16/11/2018 1º teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica EE	MIEEICOM

Nome ....**Nº** ....
`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Sejam $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 2, 1)$. Calcule as componentes de $3A - 5B$ e o produto escalar $A \cdot B$.

$$3A - 5B = (-12, -4, 4) \qquad A \cdot B = 10$$

2. *(2 valores)* Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Mostre que todo vetor $V = (\alpha, \beta)$ pode ser expresso na forma $V = xA + yB$, com x e y coeficientes reais. Determine x e y em função de α e β.

Basta escolher

$$x = \frac{3\alpha - \beta}{5} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{2\beta - \alpha}{5}\,.$$

3. *(2 valores)* Sejam $A = (2, 1, -1)$ e $B = (1, -1, 2)$. Determine, se existir, um vetor não nulo C tal que $A \cdot C = B \cdot C = 0$.

Por exemplo,

$$C = A \times B = (1, -5, -3)\,.$$

4. *(2 valores)* Sejam $V = (1, 2, 2)$ e $R = (3, -4, 5)$. Determine um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $R = tV + W$ com W ortogonal a V.

$$t = \frac{R \cdot V}{\|V\|^2} = 5/9\,.$$

5. *(2 valores)* Determine para quais valores de t os vetores $A = (1+t, 1-t)$ e $B = (1-t, 1+t)$ são linearmente independentes.

Os vetores são idependentes quando

$$\det \begin{pmatrix} 1+t & 1-t \\ 1-t & 1+t \end{pmatrix} = 4t \neq 0\,,$$

ou seja, quando $t \neq 0$.

6. *(2 valores)* Calcule a distância entre o ponto $P = (0, 0)$ e a reta de equação cartesiana $x - y = 2$.

Um vetor normal à reta é $N = (1, -1)$, e um ponto da reta é $P = (1, -1)$, portanto a distância é

$$d = \frac{|N \cdot P|}{\|N\|} = \sqrt{2}\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule a área do paralelogramo de lados $A = (3, 1)$ e $B = (2, 2)$.

$$\left| \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 4\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule a área do triângulo de vértices $A = (0, 1, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (3, 0, 1)$.

$$\frac{1}{2}\,\|(B-A) \times (C-A)\| = \sqrt{7/2}\,.$$

9. *(2 valores)* Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}+\mathbf{i}$.

$$|(\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{k}+\mathbf{i})| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2\,.$$

10. *(2 valores)* Determine uma equação cartesiana do plano passando por $P=(1,2,3)$ e ortogonal ao vetor $N=(1,2,1)$.

$$x+2y+z=8\,.$$

4/1/2019 2^o teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica EE	MIEEICOM

Nome ....**N^o** ....
`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (x - z, 0, x - y)$. Determine o espaço nulo, a imagem, a nulidade e a ordem.

   O espaço nulo é a reta $x = y = z$ e a imagem é o plano $y = 0$. A nulidade é 1 e a ordem é 2.

2. *(2 valores)* Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, y, z)$. Determine se T é invertível. Caso afirmativo, determine a transformação inversa.

   É invertível, e a inversa é $T^{-1}(x, y, z) = (x - y - z, y, z)$.

3. *(2 valores)* Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{i}) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $T(\mathbf{j}) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Determine a matriz que representa T relativamente à base canónica e o valor de $T(3, 4)$.

   A matriz que representa T é
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   e $T(3, 4) = (15, 1)$.

4. *(2 valores)* Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $T(x, y) = (x - y, 2x + y, x + y)$ e $L(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$. Calcule a matriz da composição $S = LT$ relativamente à base canónica.

   A matriz que representa $S = LT$ é
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. *(2 valores)* Sejam
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Calcule B^2 e $AB - BA$.
   $$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. *(2 valores)* Calcule os determinantes das matrizes A e A^2, com
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
   $\mathrm{Det}A = 24$ e $\mathrm{Det}A^2 = 24^2$.

7. *(2 valores)* Determine, se existir, a inversa da matriz
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. *(2 valores)* Determine as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x+y+2z &= 0 \\ 3x-y-z &= 3 \\ 2x+5y+3z &= 4 \end{cases}.$$

A única solução é $(x,y,z) = (1,1,-1)$.

9. *(2 valores)* Dê um exemplo de um sistema de 3 equações lineares que seja possível e indeterminado. Determine as suas soluções.

Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}.$$

cuja soluções são os pontos do plano $x+y+z=0$.

10. *(2 valores)* Determine valores e vetores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O único valor próprio é 1, e os únicos vetores próprios são os vetores não nulos proporcionais a $(1,0)$.