8/2/2022 recurso	Álgebra Linear e Geometria Analítica (para Ciências)	FIS ENGFIS

Nome ....**N^o** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(1 valor)* Os vetores $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k} - \mathbf{i}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ de $\mathbb{R}^3$ são independentes.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

2. *(1 valor)* Se o espaço nulo de uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é trivial (ou seja, apenas contém o vetor nulo), então a transformação é invertível.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

3. *(1 valor)* Se A é uma matriz quadrada invertível, então o sistema linear $AX = B$ admite infinitas soluções.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

4. *(1 valor)* Existem matrizes quadradas 2×2 reais A tais que $A^2 = -I$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

5. *(1 valor)* Se A é uma matriz quadrada então $\mathrm{Det}(3A) = 3\,\mathrm{Det}A$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

6. *(1 valor)* Se λ é um valor próprio do operador invertível $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, então $1/\lambda$ é um valor próprio do operador inverso L^{-1}.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

7. *(1 valor)* Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores próprios do operador L, então $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é também um vetor próprio do operador L.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

8. *(1 valor)* A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   é diagonalizável.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

9. *(1 valor)* Sejam $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$. Determine um escalar λ tal que $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{a}$ com $\mathbf{a}$ ortogonal a $\mathbf{v}$.

$$\lambda = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1/2\,.$$

10. *(1 valor)* Determine uma equação cartesiana do plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando por $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ e ortogonal ao vetor $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$.

$$x - y + z = 2\,.$$

11. *(1 valor)* Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$.

   Por exemplo, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -1, 1)$.

12. *(1 valor)* Calcule o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \left| \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2\,.$$

13. *(1 valor)* Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (x, x+y, x+y+z)$. Determine o espaço nulo, a imagem, a nulidade e a ordem de L.

   O espaço nulo é o espaço trivial $\{\,0\}$, e a imagem é $\mathbb{R}^3$. A nulidade é 0 e a ordem é 3.

14. *(1 valor)* Sejam $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares definidas por $M(x, y, z) = (x-y+z, y+z)$ e $L(x, y) = (x+y, x, x-y)$. Calcule as matrizes das composições $S = LM$ e $T = ML$ relativamente às bases canónicas.

   A matriz que representa $S = LM$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   e a matriz que representa $T = ML$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

15. *(1 valor)* Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador definido por $L(x, y) = (x - y, x + y)$. Determine a matriz que define L relativamente à base formada por $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 3)$.

   A matriz que representa L nesta base é

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

16. *(1 valor)* Determine, se existir, a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

17. *(1 valor)* Calcule os determinantes das matrizes B e B^2, se

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

   $\mathrm{Det} B = 15$ e $\mathrm{Det}(B^2) = 15^2$.

18. *(1 valor)* Determine um sistema linear definido por uma matriz em escada de linhas que seja equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x - y + z & = 2 \\ 2x + y - 7z & = 1 \\ 3x - 2y - 3z & = 5 \end{cases}.$$

   e calcule as suas soluções.

   Um sistema equivalente é

$$\begin{cases} x \quad -y \quad +z & = 2 \\ \qquad\ \ y \quad -6z & = -1 \\ \qquad\qquad\quad 9z & = 0 \end{cases}.$$

   e a única solução é $(x, y, z) = (1, -1, 0)$.

19. *(1 valor)* Seja $\mathbf{V}$ o espaço linear real dos quase-polinómios de grau ≤ 2 e expoente 3, ou seja, das funções $f(t) = (a + bt + ct^2)e^{3t}$ com coeficientes a, b, c reais. Determine a matriz do operador derivação $D : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, definido por $(Df)(t) = f'(t)$, relativamente à base formada por e^{3t}, te^{3t}, e $(t^2/2)\, e^{3t}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

20. *(1 valor)* Diagonalize, se possível, a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

ou seja, determine uma matriz invertível U e uma mariz diagonal Λ tais que $C = U^{-1}\Lambda U$.

$$C = U^{-1}\Lambda U \qquad \text{se} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$