.$$

- Deduza que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad \text{com } s > m.$$

5. (derivadas e transformada de Laplace) Seja $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial m , e seja $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, com $s > m$, a sua transformada de Laplace.

- Mostre que $F(s)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e

$$\frac{d^n F}{ds^n}(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}(s).$$

- Mostre que, se f e as suas derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial m , então

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

6. (transformadas de Laplace de funções elementares) Determine a transformada de Laplace das seguintes funções $f(t)$:

$$\begin{aligned} & t^2 - 2t + 1 \quad 2 + e^{3t} - 5\sin(\pi t) \quad (t-1)e^{2t} \quad \sin(5t)\cos(4t) \\ & t^n e^{kt} \quad \cosh(\beta t) \quad \sinh(\beta t) \\ & e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \quad e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \quad t \cos(\omega t) \quad t \sin(\omega t) \\ & u_a(t)e^{-\alpha t} \quad u_a(t) \sin(\omega t) \quad (1 - u_a(t))t. \\ & A \sin(\omega t + \varphi) \quad Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \quad Ae^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \varphi) \\ & A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t) \quad A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) \\ & Ae^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \sin(\gamma t + \phi) \end{aligned}$$

7. (transformada de Laplace inversa) Se $F(z)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$, então $f(t)$ é dita transformada de Laplace inversa de $F(z)$, e denotada por $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$. Nos pontos de continuidade de $f(t)$, vale a fórmula (de inversão) de Mellin (ou de Bromwich)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{zt} F(z) dz$$

onde $\beta > m$ e m é a ordem exponencial de $f(t)$.

- Mostre as seguintes propriedades da transformada de Laplace inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(s) + \mu G(s)\}(t) = \lambda \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) + \mu \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) \quad \forall a \in \mathbf{R},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = u_a(t) \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a) \quad \forall a > 0,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\lambda}F(s/\lambda)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\lambda t) \quad \forall \lambda > 0,$$

- Determine uma transformada de Laplace inversa das seguintes funções $F(s)$:

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{s} + \frac{1}{s^4} & \frac{2}{s^2+9} & \frac{1}{s(s^2+1)} & \frac{s-1}{s^2-2s+5} \\ \frac{e^{-3s}}{s} & \frac{e^{-s}}{(s-2)^2} & \frac{e^{-4s}-e^{-7s}}{s^2} & \frac{1}{s^3+4s^2+3s} \end{array}$$

Transformadas de Laplace (para sistemas causais)

	(espaço dos <i>tempos</i> $t \geq 0$)	(espaço das <i>frequências</i> $s > m$)
	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m+\varepsilon-i\infty}^{m+\varepsilon+i\infty} e^{zt} F(z) dz$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
(linearidade)	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(s) + \mu G(s)$
(homotetias no espaço dos tempos)	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F(s/\lambda)$
(translações no espaço dos tempos, retardo)	$f(t - \tau) u(t - \tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$
(translações no espaço das frequências)	$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(s + \alpha)$
(funções periódicas)	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ts}}$
(convolução)	$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$	$F(s) G(s)$
(integração no espaço dos tempos)	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s)$
(integração no espaço das frequências)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_m^\infty F(s) ds$
(derivação no espaço dos tempos)	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f^{(k)}(t)$	$s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$
(derivação no espaço das frequências)	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
(constante)	$1 = u(t - 0)$	$\frac{1}{s}$
(impulso unitário em $\tau \geq 0$)	$\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
(salto unitário em $\tau \geq 0$)	$u_\tau(t) = u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
(potências inteiras)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
(outras potências, $q \geq 0$)	t^q	$\frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$
(crescimento/decaimento exponencial)	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
(potências com decaimento)	$e^{-\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
(potências com decaimento retardadas)	$e^{-\alpha(t-\tau)} (t - \tau)^n u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s + \alpha)^{n+1}}$
(coseno e seno)	$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$	$\frac{1}{s - i\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(coseno e seno hiperbólicos)	$\cosh(\beta t) \quad \text{e} \quad \sinh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2} \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$
(oscilações amortecidas)	$e^{-\alpha t} e^{i\omega t} = e^{-\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$	$\frac{s + \alpha + i\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

16 Aplicações da transformada de Laplace

1. (função de transferência e resposta impulsiva) Sejam $L = m\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\frac{d}{dt} + \beta$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes e $f(t)$ uma função seccionalmente contínua com crescimento exponencial, e considere a equação diferencial $Lx = f(t)$, ou seja,

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t).$$

- Mostre que a solução do problema de Cauchy

$$Lx = f(t) \quad \text{com} \quad x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

pode ser escrita como

$$x(t) = y(t) + z(t),$$

onde $y(t)$ é a única solução da equação homogénea $Ly = 0$ com condição inicial $y(0) = x_0$ e $\dot{y}(0) = v_0$, e $z(t)$ é a solução particular da equação não-homogénea $Lz = f(t)$ com condição inicial trivial $z(0) = 0$ e $\dot{z}(0) = 0$.

- Mostre que, se $Z(s)$ denota a transformada de Laplace de $z(t)$ e $F(s)$ denota a transformada de Laplace do segundo membro $f(t)$, então

$$Z(s) = \frac{F(s)}{P(s)},$$

onde $P(s) = ms^2 + \alpha s + \beta$ é o polinómio característico do operador diferencial L .

A função $H(s) = 1/P(s)$, que representa o quociente entre a resposta $Z(s)$ e a força externa $F(s)$ (no espaço das frequências), é chamada *função de transferência* do sistema.

- Seja $h(t)$ a transformada de Laplace inversa contínua da função de transferência, ou seja, uma função contínua tal que

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt,$$

chamada *resposta impulsiva* do sistema. Mostre que $h(t)$ é a solução da equação homogénea $Lh = 0$ com condição inicial $h(0) = 0$ e $m\dot{h}(0) = 1$, assim como a solução da equação diferencial formal²⁷ $Lh = \delta(t)$ com condição inicial trivial.

- Deduza que a solução particular $z(t)$ da equação não-homogénea $Lz = r(t)$ com condição inicial trivial $z(0) = 0$ e $z'(0) = 0$ pode ser escrita como

$$z(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

e que portanto a solução do problema de Cauchy é

$$x(t) = y(t) + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

- Prove a fórmula acima sem utilizar a transformada de Laplace.
- Enuncie e mostre um resultato análogo para equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes de ordem arbitrário.

²⁷A função delta de Dirac $\delta(t)$ é definida pela identidade formal

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\delta(t)dt = f(0),$$

onde $f(t)$ é uma função contínua arbitrária. A sua transformada de Laplace é $\int_0^\infty e^{-st}\delta(t)dt = 1$, e a transformada de Laplace de $\delta(t-\tau)$ é $\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-\tau)dt = e^{-\tau s}$. De facto, δ não é uma função, mas um funcional linear $\langle \delta |$ definido no espaço das funções contínuas $|f\rangle$, que associa à função $f(t)$ o valor $\langle \delta | f \rangle = \int_{-\infty}^\infty f(t)\delta(t)dt = f(0)$.

2. (treino) Resolva, usando a transformada de Laplace (por exemplo, os resultados do exercício um!), os seguintes problemas de Cauchy:

$$\dot{x} + x = -e^t \quad \text{com } x(0) = \sqrt{2}$$

$$\ddot{x} + 4x = 3t \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = t - [t] \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \delta(t - t_0) \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1$$

$$\ddot{x} + \pi^2 x = 3(1 - u_{t_0}(t)) \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

3. (oscilações) Considere as equações das *oscilações forçadas* e das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t) \quad \text{e} \quad \ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2 q = f(t).$$

- Determine a função de transferência e a resposta impulsiva dos dois sistemas.
- Determine a solução do problema de Cauchy com condição inicial $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, quando a força é

$$f(t) = f_0\delta(t - t_0) \quad f(t) = f_0 u_{t_0}(t) \quad f(t) = f_0(1 - u_{t_0}(t)) \quad f(t) = f_0 \cos(\gamma t).$$

4. (circuito RL) Considere a equação

$$L\dot{I} + RI = V,$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RL alimentado com tensão $V(t)$.

- Determine a função de transferência do circuito.
- Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a V_0 , é desligado no instante $t_0 > 0$, dada uma corrente inicial (lei de Ohm) $I(0) = V_0/R$.
- Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante $t_0 > 0$ e fornece uma tensão constante $V(t) = V_0 u_{t_0}(t)$ ou alternada $V(t) = V_0 u_{t_0}(t) \sin(\omega t)$, dada uma corrente inicial nula.

5. (circuito RCL) Considere a equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

que descreve a corrente $I(t)$ num circuito RLC alimentado com tensão $V(t)$.

- Determine a função de transferência do circuito e uma fórmula integral para a corrente $I(t)$, dada uma corrente inicial $I(0) = 0$ e $\dot{I}(0) = 0$.
- Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a V_0 , é desligado no instante $t_0 > 0$, dada uma corrente inicial estacionária $I(0) = V_0/R$ e $\dot{I}(0) = 0$.
- Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante $t_0 > 0$ e fornece uma tensão constante $V(t) = V_0 u_{t_0}(t)$ ou alternada $V(t) = V_0 u_{t_0}(t) \sin(\omega t)$, dada uma corrente inicial $I(0) = 0$ e $\dot{I}(0) = 0$.

6. (injecções) A quantidade de medicamento que circula no sangue de um paciente decresce segundo o modelo exponencial $\dot{x} = -\beta x$, com $\beta > 0$. Uma injeção com dose $a > 0$ no instante τ é idealizada como sendo um impulso instantâneo $a\delta_\tau(t)$, e portanto

$$\dot{x} = -\beta x + a\delta_\tau(t).$$

- Determine a quantidade de medicamento $x(t)$ que circula no sangue de um paciente que recebe uma série de injeções nos instantes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, com doses $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente, dada uma quantidade inicial $x(0) = 0$.
7. (telegraph equation) A transmissão de um sinal eléctrico ao longo de uma linha de transmissão é modelada pela *equação do telégrafo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial u}{\partial t} + GRu$$

onde R, L, C e G são a resistência, indutância, capacidade e condutância infinitesimais.

8. (função geradora e grandes desvios) Seja X uma variável aleatória com lei $\mathbf{P}$. A *função geradora* (dos momentos) é a média da variável $e^{\beta X}$, ou seja, a função

$$\Psi(\beta) = \mathbf{E}e^{\beta X} = \int e^{\beta x} \cdot \mathbf{P}(dx),$$

definida num intervalo onde o integral é absolutamente convergente. Em particular, se X é absolutamente contínua com lei $\mathbf{P}(X \in A) = \int_A p(x)dx$, então a função geradora é a transformada de Laplace (bilateral) da densidade de X , pois $\mathbf{E}e^{\beta X} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x} p(x)dx$.

- Mostre que, se a função geradora está definida numa vizinhança da origem, então as suas derivadas em $\beta = 0$ são os momentos da variável, ou seja,

$$\Psi(0) = 1 \quad \Psi'(0) = \mathbf{E}X \quad \Psi''(0) = \mathbf{E}X^2 \quad \dots \quad \Psi^{(k)}(0) = \mathbf{E}X^k$$

- A *energia livre* do sistema (descrito pela variável X) é a função

$$F(\beta) = \log \mathbf{E}e^{\beta X}$$

Se X é limitada, então $F(\beta)$ é analítica e estritamente convexa (ou seja, $F''(\beta) > 0 \forall \beta$). Verifique que $F(0) = 0$ e $F'(0) = \mathbf{E}X$.

- Prove a *desigualdade de Chebyshev exponencial*

$$\mathbf{P}(X \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{\beta X} \geq e^{\beta \varepsilon}) \leq e^{-\beta \varepsilon} \mathbf{E}e^{\beta X} \quad \forall \beta > 0,$$

e deduza a estimacão

$$\mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq e^{-H(\varepsilon)}$$

onde a *entropia* $H(\lambda)$ é a transformada de Legendre da energia livre, ou seja,

$$H(\lambda) = \sup_{\beta > 0} (\beta \lambda - F(\beta))$$

- Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots$ v.a. i.i.d., com a lei de X e média $\mathbf{E}X = m$, e seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Use a desigualdade de Chebyshev exponencial e a independência para mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n/n \geq \lambda) &= \mathbf{P}(e^{\beta S_n} \geq e^{n\beta \lambda}) \\ &\leq e^{-n(\beta \lambda - F(\beta))} \quad \forall \beta > 0, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n/n \geq \lambda) &\leq \inf_{\beta > 0} e^{-n(\beta \lambda - F(\beta))} \\ &\leq e^{-n \cdot \sup_{\beta > 0} (\beta \lambda - F(\beta))} \end{aligned}$$

Deduza que a probabilidade dos “grandes desvios” é

$$\mathbf{P}(|S_n/n - m| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n \cdot \min\{H(m+\varepsilon), H(m-\varepsilon)\}}.$$

- Mostre que a energia livre de uma variável Bernoulli $X \sim B(1, p)$ (ou seja, $\mathbf{P}(X = 1) = p$ e $\mathbf{P}(X = 0) = q = 1 - p$) é

$$F(\beta) = \log(e^\beta p + q)$$

e que a entropia é

$$H(\lambda) = \lambda \log(\lambda/p) + (1 - \lambda) \cdot \log((1 - \lambda)/(1 - p)) \geq 2(\lambda - p)^2,$$

se $p < \lambda < 1$. Deduza que, se S_n é uma variável com lei binomial $B(n, p)$ (ou seja, é uma soma $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ de v.a.i.i.d. com lei $X \sim B(1, p)$), então a probabilidade dos “grandes desvios” é

$$\mathbf{P}(|S_n/n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

9. **(função de partição)** Sejam $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ os possíveis estados de um sistema termodinâmico, e seja e_n o valor da energia do n -ésimo estado. A *função de partição (canónica)* do sistema é

$$Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta e_n}.$$

A interpretação física é que $\beta = 1/k_B T$, onde $k_B \simeq 1.3806505(24) \times 10^{-23}$ joule/kelvin é a constante de Boltzmann, T a temperatura absoluta, e $p_n = e^{-\beta e_n}/Z(\beta)$ é a probabilidade do n -ésimo estado. A *energia livre* do sistema é

$$F(\beta) = \log Z(\beta).$$

- Mostre que a derivada da energia livre é a energia média $\langle E \rangle$, ou seja,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}(\beta) &= \frac{\sum_n e_n e^{-\beta e_n}}{\sum_n e^{-\beta e_n}} \\ &= \langle E \rangle, \end{aligned}$$

- Mostre que a segunda derivada da energia livre é proporcional à capacidade térmica $c_v = \partial \langle E \rangle / \partial T$, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log Z}{\partial \beta^2}(\beta) &= \frac{\sum_n (e_n - \langle E \rangle)^2 e^{-\beta e_n}}{\sum_n e^{-\beta e_n}} \\ &= \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle \\ &= k_B T^2 c_v. \end{aligned}$$

- Mostre que a *entropia* S é proporcional à transformada de Legendre da energia livre, ou seja,

$$\begin{aligned} S &= -k_B \cdot \sum_n p_n \cdot \log(p_n) \\ &= k_B \cdot (\log Z(\beta) + \beta \langle E \rangle) \end{aligned}$$

Referências

- [Ah78] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill 1979.
- [Ap69] Tom M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.
- [Ar78] Vladimir I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, Roma 1978.
- [Ar79] Vladimir I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Edizioni MIR - Editori Riuniti, Roma 1978.
- [Ar85] Vladimir I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR 1985.
- [Ar04] Vladimir I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS 2004.
- [Be87] Richard Beals, *Advanced mathematical analysis: periodic functions and distributions, complex analysis, Laplace transform and applications*, Springer-Verlag 1987.
- [Ber62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics*, McGraw-Hill 1962.
- [BDP92] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley 1992.
- [BC93] James W. Brown and Ruel V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill 1993.
- [BN05] Paolo Butta e Piero Negrini, *Note del corso di Sistemi Dinamici*, Università di Roma “La Sapienza”, 2005.
<http://www.mat.uniroma1.it/people/butta/didattica/index.html>
- [CB90] Ruel V. Churchill and James W. Brown, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill 1990.
- [Dy02] P.P.G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer 2002.
- [Fe68] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, vol. 1 & 2*, John Wiley & Sons, New York 1968
- [Fey63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Fi87] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA 1987.
- [Fo92] Gerald B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematica Society 1992.
- [Ga01] Theodore W. Gamelin, *Complex analysis*, Springer 2001.
- [HK03] B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press (Pure and Applied Mathematics. A series of Monographs and Textbooks), San Diego 1974.
- [KF83] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR 1983.
- [Ió05] Valéria Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA 2005.
- [LL] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Physics*,

new edition?!

- [LC72] M. Laurentiev et B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Éditions de Moscou MIR, 1972.
- [Mc10] Curtis T. McMullen, *Complex Analysis*, Lecture Notes, 2010.
- [MF53] Philip McCord Morse and Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill 1953. Reprinted by Feshbach Publishing 2005.
- [NSS00] R.K. Nagle, E.B. Saff and A.D. Snider, *Fundamentals of differential equations*, Addison-Wesley 2000.
- [Ol07] Peter J. Olver, *Applied Mathematics Lecture Notes*, 2007.
- [O'N99] Peter V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons 1999.
- [Ma99] Jerrold E. Marsden, *Basic complex analysis*, W.H. Freeman 1999.
- [Pi91] Mark A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill 1991
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.
- [Ros84] S.L. Ross, *Differential equations*, John Wiley & Sons, 1984.
- [Ru87] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill 1987.
- [Sc99] Joel L. Schiff, *The Laplace transform: theory and applications*, Springer 1999.
- [Sh96] A.N. Shiryaev, *Probability*, Springer-Verlag, New York 1996.
- [Si91] G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, 1991.
- [Sp76] Murray R. Spiegel, *Análise de Fourier*, McGraw-Hill 1976.
- [Sp71] Murray R. Spiegel, *Transformadas de Laplace*, McGraw-Hill 1971.
- [ST71] A.G. Svesnikov e A.N. Tichonov, *The Theory of Functions of a Complex Variables*, MIR 1971.
- [TS81] A.N. Tichonov, A.A. Samarskij *Equazioni della fisica matematica*, Edizioni MIR, Mosca 1981.