27/11/2012 1^o teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica EC	3801R2 FÍSICA

Nome .... **N^o** ....

1. *(2 valores)* Um ponto move-se no espaço $\mathbb{R}^3$ de tal maneira que no instante t está na posição $\mathbf{r}(t) = (1-t, 2-2t, 3-3t)$. Determine o instante t em que o ponto estará no plano $x+y+z=1$.

   O ponto $\mathbf{r}(t)$ está no plano $x+y+y=1$ se $1-t+2-2t+3-3t=1$, ou seja, se $6-6t=1$, e portanto no instante
   $$t = 5/6$$

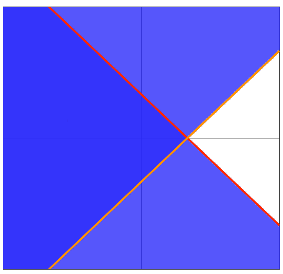
2. *(2 valores)* Calcule $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ sabendo que os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são unitários, ou seja, que $\|\mathbf{x}\| = 1$ e $\|\mathbf{y}\| = 1$. .

   $$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = 4$$

3. *(2 valores)* Calcule o coseno do ângulo entre a reta que passa pelos pontos $(1,0)$ e $(2,3)$ e a reta que passa pelos pontos $(2,-1)$ e $(0,1)$.

   Uns vetores direccionais das duas retas são $\mathbf{v} = (2,3)-(1,0) = (1,3)$ e $\mathbf{w} = (2,-1)-(0,1) = (2,-2)$, portanto
   $$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = -1/\sqrt{5}$$

4. *(2 valores)* Esboce o lugar geométrico definido, no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, por
   $$\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$



5. *(2 valores)* Calcule a distância entre o ponto $(7,3)$ e a reta $2x-5y=0$.

   A distância entre o ponto $\mathbf{r} = (7,3)$ e a reta $2x-5y$ é a norma da projeção de $\mathbf{r}$ sobre um vetor normal à reta, por exemplo $\mathbf{n} = (2,-5)$, ou seja
   $$\frac{|\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = 1/\sqrt{29}$$

6. *(2 valores)* Calcule a área do triângulo de vértices $(2,1)$, $(3,2)$ e $(4,0)$.

A área do triângulo de vértices $(2,1)$, $(3,2)$ e $(4,0)$ é a metade da área do paralelogramo de lados $\mathbf{b} = (4,0)-(2,1) = (2,-1)$ e $\mathbf{a} = (3,2)-(2,1) = (1,1)$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = 3/2$$

7. *(2 valores)* Calcule o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}-\mathbf{i}$.

O volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}-\mathbf{i}$ é o produto misto

$$|(\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot((\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(\mathbf{k}-\mathbf{i}))| = |\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k})-\mathbf{j}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{i})| = 0$$

8. *(2 valores)* Determine uma equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Um vetor normal ao plano é $\mathbf{n} = (-1,2,0)\times(0,-2,3) = (6,3,2)$, portanto uma equação cartesiana do plano é $(x,y,z)\cdot\mathbf{n} = (1,0,0)\cdot\mathbf{n}$, ou seja,

$$6x+3y+2z = 6$$

9. *(2 valores)* Determine a dimensão e uma base do subespaço $V\subset\mathbb{R}^3$ definido por $x+y+z=0$.

A dimensão do subespaço, que é um plano, é 2, e uma base é formada pelos vetores

$$(1,-1,0) \quad \text{e} \quad (0,1,-1)$$

10. *(2 valores)* Determine os valores de t para os quais os dois vectores $\mathbf{r} = (1+t, 1-t)$ e $\mathbf{r}' = (1-t, 1+t)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

Os vectores $\mathbf{r} = (a,b)$ e $\mathbf{r}' = (c,d)$ são linearmente independentes se e só se a área do paralelogramo de lados $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ é diferente de zero, logo se $ad-bc\neq 0$. Neste caso $ad-bc = (1+t)^2-(1-t)^2 = 4t$, portanto os vetores são independentes se e só se $t\neq 0$.

15/01/2013 2º teste	Álgebra Linear e Geometria Analítica EC	3801R2 FÍSICA

Nome .... **Nº** ....

1. *(2 valores)* Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $L(\mathbf{i}) = (1,4)$ e $L(\mathbf{j}) = (-2,3)$. Determine $L(5,-1)$.

   Usando a linearidade temos que

$$\begin{aligned} L(5,-1) &= L(5\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 5L(\mathbf{i}) - L(\mathbf{j}) \\ &= 5(1,4) - (-2,3) = (7,17) \end{aligned}$$

2. *(2 valores)* Determine o núcleo (espaço nulo) e a imagem (contradomínio) da projeção ortogonal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre a reta $2x = 3y$.

   O núcleo de L é a reta $2y = -3x$, e a imagem de L é a reta $2x = 3y$.

3. *(2 valores)* Calcule o comutador $AB - BA$, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2B$$

4. *(2 valores)* Diga se a transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $L(x,y) = (x+y, x-y)$ é injetiva (ou seja, biunívoca) e, caso afirmativo, determine a transformação inversa L^{-1}.

   A transformação $L(x,y) = (x+y, x-y)$ é injetiva e a sua inversa é $L^{-1}(a,b) = ((a+b)/2, (a-b)/2)$.

5. *(2 valores)* Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   O determinante é 6.

6. *(2 valores)* Se A e B são duas matrizes $n \times n$, então

$$\det(A+B) = \det A + \det B\,.$$

   Verdadeiro ou falso? Dê uma demonstração ou um contra-exemplo.

   Falso, por exemplo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

   mas

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

7. *(2 valores)* Determine o espaço das soluções do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ x + 3y + 5z &= 9 \end{cases}$$

   O espaço das soluções é a reta afim $(-6,5,0) + \mathbb{R}(1,-2,1)$.

8. *(2 valores)* Dê um exemplo de um sistema linear impossível de 2 equações lineares com 3 incógnitas.

O sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 7 \\ x+y+z &= 10^{23} \end{cases}$$

9. *(2 valores)* Determine valores e vetores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são $\lambda_{\pm} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ e uns vectores próprios associados são, por exemplo, $\mathbf{v}_{\pm} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, respectivamente.

10. *(2 valores)* Determine a matriz A que representa a reflexão $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na reta $y = 2x$ relativamente à base canónica.

A matriz da transformação L relativamente à base $\mathbf{b}_1 = (1, 2)$ e $\mathbf{b}_2 = (-2, 1)$ é

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto, se U denota a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$, a matriz A é

$$A = UA'U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$