23/1/2019 recurso	Álgebra Linear e Geometria Analítica EE	MIEEICOM

Nome ....**N°** ....

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Determine uma equação cartesiana do plano passando por $P = (1, 2, 3)$ e gerado pelos vetores $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$, e a sua distância da origem.

   Um vetor normal é $N = A \times B = (1, -1, 1)$. De consequência, uma equação cartesiana do plano é
   $$x - y + z = 2\,.$$
   A distância da origem é $2/\sqrt{3}$.

2. *(2 valores)* Uma reta passa por $P = (1, 1, 1)$ e é paralela ao vetor $A = (1, 2, 3)$. Outra reta passa por $Q = (2, 1, 0)$ e é paralela ao vetor $B = (3, 8, 13)$. Determine o ponto de interseção entre as duas retas.

   O ponto
   $$(5, 9, 13)\,.$$

3. *(2 valores)* Determine para quais valores do parâmetro t os vetores $A = (t, 1, 0)$, $B = (1, t, 1)$ e $C = (0, 1, t)$ são linearmente independentes.

   O produto misto é $A \cdot B \times C = t\,(t^2 - 2)$. Portanto os vetores são linearmente independentes se t é diferente de 0 e de $\pm\sqrt{2}$.

4. *(2 valores)* Calcule a área do triângulo de vértices $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 3)$ e $C = (1, 3, 4)$.

   A norma do produto vetorial $(B - A) \times (C - A) = (1, -1, 1)$ é $\sqrt{3}$. Portanto a área do triângulo é $\sqrt{3}/2$.

5. *(2 valores)* Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (x, x + y + z, 0)$. Determine o espaço nulo, a imagem, a nulidade e a ordem de L.

   O espaço nulo é a reta $\mathbb{R}(0, 1, -1)$, a imagem é o plano $z = 0$, a nulidade é 1 e a ordem é 2.

6. *(2 valores)* Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $T(\mathbf{j}) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Determine a matriz que representa T relativamente à base canónica e determine, se existir, a sua inversa.

   A matriz que representa T é
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
   e a sua inversa é
   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. *(2 valores)* Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $T(x, y) = (x + y, 3x - y, y - 2x)$ e $L(x, y, z) = (y - z, x + y)$. Calcule as matrizes das composições LT e TL relativamente às bases canónicas.

   A matriz que representa LT é
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$
   e a matriz que representa TL é
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. *(2 valores)* Calcule os determinantes das matrizes A e A^{-1}, com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det A = 10$, e portanto $\det A^{-1} = 0.1$.

9. *(2 valores)* Determine as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} 2x - 7y + 8z & = 3 \\ x + 4y - 11z & = -6 \\ x - y - z & = -1 \end{cases}.$$

Os pontos

$$(1, 1, 1) + t\,(3, 2, 1)\,.$$

com $t \in \mathbb{R}$.

10. *(2 valores)* Determine valores e vetores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são 1 e 3, e uns vetores próprios são $(1, -1)$ e $(0, 1)$, respetivamente.