4/2/2013 recurso	# Álgebra Linear e Geometria Analítica EC	3801R2 FÍSICA

Nome .... **N^o** ....

1. *(2 valores)* Determine uma equação paramétrica da reta ortogonal ao vetor $(1,1)$ passando pelo ponto $(0,-1)$.

$$\mathbf{r}(t) = (0,-1) + t(-1,1) \qquad \text{com } t \in \mathbb{R}$$

2. *(2 valores)* Calcule a distância entre o ponto $(1,2,3)$ e o plano $x+y+z=0$.

A distância entre o ponto $\mathbf{r} = (1,2,3)$ e o plano $x+y+z=0$ é a norma da projeção de $\mathbf{r}$ sobre um vetor normal ao plano, por exemplo $\mathbf{n} = (1,1,1)$. Portanto,

$$\frac{|\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

3. *(2 valores)* Determine os valores de λ tais que o conjunto

$$V_\lambda := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x+y+z=\lambda\}$$

seja um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$. Para estes valores, determine a dimensão e uma base de V_λ.

O conjunto V_λ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ se e só se $\lambda = 0$, pois se $\lambda \neq 0$ então $(0,0,0) \notin V_\lambda$. A dimensão de V_0 é 2 (ou seja, é um plano) e uma base é o conjunto ordenado $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$.

4. *(2 valores)* Calcule a área do triângulo de vértices $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(0,0,0)$.

A área do triângulo de vértices $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(0,0,0)$ é a metade da área do paralelogramo de lados $\mathbf{a} = (0,1,1)$ e $\mathbf{b} = (1,1,0)$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. *(2 valores)* Determine uma equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$, e um vetor normal a este plano.

$$x+y+z=1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{n} = (1,1,1)$$

6. *(2 valores)* Determine o núcleo (espaço nulo) e a imagem (contradomínio) da transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x,y) = (x+2y, y)$. Diga se é invertível e, caso afirmativo, calcule a inversa.

O núcleo de L é o espaço trivial $\{(0,0)\}$, e a imagem de L é o plano $\mathbb{R}^2$. A trnasformação é invertível, e a sua inversa é $L^{-1}(a,b) = (a-2b, b)$.

7. *(2 valores)* Calcule o produto AB e o determinante $\det(BA)$ das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \det(BA) = 0$$

8. *(2 valores)* Determine o espaço das soluções do sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ 2x-y+z &= 3 \end{cases}$$

A reta $(3,3,0)+\mathbb{R}(-4/3,-1/3,1)$.

9. *(2 valores)* Determine valores e vetores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O único valor próprio é $\lambda = 1$ e os vetores próprios são proporcionais a $\mathbf{v} = (1,0)$.

10. *(2 valores)* Determine a matriz A que representa a reflexão $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na reta $x+2y=0$ relativamente à base canónica.

A matriz da transformação L relativamente à base $\mathbf{b}_1 = (-2,1)$ e $\mathbf{b}_2 = (1,2)$ é

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto, se U denota a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$, a matriz A é

$$A = UA'U^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$