Álgebra Linear e Geometria Analítica (para Ciências)

FIS
ENGFIS

Nome ....**Nº** ....

☐ **ENGFIS**
☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{a} = (2, 1)$ e $\mathbf{b} = (3, 5)$. Existem escalares t e s tais que $t\mathbf{a} + s\mathbf{b} = (5, -8)$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

2. *(1 valor)* Os vetores $\mathbf{a} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k} - \mathbf{i}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ de $\mathbb{R}^3$ são independentes.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

3. *(1 valor)* Se o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfaz $\mathbf{v} \times \mathbf{i} = 0$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{j} = 0$, então é proporcional a $\mathbf{k}$. (Enganei-me. A pergunta original era "...satisfaz $\mathbf{v} \times \mathbf{k} = 0$ então ...", e ficou misturada com outra "...então $\mathbf{v}$ é o vetor nulo" num cut & paste mal feito. Assim como ficou, a resposta correta é também Verdadeiro, mas apenas porque $\mathbf{v}$ é necessariamente o vetor nulo, que é proporcional a $\mathbf{k}$ por razões pouco interessantes. Peço desculpa)

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

4. *(1 valor)* Se os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ são ortogonais, então $\|\mathbf{a} + t\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

5. *(1 valor)* Toda a base de $\mathbb{R}^n$ é formada por n vetores.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

6. *(1 valor)* A reunião $A \cup B$ de dois subespaços vetoriais A e B de $\mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

7. *(1 valor)* Se o espaço nulo de uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é trivial (ou seja, apenas contém o vetor nulo), então a transformação é injetiva.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

8. *(1 valor)* Existe uma transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ invertível (ou seja, injetiva e sobrejetiva).

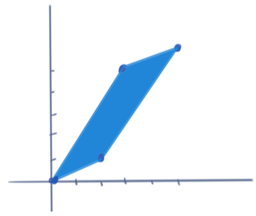
   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

9. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{c} = (1, 1, 0)$. Determine, se existirem, escalares s, t e u tais que $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c} = (-2, 3, -1)$.

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} = (-2, 3, -1)$$

10. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{a} = (2, 1)$ e $\mathbf{b} = (3, 5)$. Esboce a região do plano

$$R = \{t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \ : \ 0 \le t \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le s \le 1\}$$



11. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 1)$. Determine um escalar λ tal que $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{a}$ com $\mathbf{a}$ ortogonal a $\mathbf{v}$.

$$\lambda = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = 5/7\,.$$

12. *(1 valor)* Determine uma equação cartesiana do plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando por $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$ e ortogonal ao vetor $\mathbf{n} = (4, 3, -5)$.

$$4x + 3y - 5z = 1\,.$$

13. *(1 valor)* Calcule a distância entre o ponto $\mathbf{b} = (4, -1, 2)$ e o plano P do exercício 12.

$$\text{dist}(\mathbf{b}, P) = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{n}\|} = \sqrt{2}/5\,.$$

14. *(1 valor)* Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{b} = (1, 3, -2)$.

Por exemplo, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 3, 5)$.

15. *(1 valor)* Calcule a área do triângulo de vértices $\mathbf{a} = (3, 1)$ e $\mathbf{b} = (2, 2)$ e $\mathbf{c} = (1, 5)$, o conjunto $C = \{\ t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + u\mathbf{c} \ : \ s \ge 0\,,\ t \ge 0\,,\ u \ge 0\,,\ s + t + u = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

$$\frac{1}{2}\left|\text{Det}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right| = 1\,.$$

16. *(1 valor)* Calcule a área do triângulo de vértices $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, o conjunto $\Delta = \{\ t\mathbf{i} + s\mathbf{j} + u\mathbf{k} \ : \ s \ge 0\,,\ t \ge 0\,,\ u \ge 0\,,\ s + t + u = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

$$\frac{1}{2}\,\|(\mathbf{k} - \mathbf{i}) \times (\mathbf{j} - \mathbf{i})\| = \frac{1}{2}\,\| - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

17. *(1 valor)* Calcule o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ e $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \left|\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right| = 85\,.$$

18. *(1 valor)* Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $R(\mathbf{i}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ e $R(\mathbf{j}) = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$. Determine $R^3(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$.

R é uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/6$, portanto R^3 é uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/2$, que envia $R^3(\mathbf{i}) = \mathbf{j}$ e $R^3(\mathbf{j}) = -\mathbf{i}$. Consequentemente,

$$R^3(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

19. *(1 valor)* Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (x+y+z, x+y, z)$. Determine o espaço nulo, a imagem, a nulidade e a ordem de L.

   O espaço nulo é a reta $\mathbb{R}(1, -1, 0)$ e a imagem é o plano $x - y - z = 0$. A nulidade é 1 e a ordem é 2.

20. *(1 valor)* Seja $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(x, y, z) = (y+z, z+x, x+y)$. Diga se M é invertível. Caso afirmativo, determine a transformação inversa.

   É invertível, e a inversa é $M^{-1}(x, y, z) = (-x/2 + y/2 + z/2, x/2 - y/2 + z/2, x/2 + y/2 - z/2)$.

25/1/2022 2º teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica (para Ciências)	FIS ENGFIS

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se realmente necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(1 valor)* Se o sistema linear $AX = B$ admite duas soluções diferentes, então admite infinitas soluções.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

2. *(1 valor)* Existem infinitas matrizes quadradas 2×2 A tais que $A^2 = I$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

3. *(1 valor)* Se A e B são matrizes quadradas $n \times n$ então $\text{Det}(A + B) = \text{Det}A + \text{Det}B$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

4. *(1 valor)* Se a matriz quadrada N é nilpotente, ou seja, $N^k = 0$ para algum inteiro $k \geq 1$, então $\text{Det}N = 0$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

5. *(1 valor)* Se 0 é um valor próprio do operador $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ então L não é invertível.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

6. *(1 valor)* Todo operador $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admite pelo menos um valor próprio.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

7. *(1 valor)* Se λ é um valor próprio do operador L, então $\lambda^2 - \lambda$ é um valor próprio do operador $L^2 - L$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

8. *(1 valor)* A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   é diagonalizável.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

9. *(1 valor)* Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{i}) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $T(\mathbf{j}) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e $T(\mathbf{k}) = 2\mathbf{j}$. Determine a matriz que representa T relativamente às bases canónicas e o valor de $T(1, 1, 1)$.

   A matriz que representa T é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   e $T(1, 1, 1) = (0, 2)$.

10. *(1 valor)* Sejam $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $M(x, y) = (x - y, 2x + y, x - 3y)$ e $L(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y + z)$. Calcule as matrizes das composições $S = LM$ e $T = ML$ relativamente às bases canónicas.

    A matriz que representa $S = LM$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

    e a matriz que representa $T = ML$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

11. *(1 valor)* Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador definido por $L(x,y) = (x+y, x+y)$. Determine a matriz que define L relativamente à base formada por $\mathbf{v}_1 = (2,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,1)$.

   A matriz que representa L nesta base é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

12. *(1 valor)* Determine, se existir, a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. *(1 valor)* Calcule os determinantes das matrizes B e B^3, se

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   $\mathrm{Det}B = -4$ e $\mathrm{Det}(B^3) = -64$.

14. *(1 valor)* Determine um sistema linear definido por uma matriz em escada de linhas que seja equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 2 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ 3x + y - 3z &= -5 \end{cases}.$$

   e calcule as suas soluções.

   Um sistema equivalente é

$$\begin{cases} x \quad -2y \quad +z &= 2 \\ \quad\quad 5y \quad -4z &= -3 \\ \quad\quad\quad\quad -2z &= -34 \end{cases}.$$

   e a única solução é $(x,y,z) = (11, 13, 17)$.

15. *(1 valor)* Dê um exemplo de um sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas cujo espaço das soluções seja uma reta. Determine as suas soluções.

   Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}.$$

   cuja soluções são os pontos da reta $\mathbb{R}(0,0,1)$.

16. *(1 valor)* Seja $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ o espaço linear real dos polinómios $f(t) = a + bt + ct^2$ com coeficientes reais e grau ≤ 2. Determine a matriz do operador derivação $D : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$, definido por $(Df)(t) = f'(t)$, relativamente à base formada por 1, t, e $(t^2-1)/2$.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17. *(1 valor)* Determine os valores e os vetores próprios do operador $D : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ definido no exercício 16.

   O único valor próprio é $\lambda = 0$, e os vetores próprios são proporcionais ao polinómio constante $f(t) = 1$.

18. *(1 valor)* Seja B uma matriz real 3×3 com valores próprios 2, 3 e 4. Calcule o determinante e o traço da matriz B^{-1}.

   Os valores próprios de A^{-1} são 1/2, 1/3 e 1/4, o determinante é $\mathrm{Det}(A^{-1}) = 1/\mathrm{Det}A = 1/24$ e o traço é $\mathrm{Tr}A^{-1} = 13/12$.

19. *(1 valor)* Determine os valores próprios e os vetores próprios do operador $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido na base canónica pela matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são 2 e 3, e os vetores próprios são proporcionais a $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 2)$, respetivamente.

20. *(1 valor)* Diagonalize, se possível, a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ou seja, determine uma matriz invertível U tal que $C = U^{-1}\Lambda U$ com Λ matriz diagonal.

$$C = U^{-1}\Lambda U \qquad \text{se} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$