5/11/2013 1º teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica EC	☐ ENGFIS ☐ FIS

Nome .... **Nº** ....

1. *(2 valores)* Sejam $A = (0,1)$ e $B = (1,1)$. É verdadeiro ou falso que cada vetor $V = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pode ser expresso na forma $V = xA + yB$, com x e y coeficientes reais? Justifique.

   É verdadeiro, basta escolher $y = \alpha$ e $x = \beta - \alpha$.

2. *(2 valores)* Determine a interseção entre o plano de equação cartesiana $x + y + z = 5$ e a reta passando pelo ponto $P = (1,1,0)$ e paralela ao vetor $V = (0,1,2)$.

   O ponto $(1,2,2)$, pois $1 + 2 + 2 = 5$ e $P + V = (1,2,2)$.

3. *(2 valores)* Calcule o produto escalar $A \cdot B$ sabendo que $\|A + B\| = 1$ e $\|A - B\| = 1$.

$$A \cdot B = \frac{1}{4}\left(\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2\right) = 0\,.$$

4. *(2 valores)* Calcule a distância entre o ponto $P = (0,0)$ e a reta de equação cartesiana $x + y = 2$.

   Uma equação paramétrica da reta $x + y = 2$ é $R(t) = (0,2) + t(1,-1)$. O quadrado da norma de $R(t) - P$ é a função $\|R(t)\|^2 = 2t^2 - 4t + 4$, que é mínima quando $t = 1$. Portanto a distância é

$$\|R(1)\| = \sqrt{2}\,.$$

5. *(2 valores)* Sejam $V = (1,2,2)$ e $R = (3,-4,5)$. Determine um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $R = tV + W$ com W ortogonal a V.

   O vetor $W = R - tV$ é ortogonal a V se $(R - tV) \cdot V = 0$, ou seja, se

$$t = \frac{R \cdot V}{\|V\|^2} = 5/9\,.$$

6. *(2 valores)* Determine uma equação cartesiana do plano passando pelos pontos $A = (1,1,1)$, $B = (0,1,2)$ e $C = (3,2,0)$.

   Um vetor normal ao plano é $N = (C - A) \times (B - A) = (1,-1,1)$. Uma equação cartesiana do plano é $N \cdot (x,y,z) = N \cdot A$, ou seja,

$$x - y + z = 1\,.$$

7. *(2 valores)* Sejam $A = (2,1)$ e $B = (1,3)$. Esboce a região do plano formada pelos pontos $tA + sB$ com $0 \le t \le 1$ e $0 \le s \le 1$, e calcule a sua área.

   A região é o paralelogramo de lados A e B, e a sua área é

$$\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 5\,.$$

8. *(2 valores)* Os vetores $A = (1,2,3)$, $B = (2,3,1)$ e $C = (3,1,2)$ são linearmente independentes? Justifique.

   Sim, pois o produto misto

$$A \cdot (B \times C) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -18$$

   é diferente de zero.

9. *(2 valores)* Calcule a área do triângulo de vértices $A = (0,1,1)$, $B = (2,1,0)$ e $C = (3,0,1)$.

A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo de lados $C - A$ e $B - A$, que é igual ao comprimento do produto vetorial $(C - A) \times (B - A) = (1,3,2)$. Portanto, a área do triângulo é

$$\sqrt{7/2}\,.$$

10. *(2 valores)* Sejam $A = (1,2,3)$, $B = (2,3,1)$ e $C = (3,1,2)$. Determine coeficientes x, y e z tais que

$$x\,A + y\,B + z\,C = (6,6,6)$$

$$x = 1\,, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad z = 1\,.$$

10/01/2014 2^o teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica EC	☐ ENGFIS ☐ FIS

Nome .... **N^o** ....

1. *(2 valores)* Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = (3,2)$ e $T(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = (1,0)$. Determine a matriz que representa T relativamente à base canónica e o valor de $T(3,4)$.

   A matriz de T é
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   e $T(3,4) = (10,7)$.

2. *(2 valores)* Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $T(x,y) = (x+y, x+2y, 2x-y)$ e $L(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z)$. Calcule as matrizes da composição $S = LT$ e do seu quadrado S^2.
   $$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

3. *(2 valores)* Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja o plano $x+y+z=0$, e determine a sua imagem.

   Por exemplo, $T(x,y,z) = (x+y+z, 0)$. Então a imagem de T é a reta $y = 0$.

4. *(2 valores)* Dê um exemplo de duas matrizes quadradas A e B que não comutam, ou seja tais que $AB \neq BA$, e um exemplo de duas matrizes quadradas C e D que comutam, ou seja, tais que $CD = DC$.
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   não comutam, e
   $$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
   comutam.

5. *(2 valores)* Diga se a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $L(x,y,z) = (x, x+2y, x+2y+3z)$ é injetiva (ou seja, biunívoca) e, caso afirmativo, determine a transformação inversa L^{-1}.

   A transformação é injetiva e a sua inversa é $L^{-1}(a,b,c) = (a, (b-a)/2, (c-b)/3)$.

6. *(2 valores)* Calcule o determinante da matriz
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
   e da matriz A^3.

   O determinante de A é $\det(A) = -6$ e portanto $\det(A^3) = -216$.

7. *(2 valores)* Determine as soluções do sistema linear
   $$\begin{cases} 3x - 3y + 3z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x - y + 5z &= 13 \end{cases}$$

   As soluções são os pontos da reta $(11,9,0) + \mathbb{R}\,(4,3,-1)$.

8. *(2 valores)* Determine valores e vetores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são 1 e 3. Um vetor próprio com valor próprio 1 é $(1, 0, 0)$. Um vetor próprio com valor próprio 3 é $(0, 0, 1)$.

9. *(2 valores)* Seja A uma matriz 3×3 invertível com valores próprios 1, 2 e 3. Determine os valores próprios, o determinante e o traço de A^{-1}.

Os valores próprios de A^{-1} são 1, 1/2 e 1/3, o determinante é $\det(A^{-1}) = 1/6$ e o traço é $\mathrm{tr}(A^{-1}) = 11/6$.

10. *(2 valores)* Determine a matriz que representa a reflexão $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na reta $2x - 3y = 0$ relativamente à base canónica.

A matriz da transformação T relativamente à base $\mathbf{b}_1 = (3, 2)$ e $\mathbf{b}_2 = (-2, 3)$ é

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto, se U denota a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$, a matriz A que representa T relativamente à base canónica é

$$A = UA'U^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/13 & 2/13 \\ -2/13 & 3/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix} .$$