27/11/2009 1º teste	Álgebra linear e geometria analítica	OCV

Instruções: escolha $n \leq$ **10** exercícios e responda em Português.

1. *(2 valores)* Determine uma equação cartesiana da recta que passa pelos pontos $(1,1)$ e $(-3,4)$ de $\mathbb{R}^2$.

   Uma equação cartesiana da recta que passa pelos pontos $(1,1)$ e $(-3,4)$ é
   $$3x + 4y = 7$$

2. *(2 valores)* Determine uma equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $(2,1,0)$ e é perpendicular ao vector $(1,2,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

   Uma equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $(2,1,0)$ e é perpendicular ao vector $(1,2,3)$ é
   $$x + 2y + 3z = 4$$

3. *(2 valores)* Calcule a distância entre o ponto $(7,2)$ e a recta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x - y = 0\}$.

   A distância entre o ponto $(7,2)$ e a recta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x - y = 0\}$ é
   $$5/\sqrt{2}$$

4. *(2 valores)* Calcule a distância entre o ponto $(41,13,-23)$ e o plano x-y (ou seja, o plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z = 0\}$).

   A distância entre o ponto $(41,13,-23)$ e o plano x-y é
   $$23$$

5. *(2 valores)* O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 3x - 5y = 2\}$ é um subsespaço linear de $\mathbb{R}^2$? Justifique a sua resposta.

   O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 3x - 5y = 2\}$ não é um subsespaço linear de $\mathbb{R}^2$, pois
   $$(0,0) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 3x - 5y = 2\}$$

6. *(2 valores)* O conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y = 0 \text{ e } y + z = 0\}$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$? Justifique a sua resposta.

   O conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y = 0 \text{ e } y + z = 0\}$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$. De facto, é a intersecção entre os planos ortogonais aos vectores $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$, ou seja, a recta $\{t(1,-1,1) \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$.

7. *(2 valores)* Os vectores $(1,-2)$ e $(-3,6)$ do plano são linearmente independentes ? Justifique a sua resposta.

   Os vectores $(1,-2)$ e $(-3,6)$ não são linearmente independentes, pois
   $$(-3,6) = -3 \cdot (1,-2)$$

8. *(2 valores)* Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vectores $(0,0,1)$ e $(0,1,1)$.

   Uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vectores $(0,0,1)$ e $(0,1,1)$ é
   $$(0,0,1) \qquad (0,1,1) \qquad \text{e} \qquad (0,1,1) \times (0,0,1) = (1,0,0)$$

9. *(2 valores)* Calcule a área do triângulo de vértices $(2,1)$, $(1,-1)$ e $(0,-3)$.

   A área do triângulo de vértices $(2,1)$, $(1,-1)$ e $(0,-3)$ é
   $$0$$

10. *(2 valores)* Calcule o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}-\mathbf{i}$.

O volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}-\mathbf{i}$ é

$$0$$

11. *(2 valores)* Determine um vector perpendicular ao plano que passa pelos pontos $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,3,0)$ de $\mathbb{R}^3$.

Um vector perpendicular ao plano que passa pelos pontos $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,3,0)$ é

$$(0,0,1)$$

12. *(2 valores)* Determine a dimensão e uma base do subespaço (plano) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x+y+z=0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

A dimensão do subespaço $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x+y+z=0\}$ é 2, e uma base é

$$(1,-1,0)\,,\;(0,1,-1)$$

13. *(2 valores)* Seja $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $L(\mathbf{i})=(1,4)$ e $L(\mathbf{j})=(-2,3)$. Determine $L(5,-1)$.

Usando a linearidade temos que

$$\begin{aligned} L(5,-1) &= L(5\mathbf{i}-\mathbf{j}) = 5L(\mathbf{i})-L(\mathbf{j}) \\ &= 5(1,4)-(-2,3)=(7,17) \end{aligned}$$

14. *(2 valores)* Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y,z)=(2x,3y,0)$.

O núcleo de L é a recta

$$\mathcal{N}(L)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x=0 \text{ e } y=0\}=\{t(0,0,1)\,\text{com}\; t\in\mathbb{R}\}$$

e a imagem de L é o plano

$$\mathcal{I}(L)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z=0\}$$

15. *(2 valores)* Determine o núcleo e imagem da transformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à recta $x=0$.

A tranformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é $T(x,y)=(-x,y)$. O núcleo de T é o subespaço vectorial trivial

$$\mathcal{N}(T)=\{(0,0)\}$$

e a imagem de T é

$$\mathcal{I}(T)=\mathbb{R}^2$$

16. *(2 valores)* Mostre, utilizando a definição, que os vectores (a,b) e (c,d) de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes se e somente se $ad-bc\neq 0$.

Por definição, os vectores (a,b) e (c,d) são linearmente dependentes se existe $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tal que

$$\lambda(a,b)+\mu(c,d)=(0,0) \qquad (*) \qquad .$$

Mas

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda a &=& \mu c \\ \lambda b &=& \mu d \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \lambda\mu(ad-bc)=0$$

e portanto, ou $ad-bc=0$, ou $\lambda=0$ ou $\mu=0$. Mas se $\lambda=0$ então $(c,d)=(0,0)$, e portanto $ad-bc=0$. E se $\mu=0$ então $(a,b)=(0,0)$ e portanto $ad-bc=0$.
Vice-versa, seja $ad-bc=0$. Se $a=b=c=d=0$ então $(*)$ é satisfeita com qualquer λ e qualquer μ . Se pelo menos um dos a,b,c e d é diferente de zero, podemos por $\lambda=d$ e $\mu=-b$ ou $\lambda=c$ e $\mu=-a$ e verificar que, nos dois casos,

$$\lambda(a,b)+\mu(c,d)=(0,0)$$

18/01/2010 2^o teste	Álgebra linear e geometria analítica	OCV

`Instruções: escolha` $n \leq$ **`10`** `exercícios e responda em Português.`

1. *(2 valores)* Determine a matriz 2×2 que define a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à recta $y = -x$.

   A transformação é $T(x, y) = (-y, -x)$, logo a matriz é
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *(2 valores)* Calcule A^0, A^1, A^2, ... , A^n, ..., quando
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *(2 valores)* Diga se $L(x, y) = (x + y, x - y)$ é injectiva e, caso afirmativo, determine a inversa.

   A transformação $L(x, y) = (x + y, x - y)$ é injectiva e a sua inversa é $L^{-1}(a, b) = ((a + b)/2, (a - b)/2)$.

4. *(2 valores)* Diga se a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   é regular e, caso afirmativo, calcule a inversa.

   A matriz A é regular e a sua inversa é
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *(2 valores)* Estude o seguinte sistema (ou seja, diga se é possível e, caso afirmativo, determine o espaço das soluções)
$$\begin{cases} 4x - 7y + 3z &= 0 \\ x + y &= 0 \\ y - 6z &= 0 \end{cases}$$
   O sistema é homogéneo e a matriz do sistema,
$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$
   é regular (pois tem determinante $\neq 0$), logo o sistema é possível e a sua única solução é a solução trivial $(0, 0, 0)$.

6. *(2 valores)* Resolva o sistema
$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - 4y + 6z &= 10 \end{cases}$$
   utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

   A solução, única, é o ponto $(124, 75, 31)$. De facto,
$$\begin{cases} x & -2y & +z & = & 5 \\ 2x & -5y & +4z & = & -3 \\ x & -4y & +6z & = & 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x & -2y & +z & = & 5 \\ & y & -2z & = & 13 \\ & 2y & -5z & = & -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x & -2y & +z & = & 5 \\ & y & -2z & = & 13 \\ & & z & = & 31 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x & & & = & 5 + 2 \cdot (13 + 2 \cdot 31) - 31 \\ & y & & = & 13 + 2 \cdot 31 \\ & & z & = & 31 \end{cases} \quad \begin{cases} x & & & = & 124 \\ & y & & = & 75 \\ & & z & = & 31 \end{cases}$$

7. *(2 valores)* Determine o espaço das soluções do sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+3z+4w & = & 5 \\ 6x+7y+8z+9w & = & 10 \\ 11x+12y+13z+14w & = & 15 \end{array}\right.$$

O espaço das soluções é o plano afim

$$\{(-3+z+2w, 4-2z-3w, z, w) \quad \text{com } \ z, w \in \mathbb{R}\}$$

De facto, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{llllcl} x & +2y & +3z & +4w & = & 5 \\ 6x & +7y & +8z & +9w & = & 10 \\ 11x & +12y & +13z & +14w & = & 15 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llllcl} x & +2y & +3z & +4w & = & 5 \\ & -5y & -10z & -15w & = & -20 \\ & -10y & -20z & -30w & = & -40 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllcl} x & +2y & +3z & +4w & = & 5 \\ & -5y & -10z & -15w & = & -20 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llcl} x & +2y & = & 5-3z-4w \\ & y & = & 4-2z-3w \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llcl} x & & = & -3+z+2w \\ & y & = & 4-2z-3w \end{array}\right.$$

8. *(2 valores)* Dê um exemplo de um sistema impossível de 2 equações lineares com 2 incógnitas.

O sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 6 \\ x+y & = & 10^{23} \end{array}\right.$$

9. *(2 valores)* Calcule o determinante de $-3A$ sabendo que A é uma matriz 4×4 com determinante $\det A = 2$.

O determinante é 162, pois

$$\det(-3A) = (-3)^4 \cdot \det A = 162\,.$$

10. *(2 valores)* Verdadeiro ou falso? Dê uma demonstração ou um contra-exemplo.

$$\det(A+B) = \det A + \det B \quad ?$$

Falso. Por exemplo

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10^{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10^{23} \end{pmatrix}$$

mas

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10^{23} \end{pmatrix} = 0 \neq 6 \cdot 10^{23} = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10^{23} \end{pmatrix}$$

11. *(2 valores)* Calcule a matriz dos complementos algébricos da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz dos complementos algébricos é

$$\text{Cal} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. *(2 valores)* Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

O determinante é -69.

13. *(2 valores)* Determine valores e vectores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à recta $y = 2x$.

Os valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, e os vectores próprios associados são $\mathbf{v}_1 = t(1, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = t(2, -1)$, respectivamente, com $t \neq 0$.

14. *(2 valores)* Determine valores e vectores próprios da transformação

$$L(x, y, z) = (0, y, -z)$$

Os valores próprios são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$, e os vectores próprios associados são $\mathbf{v}_1 = t(1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = t(0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = t(0, 0, 1)$, respectivamente, com $t \neq 0$.

15. *(2 valores)* Determine valores e vectores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são $\lambda_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ e os vectores próprios associados são $\mathbf{v}_\pm = t\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 1\right)$, com $t \neq 0$, respectivamente.

16. *(2 valores)* As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são semelhantes? Justifique a sua resposta.

As matrizes não são semelhantes, pois $\det A = 4 \neq 1 = \det B$.