15/02/2010 recurso	Álgebra linear e geometria analítica	OCV

`Instruções: responda em Português.`

1. *(2 valores)* Considere os pontos $\mathbf{a} = (1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1)$ do plano $\mathbb{R}^2$.

   - Determine uma equação cartesiana da recta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.
   - Determine um vector não nulo perpendicular à recta $\mathcal{R}$.

   Uma equação cartesiana da recta $\mathcal{R}$ é $x + y = 1$.
   Um vector não nulo perpendicular à recta $\mathcal{R}$ é $\mathbf{n} = (1, 1)$.

2. *(2 valores)* Considere os vectores $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 5, 3)$ e $\mathbf{c} = (7, -1, 3)$ do espaço $\mathbb{R}^3$.

   - Determine uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.
   - Determine a distância entre o ponto $(-3, 2, -5)$ e o plano $\mathcal{P}$.

   Uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ é $z = 3$.
   A distância entre o ponto $(-3, 2, -5)$ e o plano $\mathcal{P}$ é 8.

3. *(2 valores)* Considere os vectores $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ do espaço $\mathbb{R}^3$.

   - Diga se os vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes.
   - Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

   Os vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes, pois $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -1, 1) \neq \mathbf{0}$.
   Uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é formada pelos vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $(1, -1, 1)$.

4. *(2 valores)* Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   $$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y = 0\} \qquad \text{e} \qquad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } y + z = 0\}.$$

   - Determine a dimensão e uma base de A.
   - Determine a intersecção $A \cap B$.

   A dimensão do subespaço A é 2, e uma base é formada pelos vectores $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
   A intersecção $A \cap B$ é a recta $\{t(1, -1, 1) \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$.

5. *(2 valores)* Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$L(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

   - Determine o núcleo de L e a dimensão da imagem de L.
   - Diga se L é injectiva e, caso afirmativo, determine a inversa.

   O núcleo de L é o subespaço trivial $\mathcal{N}(L) = \{(0, 0, 0)\}$, logo a dimensão da imagem de L é 3.
   A transformação L é injectiva, ou seja, invertível, e a sua inversa é $L^{-1}(a, b, c) = (a, b - a, c - b)$.

.

6. *(2 valores)* Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcule a matriz AA^t.
- Calcule o determinante da matriz A^tA.

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\det(A^tA) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

7. *(2 valores)* Verdadeiro ou falso? Dê uma demonstração ou um contra-exemplo.

- Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ então o produto vectorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.
- Se A e B são matrizes $n \times n$ regulares então também o produto AB é regular.

Falso: por exemplo, se $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{i}$ então $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
Verdadeiro: se $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$ então $\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$.

8. *(2 valores)* Determine o espaço das soluções do sistema
$$\begin{cases} y + z & = 1 \\ x + 2y - z & = 3 \\ x + y + z & = 1 \end{cases}$$

O sistema é determinato e a sua solução é o vector $(0, 4/3, -1/3)$.

9. *(2 valores)* Dê exemplos de

- um sistema linear de 2 equações com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja um plano.
- um sistema linear de 2 equações com uma única solução.

Um sistema linear de 2 equações com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja um plano é
$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 3x + 3y + 3z & = 0 \end{cases}.$$
Um sistema linear de 2 equações com uma única solução é
$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ x - y & = 0 \end{cases}.$$

10. *(2 valores)* Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pela matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Determine os valores e os vectores próprios de L.
- Diga se matriz A é diagonalizável e, caso afirmativo, determine uma matriz diagonal semelhante.

Os valores próprios da transformação L são $\lambda_\pm = \pm 1$ e os vectores próprios associados são $\mathbf{v}_\pm = t\,(1, \mp 1)$, com $t \neq 0$, respectivamente.
A matriz A é diagonalizável, sendo semelhante à matriz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
que é a matriz da transformação L relativamente à base formada pelos vectores $\mathbf{v}_+$ e $\mathbf{v}_-$.