FIS 2012/13
3801R2 - Álgebra Linear e Geometria Analítica EC

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url http://w3.math.uminho.pt/~scosentino

9 de Janeiro de 2013

Conteúdo

Notações

Conjuntos. $a \in A$ quer dizer que a é um elemento do conjunto A. $A \subset B$ quer dizer que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B. $A \cap B$ é a interseção dos conjuntos A e B, e $A \cup B$ é a reunião dos conjuntos A e B. $A \times B$ é o produto cartesiano dos conjuntos A e B, o conjunto dos pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q, \in \mathbb{Z}\,,\ q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos númeors reais e complexos, respetivamente.

Funções. Uma *função* $f : X \to Y$, com *domíno* o conjunto X e *conjunto de chegada* o conjunto Y, é um subconjunto $R \subset X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe um único $y := f(x) \in Y$, dito *imagem* de x, tal que $(x, y) \in R$. Quando domínio e contradomínio são claros, uma função pode ser denotada apenas por $x \mapsto f(x)$, ou seja, identificada com a "regra" que determina $y = f(x)$ a partir de x. A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ é o conjunto $f(A) := \{f(a) \text{ com } a \in A\} \subset Y$. Em particular, a *imagem/contradomínio* da função $f : X \to Y$ é o conjunto $f(X) := \{f(x) \text{ com } x \in X\} \subset Y$ dos valores da função. O *gráfico* da função $f : X \to Y$ é o subconjunto

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } y = f(x)\} \subset X \times Y$$

do produto cartesiano do domínio e o conjunto de chegada. A função *identidade* $\mathbf{1}_X : X \to X$ é definida por $\mathbf{1}_X(x) = x$, e o seu gráfico é a *diagonal* $\{(x, x) \text{ com } x \in X\} \subset X \times X$.

A *restrição* da função $f : X \to Y$ ao subconjunto $A \subset X$ é a função $f|_A : A \to Y$ definida por $f|_A(a) := f(a)$.

A *composição* das funções $f : X \to Y$ e $g : f(X) \subset Y \to Z$ é a função $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, ou seja,

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Uma função $f : X \to Y$ é *injetiva* se $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, e portato a imagem $f(X)$ é uma "cópia" de X. Uma função $f : X \to Y$ é *sobrejetiva* se todo $y \in Y$ é imagem $y = f(x)$ de algum $x \in X$, ou seja, se $Y = f(X)$. Uma função $f : X \to Y$ é *bijetiva/invertível* se é injetiva e sobrejetiva, e portanto admite uma função *inversa* $f^{-1} : Y \to X$, que verifica $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos os $x \in X$ e $y \in Y$.

1 Vetores

1. (a linguagem da filosofia) "... Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto." [1]

2. (a reta real) Fixada uma origem (ou seja, um ponto 0), um unidade de medida (ou seja, a distância entre 0 e 1) e uma orientação (ou seja, uma direção "positiva"), é possivel representar cada ponto de uma reta com um número real $x \in \mathbb{R}$. Vice-versa, ao número $x \in \mathbb{R}$ corresponde o ponto da reta colocado a uma distância $\sqrt{x^2}$ da origem, na direção positiva se $x > 0$ e negativa se $x < 0$.

3. (o plano cartesiano) O *plano cartesiano*[2] $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos *pontos* $\mathbf{r} = (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$. A *origem* é o ponto $\mathbf{0} := (0, 0)$. O ponto $\mathbf{r} = (x, y)$ pode ser pensado como o *vetor* (i.e. o segmento orientado, a seta) entre a origem $(0, 0)$ e o ponto (x, y). A *soma* dos vetores $\mathbf{r} = (x, y)$ e $\mathbf{r}' = (x', y')$ é o vetor

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' := (x + x', y + y'),$$

que representa uma diagonal do paralelogramo de lados $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$. O *produto* do número/escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\mathbf{r} = (x, y)$ é o vetor

$$\lambda\mathbf{r} := (\lambda x, \lambda y)$$

que representa uma dilatação/contração (e uma inversão se $\lambda < 0$) de razão λ do vetor $\mathbf{r}$. Cada vetor pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{r} = (x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

onde $\mathbf{i} := (1, 0)$ e $\mathbf{j} := (0, 1)$ denotam os vetores da base canónica.

Lugares geométricos (pontos, retas, circunferências, parábolas, ...) podem ser descritos/definidos por equações algébricas, ditas "equações cartesianas".

   - Descreva as coordenadas cartesianas dos pontos da reta que passa por $(1, 2)$ e $(-1, 3)$.
   - Descreva as coordenadas cartesianas do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$.
   - Esboce os lugares geométricos definidos pelas equações

$$xy = 1 \qquad y = 2x - 7 \qquad (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9 \qquad x - 2y^2 = 3$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ -2x - 2y = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

   - Escboce os lugares geométricos definidos pelas seguintes desigualdades

$$x - y \leq 1 \qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

   - Determine uma desigualdades (cartesianas) que definem os pontos do paralelogramo de lados $(2, 1)$ e $(3, 5)$.

4. (o espaço, o espaço-tempo e o espaço de fases da física newtoniana) O espaço onde acontece a física newtoniana é o *espaço 3-dimensional* $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A posição de uma partícula num referencial inercial é um vetor

$$\mathbf{r} = (x, y, z) := x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$$

[1] Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, 1623.

[2] René Descartes, *La Géométrie* [em *Discourse de la Méthode*, 1637].

onde $\mathbf{i} := (1,0,0)$, $\mathbf{j} := (0,1,0)$ e $\mathbf{k} := (0,0,1)$ denotam os vetores da base canónica.

A *lei horária/trajetória*, de uma partícula é uma função $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ que associa a cada tempo $t \in I \subset \mathbb{R}$ a posição $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ da partícula no instante t. A *velocidade* da partícula no instante t é o vetor $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. A *aceleração* da partícula no instante t é o vetor $\mathbf{a}(t) := \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$, determinado pela equação de Newton[3]

$$m\,\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

onde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo de forças e $m > 0$ a massa da partícula.

O *espaço-tempo*[4] da física newtoniana é o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^4$, o espaço dos *eventos* $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, onde $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ representa uma posição num referencial inercial, e $t \in \mathbb{R}$ é o *tempo absoluto*.

O *estado* de uma partícula, a informação necessária e suficiente para resolver a equação de Newton e portanto determinar a trajetória futura (e passada), é um ponto $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ do *espaço dos estados/de fases* , onde $\mathbf{r}$ é a posição e $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é o *momento (linear)*.

- Determine a "dimensão" do espaço de fases de um sistema composto por 8 planetas (como, por exemplo, Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno) e de um sistema composto por 6×10^{23} moléculas.

5. (reações químicas) O estado de uma reação química

$$aA + bB + cC + \dots \quad \to \quad xX + yY + zZ + \dots$$

entre os n reagentes A, B, C, $\dots$ e os m produtos X, Y, Z, $\dots$ é descrito usando as concentrações $[A]$, $[B]$, $[C]$, $\dots$, $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, $\dots$, e portanto $n + m$ números.

6. (o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$) O *espaço vetorial real* de *dimensão* n é o espaço

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

das n-uplas $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ de números reais, ditas *vetores* ou *pontos*, munido das operações *adição* $: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\boxed{\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} := (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)}$$

e *multiplicação por um escalar* $: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\boxed{\lambda, \mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x} := (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n)}$$

O *vetor nulo/origem* é o vetor $\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0)$, tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. O *simétrico* do vetor $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ é o vetor $-\mathbf{x} := (-x^1, -x^2, \dots, -x^n)$, tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Isto justifica a notação $\mathbf{x} - \mathbf{y} := \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

A "combinação linear" dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ com "coeficientes" $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$ é o vetor

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^i \mathbf{v}_i := \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \lambda^2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda^k \mathbf{v}_k \,.$$

A *base canónica* de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto ordenado dos vetores

$$\boxed{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \qquad \dots \qquad \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)}$$

[3] Isaac Newton, *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica*, 1687.

[4] "Cette maniére de considérer les quantités de trois dimensions est aussi exacte que l'autre, car les lettres peuvent toujours être regardées comme représentant des nombres rationnels ou non. J'ai dit plus haut qu'il n'était pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d'esprit de ma connaaisance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatriéme dimension, et que le produit temps par la solidité serait en qualque maniére un produit de quatre dimensions; cette idée peut être contestée, mais elle a, ce me semble, quelque mérite, quand ce ne serait que celui de la nouveauté." [Jean-le-Rond D'Alembert, *Encyclopédie*, Vol. 4, 1754.]

assim que cada vetor $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear única

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \cdots + x^n\mathbf{e}_n$$

dos vetores da base canónica. O número x^k é chamado k-ésima *coordenada*, ou *componente*, do vetor $\mathbf{x}$.

Um *subespaço vetorial* de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ então $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

No *plano* $\mathbb{R}^2$ os pontos costumam ser denotados por $\mathbf{r} = (x, y)$, e no *espaço (3-dimensional)* $\mathbb{R}^3$ por $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

- Calcule

$$(1, 2, 3) + (2, 3, 4) \qquad 6 \cdot (-1, -6, 0) \qquad (1, -1) - (3, 2)$$

- Calcule e esboce os pontos $A + B$, $A - B$, $2A - 3B$ e $-A + \frac{1}{2}B$ quando

$$A = (1, 2) \;\text{ e }\; B = (-1, 1) \qquad \text{ou} \qquad A = (0, 1, 7) \;\text{ e }\; B = (-2, 3, 0)$$

- [Ap69] **12.4**.

7. (a warning about the notation) After some rewritings, I decided to use Einstein's notation for the coordinates of (contra-variant, in Einstein's language) vectors: upper indices, as in $\mathbf{x} = (x^i)$. You must be warned that most, almost all, books on linear algebra use lower indices, and do not make distinction between vectors and co-vectors (covariant vectors, in Einstein's language). Actually, the only exception I know is van der Waerden's classic [Wa91].

8. (vetores aplicados) Um *vetor aplicado/geométrico* (uma força, uma velocidade, ...) é um segmento orientado $\vec{AB}$ entre um ponto de aplicação $A \in \mathbb{R}^n$ e um ponto final $B \in \mathbb{R}^n$. Dois vetores aplicados $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ são *paralelos* se $B - A = \lambda(D - C)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, e são *equivalentes* (e portanto definem o mesmo "vetor" $\mathbf{x} = B - A$) se $B - A = D - C$.

- Mostre que cada vetor aplicado é equivalente a um vetor $\vec{OC}$ aplicado na origem $O = (0, 0, \ldots, 0)$.
- Diga se são paralelos ou equivalentes $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ quando

$$A = (1, 2) \qquad B = (-1, 1) \qquad C = (2, 3) \qquad D = (4, , 4)$$

$$A = (0, 1, \pi) \qquad B = (-2, 3, 0) \qquad C = (1, 0, -\pi) \qquad D = (2, 3, 0)$$

- Determine $D \in \mathbb{R}^n$ de maneira tal que $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sejam equivalentes quando

$$A = (1, 2) \qquad B = (-1, 1) \qquad C = (2, 3)$$

$$A = (0, 1, \pi) \qquad B = (-2, 3, 0) \qquad C = (0, 0, 0)$$

9. (composição de forças) Se duas força $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ atuam sobre uma partícula colocada num certo ponto do espaço, então a "resultante" é uma força $\mathbf{F} + \mathbf{G}$.

10. (translações e homotetias) Uma *translação* do espaço $\mathbb{R}^n$ é uma transformação $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathbf{x} \mapsto T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a}\,, \qquad \text{com } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Uma *homotetia* do espaço $\mathbb{R}^n$ é uma transformação $H_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathbf{x} \mapsto H_\lambda(\mathbf{x}) := \lambda\mathbf{x}\,, \qquad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

- Calcule $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ quando

$$\mathbf{a} = (\pi, e) \;\text{ e }\; \mathbf{v} = (11, 13) \qquad \mathbf{a} = (2, 1, 1) \;\text{ e }\; \mathbf{v} = (0, 1, 3)$$

- Mostre que $T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ e deduza que $T_{\mathbf{a}} \circ T_{-\mathbf{a}} = T_{-\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$.
- Mostre que $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ existe uma translação $T_{\mathbf{a}}$ tal que $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.
- Calcule $H_\lambda(\mathbf{v})$ quando

$$\lambda = \frac{1}{3} \text{ e } \mathbf{v} = (2, -1) \qquad \lambda = 5 \text{ e } \mathbf{v} = (6, 7, 8)$$

- Descreva o efeito das transformações H_λ, com $\lambda < 1$ e $\lambda > 1$, no plano $\mathbb{R}^2$.
- Determine as transformações compostas $T_{\mathbf{a}} \circ H_\lambda$ e $H_\lambda \circ T_{\mathbf{a}}$. São iguais?

11. (graus Celsius, Fahrenheit e Kelvin) A temperatura pode ser medida em graus Celsius (C), Fahrenheit (F) e Kelvin (K), e

$$F = 1.8 \cdot C + 32 \qquad K = (F + 459.67)/1.8$$

- Determine a relação entre graus Kelvin e Celsius.
- Determine a relação entre um grau Kelvin e um grau Fahrenheit.

12. (invariância galileiana/sistemas inerciais) Seja $\mathbf{r}$ a posição de uma partícula num referencial inercial $\mathcal{R}$. Num referencial $\mathcal{R}'$ com origem no ponto $\mathbf{a}$, a posição da partícula é dada por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$$

Num referencial $\mathcal{R}''$ em movimento retilíneo uniforme com velocidade (constante) $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ e origem $\mathbf{a}$ no instante $t = 0$, a posição da partícula é dada pela "transformação de Galileu"

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - (\mathbf{a} + \mathbf{V}t)$$

- Verifique que a lei de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ é invariante, ou seja, que a aceleração $\mathbf{a} := \ddot{\mathbf{r}}$ não depende do sistema inercial no qual é calculada.
- Mostre que o momento linear $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{r}}$ transforma segundo a lei

$$\mathbf{p}'' = \mathbf{p} + m\mathbf{V}$$

2 Produto escalar, norma e distância

1. (módulo e distância na reta real) O *módulo*, ou *valor absoluto*, do número real $x \in \mathbb{R}$ é

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

A *distância* entre os pontos x e y da reta real $\mathbb{R}$ é

$$\mathrm{d}(x, y) := |x - y|$$

- Mostre que o módulo e a distância satisfazem as desigualdades do triângulo

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(y, z) .$$

2. (o plano euclidiano segundo Descartes) A geometria euclidiana do plano (distâncias, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, ...) pode ser deduzida a partir da noção algébrica de *produto escalar/interno*

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} := xx' + yy' .$$

Os vetores $\mathbf{r} = (x, y)$ e $\mathbf{r}' = (x', y')$ são *perpendiculares/ortogonais* quando $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$, i.e. quando $xx' = -yy'$. O *comprimento*, ou *norma*, do vetor $\mathbf{r} = (x, y)$ é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{r}\| := \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

A *distância* entre os pontos $\mathbf{r} = (x, y)$ e $\mathbf{r}' = (x', y')$ é

$$\mathrm{d}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} .$$

3. (produto escalar euclidiano) O *produto escalar/interno (euclidiano)* em $\mathbb{R}^n$ é a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\boxed{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x^1 y^1 + x^2 y^2 + \cdots + x^n y^n}$$

Usando o *símbolo de Kroneker* δ_{ij}, definido por $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, o produto escalar Euclidiano entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j} \delta_{ij} x^i y^j .$$

O produto escalar é "comutativo/simétrico", i.e.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} ,$$

"bilinear" (ou seja, linear em cada uma das duas variáveis), i.e.

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} , \quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad \text{e} \quad (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) ,$$

e "positivo", i.e.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0 , \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} .$$

Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos *ortogonais/perpendiculares* quando $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

- Mostre que o produto interno é simétrico, bilinear e positivo.
- Verifique que os vetores da base canónica são ortogonais dois a dois, i.e. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ se $i \neq j$.
- Se $\mathbf{v}$ é ortogonal a todos os vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Calcule o produto interno entre $\mathbf{x} = (1, 2)$ e $\mathbf{y} = (-1, 1)$, e entre $\mathbf{x} = (0, 1, \pi)$ e $\mathbf{y} = (-2, 3, 0)$.

- Determine se são ortogonais $\mathbf{x} = (1, 2)$ e , $\mathbf{y} = (-1, 1)$, ou $\mathbf{x} = (0, 1, \pi)$ e $\mathbf{y} = (-2, 3, 0)$.
- Se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ então $\mathbf{y} = \mathbf{z}$?
- [Ap69] **12.8**.

4. (norma euclidiana) A *norma (euclidiana)* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o número não-negativo

$$\boxed{\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2}}$$

A norma é "(positivamente) homogénea", i.e.

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\| \, ,$$

e "positiva", i.e.

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \, , \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \, .$$

Um vetor $\mathbf{x}$ é dito *unitário* se $\|\mathbf{x}\| = 1$.

- Mostre que a norma é homogénea e positiva.
- Verifique que os vetores da base canónica são unitários, i.e. $\|\mathbf{e}_i\| = 1$.
- Verifique que se $\mathbf{v} \neq 0$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ é unitário.
- Mostre que
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 4 \, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \, ,$$
e deduza que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ sse $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.
- Prove o *teorema de Pitágoras*: se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais então
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$
- Verifique (e interprete) a *identidade do paralelogramo*
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2 \, \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \, \|\mathbf{y}\|^2 \, .$$
- Verifique que o produto interno euclidiano pode ser deduzido da norma usando a *identidade de polarização*
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \tfrac{1}{4} \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right) \, ,$$
ou
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \tfrac{1}{2} \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \right) \, .$$
- Calcule a norma dos vetores $\mathbf{x} = (1 - 1, 1)$, $\mathbf{y} = (-1, 1)$ e $\mathbf{z} = (1, 2, 3, 4)$.

5. (projeção e componente) Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ um vetor $\neq \mathbf{0}$. Cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado de maneira única como soma
$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}$$
de um vetor $\lambda \mathbf{v}$ proporcional a $\mathbf{v}$ e um vetor $\mathbf{w}$ ortogonal a $\mathbf{v}$. Basta escolher $\lambda = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/\|v\|^2$. O vetor $\lambda \mathbf{v}$ é dito *projeção* do vetor $\mathbf{x}$ sobre (a reta definida pel)o vetor $\mathbf{v}$, e o coeficiente λ é dito *componente* de $\mathbf{x}$ ao longo de $\mathbf{v}$. Em particular, a componente de $\mathbf{x}$ ao longo de um vetor unitário $\mathbf{u}$ é $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$.

- Verifique que a projeção de $\mathbf{x}$ sobre o vetor $\mathbf{e}_k$ da base canónica é $x^k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k$ (a k-ésima coordenada de $\mathbf{x}$).
- Calcule a componente de $\mathbf{x} = (1, 2)$ ao longo de $\mathbf{v} = (-1, 1)$, e a projeção de $\mathbf{x} = (0, 1, \pi)$ sobre $\mathbf{v} = (-2, 3, 0)$.
- [Ap69] **12.11**.

6. (desigualdade de Schwarz, ângulos e desigualdade do triângulo) A *desigualdade de Schwarz* afirma que se $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ então
$$\boxed{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$
e a igualdade verifica-se sse os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são paralelos. Em particular, a norma satisfaz a *desigualdade do triângulo* (ou *subaditividade*)
$$\boxed{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|}$$
O *ângulo* entre os vetores não nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o único $\theta\in[0,\pi]$ tal que
$$\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta}$$
   - Prove a desigualdade de Schwarz.
(primeira sugestão: se $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ e $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, considere os vetores unitários $\mathbf{u}=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ e $\mathbf{v}=\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$, calcule $\|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}\|^2$ ... deduza que $-1\leq\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\leq 1\dots$)
(segunda sugestão: se $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, considere a projeção $\lambda\mathbf{x}$ de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{x}$, e aplique o teorema de Pitágoras aos vetores ortogonais $\lambda\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}-\lambda\mathbf{x}\dots$)
   - Prove a desigualdade do triângulo (calcule $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$ e use a desigualdade de Schwarz).
   - Mostre que se θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ então
$$\|\mathbf{x}\pm\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2\pm 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta$$
   - Calcule o coseno do ângulo entre $\mathbf{x}=(1,2)$ e $\mathbf{y}=(-1,1)$. Calcule o coseno do ângulo entre $\mathbf{x}=(0,1,\pi)$ e $\mathbf{y}=(-2,3,0)$.
   - Calcule o coseno dos ângulos do triângulo de vértices $A=(1,1)$, $B=(-1,3)$ e $C=(0,2)$. Calcule o coseno dos ângulos do triângulo de vértices $A=(1,2,5)$, $B=(2,1,2)$ e $C=(0,3,0)$.
   - Determine um vetor ortogonal ao vetor $(1,-1)$, e um vetor ortogonal ao vetor $(1,3)$.
   - Determine a família dos vetores de $\mathbb{R}^2$ ortogonais ao vetor (a,b), e a família dos vetores de $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor (a,b,c).
   - [Ap69] **12.8.**

7. (distância euclidiana) A *distância (euclidiana)* entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o número não-negativo
$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\sqrt{(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+\dots+(x^n-y^n)^2}}$$
A distância satisfaz a *desigualdade do triângulo* (a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é inferior ao comprimento do terceiro lado)
$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\leq\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z})+\mathrm{d}(\mathbf{z},\mathbf{y})}$$
   - Prove a desigualdade do triângulo (use a desigualdade homónima da norma).
   - Prove que $\mathrm{d}(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y})=|\lambda|\,\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.
   - Calcule a distância entre $\mathbf{x}=(1,2)$ e $\mathbf{y}=(-1,1)$, e a distância entre $\mathbf{x}=(0,1,\pi)$ e $\mathbf{y}=(-2,3,0)$.

8. (trabalho) O *trabalho* que realiza um campo de forças constante $\mathbf{F}$ ao deslocar uma partícula (ao longo do segmento) do ponto $\mathbf{r}$ ao ponto $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ é $dT:=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

9. (bolas e esferas) A *bola aberta* e a *bola fechada* (ou *círculo*, se $n=2$) de centro $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ e raio $r>0$ são
$$\boxed{B_r(\mathbf{x}):=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\ \text{t.q.}\ \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|<r\}\qquad\text{e}\qquad\overline{B_r(\mathbf{x})}:=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\ \text{t.q.}\ \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\leq r\}}$$

respetivamente. A *esfera* (ou *circunferência*, se $n = 2$) de centro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é

$$\boxed{S_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = r\}}$$

Em particular, a *esfera unitária* de dimensão $n - 1$ é

$$\mathbb{S}^{n-1} := S_1(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{x}\| = 1\}\,.$$

- Diga quando a interseção $B_r(\mathbf{x}) \cap B_{r'}(\mathbf{x}') \neq \emptyset$.
- Verifique que $B_r(\mathbf{x}) = T_\mathbf{x}\left(H_\mathbf{r}\left(B_1(\mathbf{0})\right)\right)$ e $S_r(\mathbf{x}) = T_\mathbf{x}\left(H_\mathbf{r}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right)$.

10. (centroide) O *centroide* do sistema de pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^n$ é o ponto

$$\mathbf{C} := \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_N}{N}$$

- Mostre que o centroide é o ponto $\mathbf{y}$ que minimiza a função

$$\mathbf{y} \mapsto \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|^2\,.$$

- Calcule o centroide do sistema composto pelos pontos $(0, 1)$, $(2, 2)$ e $(3, 0)$ do plano.
- Mostre que o centroide de 3 pontos do plano, A, B e C, é a interseção dos segmentos que unem os vértices do triângulo ABC aos pontos médios dos lados opostos.

11. (centro de massas) O *centro de massas* do sistema de partículas de massas $m_1, m_2, \ldots, m_N$ colocadas nos pontos $\mathbf{r}_!, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_N\mathbf{r}_N}{M}$$

onde $M := m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ é a massa total do sistema.

3 Retas e planos

1. (curvas e superfícies) Curvas, superfícies e outros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ podem ser definidos de forma *paramétrica*, ou seja, como imagens $A = f(S) = \{f(s) \text{ com } s \in S\}$ de funções $f : S \to \mathbb{R}^n$ definidas em espaços de "parâmetros" $S = [0,1], \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots$ (por exemplo, uma "trajectória" $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$, onde t é o "tempo"), ou de forma *cartesiana*, ou seja, como "lugares geométricos" $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f_1(\mathbf{x}) = 0,\ f_2(\mathbf{x}) = 0,\ \dots\}$ dos pontos de $\mathbb{R}^n$ onde as funções $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ... se anulam.

   - Descreva e esboce os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 2\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } xy = 0\}$$

$$\{(1,1) + t(0,3) \text{ com } t \in \mathbb{R}\} \qquad \{(0,4,0) + t(2,3,4) \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(\cos t, \sin t) \text{ com } t \in [0,2\pi]\} \qquad \{(\cos t, \sin t, s) \text{ com } t \in [0,2\pi]\,,\ s \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x^2+y^2+z^2 < \pi\} \qquad \{(t,|t|) \text{ com } t \in [-1,1]\} \qquad \{(t,t^2) \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \langle (1,2),(x,y)\rangle = 0\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2x - 3y = 0\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \langle (3,-1),(x,y)\rangle = 2\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2x - 3y = 1\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -3x + y = 0 \text{ e } x - 7y = 0\} \qquad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x + y = 2 \text{ e } 2x - y = 1\} \qquad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 1\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x - 3y - z = 0 \text{ e } x + y + 11z = 3\}$$

2. (retas) Um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define/gera uma reta $\mathbb{R}\mathbf{v} := \{t\mathbf{v} \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. A *reta (afim)* paralela a $\mathbf{v}$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{v} := \{\mathbf{a} + t\mathbf{v} \text{ com } t \in \mathbb{R}\}}$$

   ($\mathbf{v}$ é dito *vetor direccional* da reta). No plano $\mathbb{R}^2$, é possível eliminar o parâmetro t e deduzir uma equação cartesiana da reta: por exemplo, se $\mathbf{a} = (a,b)$ e $\mathbf{v} = (v,w)$, então

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{v} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } w(x-a) - v(y-b) = 0\}}$$

   Um vetor não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ define uma reta normal/perpendicular $\mathbf{n}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0\}$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. A reta perpendicular/normal ao vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ é

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{n}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0\}}$$

   ($\mathbf{n}$ é dito vetor *normal* à reta).

   - Mostre que a reta que passa pelo pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ é

$$\{\mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$$

   - Mostre que uma equação cartesiana da reta perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = (m,n) \in \mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é

$$m(x-a) + n(y-b) = 0\,.$$

   - Determine uma equação paramétrica da reta

$$\text{que passa pelo ponto } (2,3) \text{ e é paralela ao vetor } (-1,2)$$

$$\text{que passa pelo ponto } (5,1,-2) \text{ e é paralela ao vetor } (3,-7,2)$$

$$\text{que passa pelos pontos } (3,3) \text{ e } (-1,-1)$$

$$\text{que passa pelos pontos } (0,3,4) \text{ e } (8,3,2)$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2x - 3y = 5\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -x + 7y = 0\}$$

- Determine uma equação cartesiana da reta

$$\text{que passa pelo ponto } (5,-1) \text{ e é paralela ao vetor } (-6,2)$$

$$\text{que passa pelos pontos } (0,1) \text{ e } (-3,4)$$

$$\text{que passa pelo ponto } (0,0) \text{ e é perpendicular ao vetor } (-2,-3)$$

$$\text{que passa pelo ponto } (2,1) \text{ e é perpendicular ao vetor } (9,3)$$

$$(-2,3)+t(5,1)$$

- Calcule o (coseno do) ângulo entre as retas

$$x-y=0 \quad \text{e} \quad -x+y=-7$$

$$x+y=1 \quad \text{e} \quad x-2y=-4$$

- Determine um vetor normal à reta

$$\text{que passa pelos pontos } (3,0) \text{ e } (2,1)$$

$$5x-3y=2$$

- Determine $P \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ t.q. } \ x+2y=-1\} = \{P+t\mathbf{v} \ \text{ com } \ t \in \mathbb{R}\}$$

- As retas

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \ 2x-3y=5\} \quad \text{e} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \ 3x-2y=5\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \ x+7y=3\} \quad \text{e} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \ -2x-14y=0\}$$

  são paralelas? São perpendiculares?

- Determine as intersecções entre as retas

$$x-2y=1 \quad \text{e} \quad -2x+4y=3$$

$$3x+5y=0 \quad \text{e} \quad x-y=-1$$

$$(3,1)+t(1,3) \quad \text{e} \quad (0,1)+t(-1,-2)$$

- Determine a família das retas paralelas ao vetor $\mathbf{v}=(a,b)$ do plano.
- Determine a família das retas que passam pelo ponto (a,b) do plano.
- [Ap69] **13.5**.

3. (segmentos) O *segmento (afim)* entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é

$$\boxed{\overline{\mathbf{xy}} = \{t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y} \ \text{ com } \ t \in [0,1]\}}$$

- Determine o segmento entre

$$\text{os pontos } (2,4) \text{ e } (-3,-8)$$

$$\text{os pontos } (1,0,1) \text{ e } (0,1,0)$$

- Determine a família dos pontos de $\mathbb{R}^n$ equidistantes de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (no plano, este conjunto é chamado *mediatriz* do segmento $\overline{\mathbf{xy}}$).

4. (ternos pitagóricos, método da corda de Diofanto) Uma solução inteira (i.e. com $X, Y, Z \in \mathbb{Z}$) da equação
$$X^2 + Y^2 = Z^2$$
é uma solução racional (i.e. com $x, y \in \mathbb{Q}$) de
$$x^2 + y^2 = 1$$
(basta dividir por $Z \neq 0$), ou seja, um ponto racional $(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ da circunferência unitária $\mathbb{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 1\}$.
   - Determine a (outra) interseção entre uma reta que passa pelo ponto $(-1, 0)$ e a circunferência unitária $\mathbb{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 1\}$.
   - Mostre que quando o declive d da reta é racional, ou seja $d = U/V$ com $U, V \in \mathbb{Z}$, a interseção determina uma solução inteira de $X^2 + Y^2 = Z^2$. Verifique que esta solução corresponde à solução de Euclides
$$X = (U^2 - V^2)W\,, \qquad Y = 2UVW\,, \qquad Z = (U^2 + V^2)W\,,$$
   com $U, V, W \in \mathbb{Z}$.

5. (partícula livre) A trajectória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula livre de massa $m > 0$ num referencial inercial é modelada pela equação de Newton
$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0\,, \qquad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \qquad m\mathbf{a} = 0\,,$$
onde $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t)$ denota a velocidade da partícula no instante t, e $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{r}}(t)$ denota a aceleração da partícula no instante t. Em particular, o "momento linear" $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$, é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0$, de acordo com o princípio de inércia de Galileo[5] ou a primeira lei de Newton[6].
   - Verifique que as soluções da equação de Newton da partícula livre são as retas afins
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t$$
   onde $\mathbf{s}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ são vetores constantes arbitrários, e interprete $\mathbf{s}$ e $\mathbf{v}$.
   - Determine a trajectória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.
   - Determine a trajectória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (1, 1, 1)$ no instante $t_1 = 2$. Calcule a sua "velocidade escalar", ou seja, a norma $v = \|\mathbf{v}\|$.

6. (distância entre um ponto e uma reta em $\mathbb{R}^2$) A distância do ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ à reta $\mathbf{a} + \mathbf{n}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (\mathbf{y} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ é a norma da projeção de $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ sobre o vetor normal $\mathbf{n}$, i.e.
$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{x}, R) = \frac{|(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|}}$$
Se a reta é $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } mx + ny + c = 0\}$, então
$$\boxed{\mathrm{d}((x, y), R) = \frac{|mx+ny+c|}{\sqrt{m^2+n^2}}}$$

[5] "...il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo."
. [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623]

[6] "Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare." [Isaac Newton, *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica*, 1687]

- Mostre que a norma de cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{a} + \mathbf{n}^{\perp}$ da reta que passa por $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ verifica
$$\|\mathbf{x}\| \geq d = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$
e que $\|x\| = d$ sse $\mathbf{x}$ é a projeção de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{n}$, ou seja $\mathbf{x} = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$ (observe que a equação da reta é $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ e use a desigualdade de Schwarz).
- Seja $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, com $t \in \mathbb{R}$, a representação paramétrica dos pontos de uma reta em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)\|^2$ é um polinómio de segundo grau em t, que assume um mínimo no ponto $t = t_0$ tal que $\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)$ é perpendicular ao vetor direccional da reta.
- Calcule a distância entre
$$\text{o ponto } (8, -3) \text{ e a reta } (1, 0) + t(3, 3)$$
$$\text{o ponto } (2, 4) \text{ e a reta } x - y = 0$$
$$\text{o ponto } (11, -33) \text{ e a reta } y = 0$$
- [Ap69] **13.5**.

7. (planos) Dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ "linearmente independentes" (i.e. não paralelos) geram um *plano* $\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w} := \{t\mathbf{v} + s\mathbf{w} \text{ com } (t, s) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^n$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. O *plano (afim)* gerado pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é
$$\boxed{\mathbf{a} + (\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}) := \{\mathbf{a} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w} \text{ com } (t, s) \in \mathbb{R}^2\}}$$
No espaço $\mathbb{R}^3$, é possível eliminar os parâmetros t e s e deduzir uma equação cartesiana do plano. Um vetor não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ define um plano normal $\mathbf{n}^{\perp} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0\}$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. O plano ortogonal/perpendicular/normal ao vetor não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ é
$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{n}^{\perp} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0\}}$$
($\mathbf{n}$ é dito *vetor normal* ao plano). O ângulo entre dois planos de $\mathbb{R}^3$ é o ângulo entre dois vetores normais aos planos.

- Mostre que o plano que passa pelo pontos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^n$, com $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ e $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ linearmente independentes, é
$$\{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + s(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \text{ com } (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$$
- Mostre que uma equação cartesiana do plano perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = (m, n, p) \in \mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ é
$$m(x - a) + n(y - b) + p(z - c) = 0$$
- Determine uma equação paramétrica do plano
$$\text{que passa pelo ponto } (5, 1, -2) \text{ e é gerado pelos vetores } (3, -7, 2) \text{ e } (-1.0, -1)$$
$$\text{que passa pelos pontos } (0, 3, 4)\,,\ (0, 5, 0) \text{ e } (8, 3, 2)$$
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 1\}$$
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z = 0\}$$
- Determine uma equação cartesiana do plano
$$\text{que passa pelo ponto } (-1, 1, 11) \text{ e é gerado pelos vetores } (1, 0, 0) \text{ e } (0, 1, 0)$$
$$\text{que passa pelo ponto } (0, 0, 0) \text{ e é gerado pelos vetores } (3, -7, 2) \text{ e } (-1.0, -1)$$
$$\text{que passa pelos pontos } (3, 3, 3) \text{ e é paralelo ao plano } x + y + z = 0$$
$$\text{que passa pelos pontos } (0, 3, 4)\,,\ (0, 5, 0) \text{ e } (8, 3, 2)$$
$$\text{que passa pelo ponto } (0, 0, 0) \text{ e é perpendicular ao vetor } (-2, -3, -4)$$
$$\text{que passa pelo ponto } (2, 1, 0) \text{ e é perpendicular ao vetor } (9, 3, 0)$$

- Calcule o (coseno do) ângulo entre os planos

$$x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad -x + 3y + 5z = -7$$

$$x - z = 2 \quad \text{e} \quad x - y = -3$$

- Determine um vetor normal ao plano

$$\text{que passa pelos pontos } (0,0,0)\,,\ (1,0,0) \text{ e } (0,1,0)$$

$$y + z = 1$$

- Determine as intersecções entre os planos

$$x + 2y + 3z = -1 \qquad \text{e} \qquad -2x + 4y - z = 3$$

$$3x - 5y = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y + z = 1$$

- [Ap69] **13.8** e **13.17**.

8. (distância entre um ponto e um plano em $\mathbb{R}^3$) A distância do ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ao plano $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ é a norma da projeção de $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ sobre o vetor normal $\mathbf{n}$, i.e.

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) = \frac{|(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}}$$

Se o plano é $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } mx + ny + pz + c = 0\}$, então

$$\boxed{\mathrm{d}((x,y,z), P) = \frac{|mx+ny+pz+c|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

- Calcule a distância entre

$$\text{o ponto } (2,4,1) \text{ e o plano } x + y + z = 0$$

$$\text{o ponto } (5,7,1) \text{ e o plano que passa por } (2,0,3) \text{ e é normal ao vetor } (1,1,0)$$

$$\text{o ponto } (15,11,17) \text{ e o plano } xy$$

- [Ap69] **13.17**.

4 Subespaços e bases

1. (subespaços e geradores) Um *subespaço vetorial/linear* de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{v} + \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ e $\lambda\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ para todos os $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $S \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto das "combinações lineares" (finitas) dos elementos de S, i.e.

$$\boxed{\mathrm{Span}(S) := \{\lambda^1\mathbf{s}_1 + \lambda^2\mathbf{s}_2 + \cdots + \lambda^k\mathbf{s}_k \quad \text{com} \quad \mathbf{s}_i \in S\,,\, \lambda^i \in \mathbb{R}\}}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, dito subespaço *gerado* por S.

   - O subepaço gerado por um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é a reta $\mathbb{R}\mathbf{v}$.
   - O subepaço gerado por dois vetores não nulos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ é o plano $\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}$, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não são paralelos, ou a reta $\mathbb{R}\mathbf{v}$ se $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$.
   - Determine o subespaço gerado por

$$(3,-2) \text{ e } (-6,4) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$

$$(1,1) \text{ e } (1,-1) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$

$$(1,0,0) \text{ e } (0,1,0) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$(1,0,0)\,,\ (0,1,0) \text{ e } (1,-1,0) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k \qquad \text{em } \mathbb{R}^n$$

   - Diga se são subespaços vetoriais os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

$$\{(t,3t) \text{ com } t \in \mathbb{R}\} \qquad \{(2t,3t) \text{ com } t \in [0,1]\} \qquad \{(t-1,2+3t) \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(t,3s-t,s) \text{ com } (t,s) \in \mathbb{R}^2\} \qquad \{(1-t,t+s,5) \text{ com } (t,s) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x - 2y = 0\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x - 2y = 1\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - y + z = 0 \text{ e } -2x + y - z = 1\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0 \text{ e } x - y - 3z = 0\}$$

   - Dado $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$, o conjunto

$$\mathbf{n}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\}$$

     é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$.
   - O conjunto

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1\}$$

     é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$?
   - Dados $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_m \in \mathbb{R}^n$, o conjunto

$$\bigcap_{k=1}^{m} {\mathbf{n}_k}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \forall i = 1,2,\ldots,m\}$$

     é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$.
   - [Ap69] **12.15**.

2. (conjuntos livres/linearmente independentes) O conjunto finito $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é *livre/(linearmente) independente* (ou, os vetores $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m$ de $\mathbb{R}^n$ são *livres/(linearmente) independentes*) se gera cada vetor de $\mathrm{Span}(S)$ duma única maneira, i.e. se cada vetor $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)$ admite uma única representação $\mathbf{v} = \lambda^1\mathbf{s}_1 + \lambda^2\mathbf{s}_2 + \cdots + \lambda^m\mathbf{s}_m$, ou seja, se gera o vetor nulo $\mathbf{0}$ duma única maneira, i.e.

$$\boxed{\text{se} \quad \lambda^1\mathbf{s}_1 + \lambda^2\mathbf{s}_2 + \cdots + \lambda^m\mathbf{s}_m = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda i = 0 \quad \forall i = 1,2,\ldots,m}$$

Caso contrário, o conjunto é dito *(linearmente) dependente*.

- Os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são dependentes sse são paralelos.
- Um conjunto $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ que contém o vetor nulo não é linearmente independente (assuma que $\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$, e observe que $\mathbf{s}_1 = 1\mathbf{s}_1 + 0\mathbf{s}_2 + \cdots + 0\mathbf{s}_m$).
- Mostre que os vetores (a, b) e (c, d) de $\mathbb{R}^2$ são independentes sse

$$ad - bc \neq 0\,.$$

- Verifique se os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.

$$(1,2) \qquad (-1,2) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$
$$(7,-7/3) \qquad (-1,3) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$
$$(17,4) \qquad (23,-6) \qquad (-8,99) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$
$$(1,1,0) \qquad (0,1,1) \qquad (1,0,1) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$
$$(\sqrt{3},1,0) \qquad (1,\sqrt{3},1) \qquad (0,1,\sqrt{3}) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$
$$(\sqrt{2},1,0) \qquad (1,\sqrt{2},1) \qquad (0,1,\sqrt{2}) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

- Verifique se

$$(7,-1) \ \text{ é combinação linear de } (3,8) \text{ e } (-1,0)$$
$$(1,5,3) \ \text{ é combinação linear de } (0,1,2) \text{ e } (-1,0,5)$$

- Determine os valores de t para os quais os vetores

$$(t,1,0) \qquad (1,t,1) \qquad (0,1,t)$$

  são dependentes.
- Dê 3 vetores independentes de $\mathbb{R}^3$.
- [Ap69] **12.15**.

3. (bases) Uma *base* de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto livre de geradores de $\mathbb{R}^n$, ou seja, um conjunto que gera $\mathbb{R}^n$ duma única maneira, ou seja, um conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ admite uma única representação $\mathbf{x} = \lambda^1\mathbf{b}_1 + \lambda^2\mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda^n\mathbf{b}_n$ como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$ (os coeficientes λ^i são ditos coordenadas/componentes de $\mathbf{x}$ relativamente à base $\mathcal{B}$).

$$\boxed{\text{Toda a base de } \mathbb{R}^n \text{ é composta de } n \text{ vetores.}}$$

$$\boxed{\text{Qualquer conjunto de } n \text{ vetores linearmente independentes é uma base de } \mathbb{R}^n.}$$

$$\boxed{\text{Qualquer conjunto linearmente independente é um subconjunto de uma base.}}$$

A *base canónica* de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. A base canónica de $\mathbb{R}^3$ é também denotada por $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

- Os vetores $(1, 1)$ e $(1, -1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$?
- Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ contendo o vetor $(2, 3)$.
- Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$.
- Verifique se os vetores

$$(1,0) \qquad (1,1)$$

  formam uma base de $\mathbb{R}^2$.
- Verifique se os vetores

$$(0,1,2) \qquad (-1,0,3) \qquad (1,1,-1)$$

  formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

- Verifique se os vetores

$$(1,0,0,0) \qquad (1,1,0,0) \qquad (1,1,1,0) \qquad (1,1,1,1)$$

formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

- [Ap69] **12.15**.

4. (conjuntos e bases ortogonais e ortonormados) O conjunto $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é *ortogonal* se $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = 0$ quando $i \neq j$. Um conjunto ortogonal composto de vetores unitários (i.e. tais que $\|\mathbf{s}_i\| = 1 \; \forall i = 1, 2, \dots, m$) é dito *ortonormado*. Se o vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é gerado pelo sistema ortogonal de vetores não nulos $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m\}$, ou seja, $\mathbf{x} = \sum x^i \mathbf{s}_i$, então os coeficientes x^i são as projeções de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{s}_i$, i.e.

$$\boxed{x^i = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|^2}}$$

Em particular, se $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\}$ é uma base ortonormada, então cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é

$$\boxed{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_i)\, \mathbf{s}_i}$$

- Um sistema ortogonal de vetores não nulos é linearmente independente (calcule o produto escalar de $\lambda^1 \mathbf{s}_1 + \lambda^2 \mathbf{s}_2 + \cdots + \lambda m \mathbf{s}_m$ com os $\mathbf{s}_i$ ...).
- A base canónica de $\mathbb{R}^n$ é ortonormada.
- Verifique se o conjunto formado pelos vetores

$$(0, \sqrt{3}/2, 1/2) \qquad (0, -1/2, \sqrt{3}/2) \qquad (1,0,0)$$

é ortogonal e ortonormado.

- Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ contendo o vetor $(1,1)$.
- Determine uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$ contendo o vetor $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
- [Ap69] **12.15**.

5 Produto vetorial, área e volume

1. (determinante e independência no plano) O *determinante* da matriz 2×2 cujas linhas são as componentes dos vetores $\mathbf{x} = (a, b)$ e $\mathbf{y} = (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$ é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc}$$

   - Os vetores (a, b) e (c, d) são independentes sse $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0$
   - Diga se os vetores $(-1, 4)$ e $(3, -12)$ são independentes.
   - Diga se os vetores $(5, 7)$ e $(2, 9)$ são independentes.

2. (determinante e área) O *paralelogramo* definido pelos vetores $\mathbf{x} = (a, b)$ e $\mathbf{y} = (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$ é o conjunto $P = \{t\mathbf{x} + s\mathbf{y} \quad \text{com } 0 \leq t, s \leq 1\}$. A sua área é igual ao módulo do determinante da matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, i.e.

$$\boxed{\text{Área}\,(P) = \left|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|}$$

   - Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $(0, 1)$ e $(1, 1)$, e do paralelogramo definido pelos vetores $(5, -2)$ e $(-3, 1)$.
   - Calcule a área do triângulo de vértices $(3, 2)$, $(6, -4)$ e $(8, 8)$.

3. (produto vetorial/externo) O *produto vetorial/externo* no espaço $\mathbb{R}^3$ (munido da orientação definida pela base canónica $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) é a operação $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\boxed{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \mapsto \mathbf{r} \times \mathbf{r}' := (yz' - zy'\,,\, -xz' + zx'\,,\, xy' - yx')}$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. O produto vetorial é distributivo sobre a adição e compatível com a multiplicação escalar, ou seja, é bilinear, i.e.

$$(\lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'' = \lambda(\mathbf{r} \times \mathbf{r}'') + \mu(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')$$

$$\mathbf{r} \times (\lambda\mathbf{r}' + \mu\mathbf{r}'') = \lambda(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') + \mu(\mathbf{r} \times \mathbf{r}'')$$

e "anti-comutativo", i.e.

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = -\mathbf{r}' \times \mathbf{r}$$

O produto vetorial satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$\boxed{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}}$$

e a *identidade de Lagrange*

$$\boxed{\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2\|\mathbf{r}'\|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}$$

   - Mostre que o produto vetorial é bilinear e anti-comutativo.
   - $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$ sse $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são dependentes (use a identidade de Lagrange e a desigualdade de Schwarz).
   - O vetor $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ é ortogonal ao subespaço vetorial $\mathbb{R}\mathbf{r} + \mathbb{R}\mathbf{r}'$ gerado por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ (calcule $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')$ e $\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')$ ...).
   - Calcule os produtos vetoriais entre os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, e verifique que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

   - O produto vetorial não é associativo! Por exemplo, $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$.

- Verifique a *fórmula de Lagrange*

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}\,(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$$

- Calcule $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ quando

$$\mathbf{r} = (1, -1, 1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (2, -2, 2)$$

$$\mathbf{r} = (-2, -1, 3) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (\pi, -\pi, 0)$$

4. (produto vetorial e determinante) Uma representação formal do produto vetorial entre os vetores $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ é

$$\boxed{\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \text{“}\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}\text{”} := \mathbf{i} \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}}$$

- Calcule $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ quando

$$\mathbf{r} = (3, -2, 8) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (1, 1, 1)$$

$$\mathbf{r} = (-\pi, e, 10) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (7, 5, 3)$$

- [Ap69] **13.11**.

5. (produto vetorial e área) A norma do produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ é

$$\boxed{\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{r}'\|\,|\sin\theta|}$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$. Portanto, o comprimento do produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ é a área do paralelogramo $\{t\mathbf{r} + s\mathbf{r}' \quad \text{com } 0 \leq t, s \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ definido pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$.

- Prove a fórmula acima (use a identidade de Lagrange e a definição de θ ...).
- $\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{r}'\|$ sse $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são ortogonais.
- Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $(2, 4, -1)$ e $(1, -3, 1)$.
- Calcule a área do triângulo de vértices $(1, 2, 0)$, $(2, 3, 4)$ e $(-1, 0, 0)$.

6. (produto vetorial e vetor normal) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$, então $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é um vetor não nulo ortogonal ao plano $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$, e o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Em particular, o plano gerado pelos vetores linearmente independentes $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no espaço $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\perp = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0\}$$

- Determine um vetor normal aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(5, 2, 4)$.
- Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$.
- Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são dois vetores ortogonais e unitários de $\mathbb{R}^3$, então $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.
- Determine um vetor normal ao plano que passa pelos pontos $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 2, 3)$
- Determine uma equação cartesiana do plano

$$\text{gerado pelos vetores } (-3, 1, 2) \text{ e } (1, 5, -2)$$

$$\text{que passa pelos pontos } (0, 0, 0)\,, (1, 0, 0) \text{ e } (0, 1, 0)$$

$$\{(1 + t + s, t - s, 5t) \quad \text{com} \;\; (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Resolva os exercícios 5 da folha 2.
- [Ap69] **13.11**.

7. (produto misto/triplo escalar e determinante) O *produto misto* dos vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$ de $\mathbb{R}^3$ é o escalar $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')$. É também igual ao *determinante* da matriz 3×3 cujas linhas são as componentes dos três vetores, i.e.

$$\boxed{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'') = \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} := x\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}}$$

Os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são independentes (e portanto formam uma base de $\mathbb{R}^3$) sse $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq 0$.

- Calcule o produto misto $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ quando

$$\mathbf{a}=(1,1,0) \qquad \mathbf{b}=(1,3,1) \qquad \mathbf{c}=(0,1,1)$$

$$\mathbf{a}=(-2,5,1) \qquad \mathbf{b}=(0,3,0) \qquad \mathbf{c}=(6,7,-3)$$

- Diga se são independentes

$$(7,2,3) \qquad (-1,-5,3) \qquad \text{e} \qquad (0,1,-3)$$

$$(1,0,1) \qquad (0,1,0) \qquad \text{e} \qquad (1,1,1)$$

- Determine os valores de t para os quais os vetores

$$(t,1,0) \qquad (1,t,1) \qquad (0,1,t)$$

  são dependentes.
- [Ap69] **13.14**.

8. (determinantes e volumes no espaço) O *paralelepípedo* definido pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ de $\mathbb{R}^3$ é o conjunto $\{t\mathbf{a}+s\mathbf{b}+u\mathbf{c} \text{ com } 0\leq t,s,u\leq 1\}$. O seu volume é igual ao módulo do produto misto $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, i.e.

$$\boxed{\text{Volume}\left(\{t\mathbf{a}+s\mathbf{b}+u\mathbf{c} \text{ com } 0\leq t,s,u\leq 1\}\right) = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| = \left|\det\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c3 \end{pmatrix}\right|}$$

- Verifique que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\sin(\theta)\cos(\phi)$$

  onde θ é o ângulo entre $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, e ϕ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.
- Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}+\mathbf{i}$.
- Calcule o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores

$$(3,3,1) \qquad (2,1,2) \qquad (5,1,1)$$

$$(0,0,1) \qquad (5,7,-3) \qquad (-9,0,0)$$

9. (momento angular e torque) O *momento angular* (relativo à origem do referencial) de uma partícula de massa $m>0$ colocada na posição $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ com momento linear $\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{r}}$, é o produto vetorial

$$\mathbf{L} := \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

- Verifique que a derivada do momento angular de uma partícula sujeita à lei de Newton $\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F}$ é igual ao *binário* (ou *torque*) $\mathbf{T}:=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$, ou seja,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\,.$$

- O momento linear do sistema de n partículas de massas m_i, colocadas nas posições $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ com momentos lineares $\mathbf{p}_i := m_i \dot{\mathbf{r}}_i$, com $i = 1, 2, \dots, n$, é

$$\mathbf{L} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

  Sejam $\mathbf{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$, com $M := \sum_{i=1}^{n} m_i$, o centro de massa do sistema, e $\mathbf{P} := M\dot{\mathbf{R}} = M \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ o momento linear do centro de massa. Mostre que

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \; + \; \mathbf{L}'$$

  onde $\mathbf{L}' := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$, com $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$, é o momento angular relativo ao centro de massa.

10. (força magnética) A *força de Lorentz* que experimenta uma partícula com carga eléctrica q e velocidade $\mathbf{v}$ num campo elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ é (nas unidades do S.I.)

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

- Mostre que num referencial inercial em que o campo elétrico é nulo, i.e. $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, e portanto a única força é força magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, a energia cinética é conservada, calculando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 \right) = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$$

  e utilizando a equação de Newton $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$.
- Um magneto de momento magnético $\mathbf{m}$, colocado num capo magnético $\mathbf{B}$, sofre um torque

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

  ...

6 Números complexos

1. (o plano dos números complexos) O corpo dos *números complexos* é o conjunto $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ dos pontos/números $z = x + iy \approx (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, munido das operações "soma" e "multiplicação", definidas por

$$\boxed{(x + iy) + (x' + iy') := (x + x') + i(y + y')}$$

(que corresponde à soma dos vetores (x, y) e (x', y') do plano $\mathbb{R}^2$) e

$$\boxed{(x + iy) \cdot (x' + iy') := (xx' - yy') + i(xy' + x'y)}$$

Em particular, se $i := 0 + i \cdot 1 \approx (0, 1) \in \mathbb{C}$, então $i \cdot i = -1$, ou seja, $i = \sqrt{-1}$. O *conjugado* do número complexo $z = x + iy$ é o número complexo $\overline{z} := x - iy$. O *módulo* do número complexo $z = x + iy$ é

$$\boxed{|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

(a norma euclidiana do vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Os números reais

$$\Re(z) := \frac{z + \overline{z}}{2} = x \qquad \text{e} \qquad \Im(z) := \frac{z - \overline{z}}{2i} = y$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$, respetivamente. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$\boxed{z = \rho\, e^{i\theta}}$$

onde $\rho = |z| \geq 0$ é o módulo, $\theta \in \mathbb{R}$ é "um" *argumento* de z, ou seja, um "ângulo" $\arg(z) = \theta + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$, e o número complexo $e^{i\theta}$ é definido pela *fórmula de Euler*

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)}$$

- Verifique que o inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0$ é

$$1/z = \overline{z}/|z|^2$$

- Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexos

$$1/i \qquad \frac{2 - i}{1 + i} \qquad \frac{1 - i}{1 + i} \cdot \frac{i}{2 + i} \qquad (1 - i3)^2$$

- Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad z^2 + z + 1 = 0$$

- Verifique que, se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \text{e} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{se } \rho_2 \neq 0)\,.$$

  Deduza que a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta}$, no plano $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, corresponde a uma dilatação/contração por ρ e uma rotação de um ângulo θ. Em particular, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é a "raiz quadrada" da inversão $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, ou seja, uma rotação de um ângulo $\pi/2$.

- Use a fórmula de Euler para provar as fórmulas

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) \mp \sin(\theta) \sin(\phi)$$

  e

$$\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \sin(\phi) \pm \sin(\theta) \cos(\phi)\,.$$

- Use a representação polar e a fórmula de Euler para provar a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,.$$

  Deduza as fórmulas

$$\cos(n\theta) = \ldots \qquad \text{e} \qquad \sin(n\theta) = \ldots$$

- Verifique que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.
- Calcule

$$\sqrt{i} \qquad \sqrt{-i} \qquad \sqrt{1+i}$$

- Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^5 = 1$ e $z^3 = 81$.
- Mostre que se ω é uma raiz n-ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + ... + \omega^{n-1} = 0\,.$$

  (multiplique por $1 - \omega$ ...).

2. (exponencial complexo e funções trigonométricas) A *função exponencial* $\exp(z) := e^z$, é a função inteira $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida pela série de potências

$$\boxed{e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots}$$

- Verifique a fórmula de adição $e^{z+w} = e^z e^w$, e deduza que $e^z \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.
- Verifique que e^z é igual à sua derivada, ou seja, $\exp'(z) = \exp(z)$.
- Mostre que, se $\theta \in \mathbb{R}$, então o conjugado de $e^{i\theta}$ é $e^{-i\theta}$, e portanto $|e^{i\theta}| = 1$. Defina as funções reais de variável real "cos" e "sin" usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, ou seja,

$$\cos(\theta) := \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin(\theta) := \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

  e deduza as suas expansões em série de potências em torno de 0.
- Deduza que, se $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha + i\theta} = e^{\alpha}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

3. (oscilações complexas e sobreposição) A função $t \mapsto z(t) = e^{i\omega t}$ descreve um ponto que percorre o círculo unitário $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$ do plano complexo no sentido anti-horário com "frequência angular" $\omega > 0$ (e portanto com período $T = 2\pi/\omega$ e frequência $\nu = \omega/(2\pi)$).

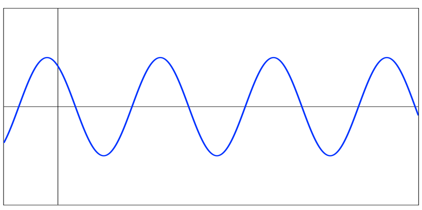
- Verifique qua a função $z(t) = e^{i\omega t}$ satisfaz as equações diferenciais lineares

$$\dot{z} = i\omega z \qquad \text{e} \qquad \ddot{z} = -\omega^2 z\,.$$

- Deduza que a parte real (e a parte imaginária) de $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$, com $z(0) = \rho e^{i\varphi}$,

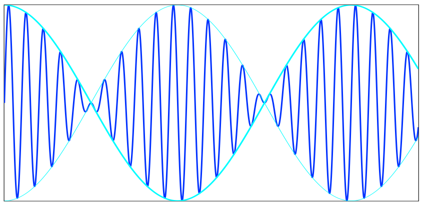
$$q(t) := \Re\left[z(t)\right] = \rho\cos(\omega t + \varphi)$$

  é uma solução (real) da equação diferencial do oscilador harmónico $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ em quanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.



Oscilação $q(t) = \rho\cos(\omega t + \varphi)$.

- Observe que a sobreposição das oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$,
$$z(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} ,$$
é máxima quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínima quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).
- Observe que, se $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega - \varepsilon$, a sobreposição das duas oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$ pode ser representada como
$$z(t) = e^{i\omega t}\left(e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}\right) = 2e^{i\omega t}\cos(\varepsilon t)$$
Em particular, se $|\varepsilon| \ll |\omega|$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.

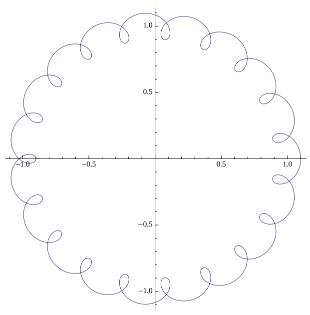


Sobreposição $z(t) = \sin(0.95 \cdot t) + \sin(1.05 \cdot t)$.

4. (epiciclos e deferentes) A ideia de Aristóteles e Platão, de que "todos os movimentos são combinações de movimentos circulares uniformes" está na base dos calendários calculados por Iparco e Ptolomeu, e transmitidos até nós pelos árabes no *Almagesto*.

   Nestas cosmologias, cada corpo celeste descreve uma circunferência, dita *epiciclo*, à volta de uma circunferência, que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência, ... , que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência inicial, dita *deferente*, centrada na Terra. Até o sistema de Nicholas Copernicus funciona assim: a única novidade, que também nâo uma novidade porque os próprios gregos consideraram esta possibilidade!, é que o centro do deferente é colocado no Sol, ideia que pareceu simplificar muito o modelo.

   De fato, todo movimento quase-periódico[7] (planar) pode ser aproximado com precisão arbitrária usando uma "sobrerposição"
$$z(t) = a_0 e^{i\omega_0 t} + a_1 e^{i\omega_1 t} + \cdots + a_n e^{i\omega_n t}$$
   de um número finito de movimentos circulares uniformes, e este é o conteúdo da moderna análise de Fourier.



[7]G. Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni*, Series 9, Band 12, No. **2** (2001), 125-152 (http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9907004).

7 Espaços lineares

1. (espaços lineares/vetoriais) Um *espaço linear/vetorial real* (ou seja, sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais) é um conjunto $\mathbf{V}$ munido de duas operações:

   a "adição" : $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$
   $$\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}\,,$$
   que satisfaz os axiomas

   EL1 *(propriedade associativa)* $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,

   EL2 *(propriedade comutativa)* $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,

   EL3 *(existência do elemento neutro)* existe $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$

   EL4 *(existência do simétrico)* $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existe $-\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

   e a "multiplicação por escalares/números" : $\mathbb{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$
   $$\lambda\,,\,\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v} \in \mathbf{V}$$
   que satisfaz os axiomas

   EL5 *(propriedade associativa)* $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$,

   EL6 *(propriedade distributiva para a adição em $\mathbb{R}$)* $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$,

   EL7 *(propriedade distributiva para a adição em $\mathbf{V}$)* $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$,

   EL8 *(existência do elemento neutro)* $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$,

   Um *isomorfismo* entre os espaços lineares $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ é uma aplicação bijectiva $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$, que respeita as operações, i.e. tal que se $\mathbf{v} \leftrightarrow f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$ e $\mathbf{w} \leftrightarrow f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$, então
   $$\mathbf{v} + \mathbf{w} \leftrightarrow \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \qquad \text{e} \qquad \lambda\mathbf{v} \leftrightarrow \lambda\mathbf{v}' \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,.$$
   Se substituimos o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais pelo corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, obtemos a definição de *espaço linear/vetorial complexo.*

   - Verifique que $\mathbb{R}$, munido das operações usuais "+" e "·", é um espaço vetorial real.
   - Verifique que $\mathbb{R}^n$, munido das operações "adição" e "produto por um escalar" definidas no exercício 1 do capítulo 1, é um espaço vetorial real.
   - Mostre que o elemento neutro $\mathbf{0}$ é único.
   - Mostre que o simétrico $-\mathbf{v}$ de cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e único.
   - Mostre que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e que $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Mostre que $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ou $\lambda = 0$.
   - Mostre que $\lambda\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ou $\lambda = \mu$.
   - Mostre que $\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ou $\lambda = 0$.
   - [Ap69] **15.5**.

2. (o espaço linear complexo $\mathbb{C}^n$) O *espaço vetorial complexo* de *dimensão* n é o espaço
   $$\mathbb{C}^n := \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ vezes}}$$
   das n-uplas $\mathbf{z} = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$ de números complexos, munido das operações *adição* $+ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, definida por
   $$\boxed{\mathbf{z}, \mathbf{w} \mapsto \mathbf{z} + \mathbf{w} := (z^1 + w^1, z^2 + w^2, \ldots, z^n + w^n)}$$
   e *multiplicação por um escalar* $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, definida por
   $$\boxed{\lambda, \mathbf{z} \mapsto \lambda\mathbf{z} := (\lambda z^1, \lambda z^2, \ldots, \lambda z^n)}$$

3. (espaços de funções) Sejam X um conjunto e $\mathbb{R}^X = \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}^X = \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ os espaços das funções reais ou complexas definidas em X, cujos elementos são denotados por $x \mapsto f(x)$. Os espaços $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$, munidos das operações "adição" e "produto por um escalar" definidas por
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{e} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\,,$$
são espaços vetoriais reais e complexos, respetivamente.

   - Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real, determine o elemento neutro, e dê exemplos de elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   - Seja $\mathbb{R}^\infty := \mathbb{R}^\mathbb{N} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ o espaço das sucessões reais $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, com $x_n \in \mathbb{R}$. Descreva a sua estrutura de espaço linear real.
   - Seja $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}[t]$ o espaço dos polinómios reais, e $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ o espaço dos polinómios reais de grau $\leq n$. Verifique que $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ são espaços lineares reais.
   - Verifique que são espaços vetoriais o espaço $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ das funções contínuas, o espaço $\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ das funções com k derivadas contínuas, o espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ das funções que admitem todas as derivadas.
   - [Ap69] **15.5**.

4. (campos de vetores) Um *campo de vetores* no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$. As suas "coordenadas" são as funções reais $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, m$, tais que
$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F^1(\mathbf{x}), F^2(\mathbf{x}), \dots, Fm(\mathbf{x}))$$
O espaço $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ dos campos de vetores definidos no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um espaço linear real se a "adição" e o "produto por um escalar" são definidos por
$$(\mathbf{F}+\mathbf{G})(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \qquad \text{e} \qquad (\lambda\mathbf{F})(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{F}(\mathbf{x})\,.$$

   - O *campo gravitacional* gerado por uma massa M colocada no ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ é
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^3}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$
   - O *campo eléctrico* gerado por uma carga q colocada na origem de $\mathbb{R}^3$ é dado pela *lei de Coulomb*
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^3}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$
(ε_0 é a constante eléctrica).

5. (espaço afim) Um *espaço afim* modelado sobre o espaço vetorial $\mathbf{V}$ é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de uma aplicação $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$
$$P, Q \mapsto \vec{PQ}$$
que satisfaz os axiomas

EA1 para cada $P \in \mathcal{A}$ e cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existe um único $Q \in \mathcal{A}$ tal que $\vec{PQ} = \mathbf{v}$

EA2 para quaisquer $P, Q, R \in \mathcal{A}$,
$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

   - Verifique que o conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da aplicação $P, Q \mapsto Q - P$ é um espaço afim modelado sobre o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$.

6. (subespaços e geradores) Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial real. Um subconjunto não vazio $W \subset \mathbf{V}$ que é também um espaço vetorial (ou seja, tal que $w + w' \in W$ e $\lambda w \in W$ para todos os $w, w' \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$) é dito *subespaço (linear/vetorial)* de $\mathbf{V}$. Se $S \subset \mathbf{V}$ é um subconjunto de $\mathbf{V}$, o conjunto $\mathrm{Span}(S)$ das combinações lineares finitas
$$\lambda^1\mathbf{s}_1 + \lambda^2\mathbf{s}_2 + \dots + \lambda^m\mathbf{s}_m \qquad \mathbf{s}_i \in S\,,\ \lambda^i \in \mathbb{R}$$
é um subsespaço de $\mathbf{V}$, dito subespaço *gerado* por S. O espaço linear $\mathbf{V}$ tem "dimensão finita" se admite um conjunto finito de geradores.

- Se X e Y são subespaços de $\mathbf{V}$, então
$$X+Y := \{\mathbf{x}+\mathbf{y} \text{ com } \mathbf{x}\in X,\, \mathbf{y}\in Y\}$$
é um subespaço de $\mathbf{V}$.
- Se $X_1, X_2, \dots$ são subespaços de $\mathbf{V}$, então
$$\bigcap_i X_i := \{\mathbf{x} \text{ t.q. } \mathbf{x}\in X_i\ \forall i\}$$
é um subespaço de $\mathbf{V}$.
- Dados os números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, o conjunto dos vetores $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ tais que
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$
é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$.
- Se V é um subespaço do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, então
$$V^\perp := \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \text{ t.q. } \langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}\in V\}$$
é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
- Verifique que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Verifique que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, que é um subespaço de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$, que é um subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Verifique que $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ é um supespaço de $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, que é um subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Determine os subespaços gerados por
$$(1,2) \qquad (-1,-2) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$
$$(0,1,0) \qquad (0,0,1) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$
$$\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \qquad \mathbf{i}+\mathbf{j} \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$
$$\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\} \qquad \text{em } \mathbb{R}^\mathbb{R}$$
$$t \qquad t^2 \qquad \text{em } \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$$
$$e^t \qquad e^{-t} \qquad \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
- O conjunto b das sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitadas é um subespaço do espaço das sucessões reais $\mathbb{R}^\infty$? E o conjunto c das sucessões convergentes? E o conjunto c_0 das sucessões convergentes tais que $x_n \to 0$?
- O espaço das funções não negativas, i.e. tais que $f(t)\geq 0\ \forall t$, é um subespaço do espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
- Os conjuntos das funções pares e ímpares, definidos por
$$\mathcal{F}_\pm(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \text{t.q. } f(t) = \pm f(-t) \quad \forall t\in\mathbb{R}\},$$
são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? Mostre que cada $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é uma soma $f = f_+ + f_-$ com $f\pm \in \mathcal{F}_\pm(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- [Ap69] **15.9**.

7. (conjuntos livres/linearmente independentes) Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear. O conjunto $S\subset\mathbf{V}$ é *livre/(linearmente) independente* se gera cada vetor de $\mathrm{Span}(S)$ duma única maneira, ou seja, se gera o vetor nulo $\mathbf{0}$ duma única maneira, i.e. se quaisquer que sejam os elementos distintos $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m \in S$,
$$\boxed{\lambda^1\mathbf{s}_1 + \lambda^2\mathbf{s}_2 + \cdots + \lambda^m\mathbf{s}_m = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda^i = 0 \quad \forall i = 1,2,\dots,m}$$
Caso contrário, o conjunto é dito *(linearmente) dependente*.

- Verifique se os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes

$$(1,2) \qquad (-1,2) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$

$$(1,1,0) \qquad (0,1,1) \qquad (1,0,1) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$(1,2,3) \qquad (2,3,4) \qquad (3,4,5) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$(1,0,0,0) \qquad (1,1,0,0) \qquad (1,1,1,0) \qquad (1,1,1,1) \qquad \text{em } \mathbb{R}^4$$

$$\cos t \qquad \sin t \qquad \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$\cos^2 t \qquad \sin^2 t \qquad 1/2 \qquad \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$1 \qquad t \qquad t^2 \qquad \text{em } \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$$

$$(1,-1,1,-1,1,-1,\dots) \qquad (1,1,1,1,1,1,\dots) \qquad \text{em } \mathbb{R}^\infty$$

- [Ap69] **15.9**.

8. (bases e dimensão) Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear de dimensão finita. Uma *base* de $\mathbf{V}$ é um conjunto livre de geradores de $\mathbf{V}$, ou seja, um conjunto ordenado $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ de vetores tal que cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ admite uma e uma única representação

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{b}_1 + v^2\mathbf{b}_2 + \cdots + v^n\mathbf{b}_n$$

(os números v^i são as "componentes do vetor $\mathbf{v}$ relativamente à base $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$"). A *dimensão* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$ do espaço linear $\mathbf{V}$ (de dimensão finita) é o número de elementos de uma base. Se $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ é uma base ordenada do espaço linear real $\mathbf{V}$, então a aplicação

$$\mathbf{V} \ni \mathbf{v} = v^1\mathbf{b}_1 + v^2\mathbf{b}_2 + \cdots + v^n\mathbf{b}_n \mapsto (v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$$

define um isomorfismo $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$.

- Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x = y\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x+y+z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x+y = 0 \text{ e } y+z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x-2y+z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x+y+z = 0 \text{ e } z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

- Verifique que

$$1 \qquad t \qquad t^2 \qquad t^3 \qquad \dots \qquad t^n$$

  é uma base do espaço $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$. Qual a dimensão de $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$?
- Determine as coordenadas do polinómio $f(t) = (1-t)^2$ relativamente à base ordenada $(1, t, t^2)$ de $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.
- [Ap69] **15.9**.

8 Formas lineares

1. (linearidade) Se cada kilo de $\heartsuit$ custa A euros e cada kilo de $\spadesuit$ custa B euros, então a kilos de $\heartsuit$ e b kilos de $\spadesuit$ custam $aA + bB$ euros, ou seja, a função "preço" P satisfaz

$$P(a\heartsuit + b\spadesuit) = aP(\heartsuit) + bP(\spadesuit)$$

Esta propriedade é chamada *linearidade*.

- Dê exemplos de funções lineares.
- Dê exemplos de funções não lineares.

2. (formas lineares, espaço dual) Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear real (ou complexo). Uma função real $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ (ou complexa $f : \mathbf{V} \to \mathbb{C}$) é dita *aditiva* se $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$

$$\boxed{f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})}$$

e é dita *homogénea* se $\forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$)

$$\boxed{f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})}$$

Uma função real $\boldsymbol{\xi} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ (ou complexa $\boldsymbol{\xi} : \mathbf{V} \to \mathbb{C}$) aditiva e homogénea, ou seja, tal que

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) + \mu\boldsymbol{\xi}(\mathbf{w})}$$

é dita *forma linear*, ou *covetor* (ou *funcional linear* quando $\mathbf{V}$ é um espaço de funções). Uma notação simétrica para o valor da forma linear ξ sobre o vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle := \boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) \,.$$

O espaço $\mathbf{V}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}, \mathbb{C})$) das formas lineares, dito *espaço dual (algébrico)* de $\mathbf{V}$, é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e o produto por um escalar são definidos por

$$\langle \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} \rangle := \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle \lambda\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle := \langle \boldsymbol{\xi}, \lambda\mathbf{v} \rangle$$

respetivamente, e a forma nula $\mathbf{0}^* \in \mathbf{V}^*$ é definida por $\langle \mathbf{0}^*, \mathbf{v} \rangle = 0\ \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Se o espaço vetorial $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base de $\mathbf{V}$ (por exemplo a base canónica de $\mathbb{R}^n$), então cada forma linear $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ é determinada pelos seus valores $\xi_i := \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_i \rangle$ nos vetores da base, pois

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \boldsymbol{\xi}, v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + \dots + v^n\mathbf{e}_n \right\rangle = \xi_1 v^1 + \xi_2 v^2 + \dots + \xi_n v^n \,.$$

Portanto, também $\mathbf{V}^*$ tem dimensão finita, e uma base de $\mathbf{V}^*$, dita *base dual*, é o conjunto ordenado dos covetores $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ definidos por [8]

$$\left\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \right\rangle = \delta^i{}_j$$

As coordenadas da forma linear $\boldsymbol{\xi} = \xi_1\mathbf{e}^1 + \xi_2\mathbf{e}^2 + \dots + \xi_n\mathbf{e}^n$ relativamente à base dual são os númeors $\xi_i = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_i \rangle$, assim que $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle = \sum_i \xi_i v^i$.

Para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, a função $\xi \mapsto \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle$ é uma forma linear em $\mathbf{V}^*$, e portanto existe um homomorfismo injetivo de $\mathbf{V}$ em $(\mathbf{V}^*)^*$. Se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, então todas as formas lineares $g \in (\mathbf{V}^*)^*$ podem ser representadas como $g(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle$ para algum $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (basta definir $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ com $v^i = g(\mathbf{e}^i)$), e portanto o espaço dual do espaço dual é isomorfo a $(\mathbf{V}^*)^* \approx \mathbf{V}$ (mas o isomorfismo não é canónico, depende da escolha de uma base!).

[8] O *símbolo de Kronecker* é definido por

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- Diga se as seguintes funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são ou não lineares.

$$x \mapsto 3x \qquad x \mapsto 2x - 1 \qquad x \mapsto \sin(2\pi x)$$

$$(x, y) \mapsto 3x - 5y \qquad (x, y) \mapsto x^2 - xy$$

$$(x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z \qquad (x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z + 8$$

$$(x, y, z) \mapsto 0 \qquad (x, y, z) \mapsto \sqrt{3}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto 0 \qquad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto 66$$

- Mostre que as funções lineares (ou apenas homogéneas) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as funções $f(x) = \lambda x$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Mostre que, dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, a aplicação

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$.

3. (wild additive functions in the real line) For functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, homogeneity implies additivity, since $x + y = (1 + y/x)\, x$ (if $x \neq 0$, of course), and therefore an homogeneous function satisfies

$$f(x + y) = f((1 + y/x)\, x) = (1 + y/x) f(x) = f(x) + (y/x) f(x) = f(x) + f(y)\,.$$

Surprisingly, there exist additive functions which are not homogeneous (hence not linear), at least if we accept the axiom of choice. Indeed, additivity only implies linearity on "rational lines" $\mathbb{Q}x \subset \mathbb{R}$, i.e.

$$f(rx) = r f(x) \qquad \forall\, r = p/q \in \mathbb{Q} \text{ and } \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Therefore, if we could choose a different slope $\lambda_{\mathbb{Q}x}$, hence a different homogeneous function $rx \mapsto \lambda_{\mathbb{Q}x} rx$, for any orbit $\mathbb{Q}x$ of the quotient space $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{R}$, the resulting function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ would be additive but not homogeneous. Any such wild additive but not homogeneous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cannot be continuous, and indeed has a dense graph.

- Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an homogeneous function, and $x \in \mathbb{R}$. For $r = p/q \in \mathbb{Q}$ with $p, q \in \mathbb{Z}$ and $q \neq 0$, show that $f(rx) = f(px/q) = pf(x/q)$ and also $f(x) = f(qx/q) = qf(x/q)$. Deduce that $f(rx) = rf(x)$ for all $r \in \mathbb{Q}$.
- Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an additive but not homogeneous function, so that there exists two points $a, b \in \mathbb{R}$ where $f(a)/a \neq f(b)/b$. This implies that $\mathbf{v} = (a, f(a))$ and $\mathbf{w} = (b, f(b))$ are linearly independent vectors, hence a basis, of $\mathbb{R}^2$. From $\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w} = \mathbb{R}^2$, deduce that the "rational plane" $\mathbb{Q}\mathbf{v} + \mathbb{Q}\mathbf{w}$ is dense in $\mathbb{R}^2$, i.e. ant point $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ may be approximated with arbitrary precision by a point in $\mathbb{Q}\mathbf{v} + \mathbb{Q}\mathbf{w}$, i.e. for any $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ and any $\varepsilon > 0$ there exist rationals $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}$ such that $\|\mathbf{r} - (\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{w})\| < \varepsilon$. Use again the additivity of f to show that this implies the existence of a point $c \in \mathbb{R}$ such that $\|\mathbf{r} - (c, f(c)\| < \varepsilon$.

4. (formas lineares no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) Uma forma linear $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^*$ é determinada pelos seus valores $\xi_i := \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_i \rangle$ nos vetores da base canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, pois,

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \sum_i \xi_i x^i\,.$$

Portanto, se $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$$

A correspondência que associa a forma $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$ ao vetor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo $\mathbb{R}^n \approx (\mathbb{R}^n)^*$ entre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o seu dual $(\mathbb{R}^n)^*$ (que depende da estrutura euclidiana, ou seja, do produto escalar euclidiano!).

- Determine o vetor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ que define as seguintes formas lineares

$$x \mapsto 3x \qquad (x,y) \mapsto 0$$

$$(x,y) \mapsto 5x + 9y \qquad (x,y,z) \mapsto -3x + 7y - z$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto 3x_k \qquad \text{com } 0 \leq k \leq n$$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(\mathbf{i}) = 5$ e $f(\mathbf{j}) = -2$. Determine $f(x,y)$.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(\mathbf{i}) = -3$, $f(\mathbf{j}) = 1$ e $f(\mathbf{k}) = 7$. Determine $f(x,y,z)$.

5. (núcleo e hiperplanos) O *núcleo/espaço nulo* (em inglês *kernel*) da forma linear $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ é o subespaço vetorial

$$\boxed{\ker(\boldsymbol{\xi}) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = 0\} \subset \mathbf{V}\,.}$$

Se $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}'$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \backslash \ker(\boldsymbol{\xi})$ (i.e. um vetor tal que $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$), então cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ pode ser representado de uma única maneira como

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w} \qquad \text{com} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} \in \ker(\boldsymbol{\xi})\,.$$

Basta escolher $\lambda = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle \,/\, \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle$. Portanto, o núcleo $\ker(\boldsymbol{\xi})$ de uma forma $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}'$ é um *hiperplano* do espaço linear $\mathbf{V}$, ou seja, um subespaço linear di “co-dimensão” 1. Em particular, se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita,

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \ker(\boldsymbol{\xi}) + 1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}}$$

O *hiperplano afim* que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e é paralelo ao hiperplano $\ker(\boldsymbol{\xi})$ é

$$\mathbf{a} + \ker(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\} \qquad \text{onde } \lambda = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{a} \rangle\ .$$

- Mostre que o núcleo de uma forma linear $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ é um subespaço linear de $\mathbf{V}$.
- Uma “equação linear”

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n xn = b$$

define um hiperplano afim em $\mathbb{R}^n$. Mostre que o hiperplano afim é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ sse $b = 0$.

6. (interseções de hiperplanos/sistemas homogéneos) Se $\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^k \in \mathbf{V}^*$ são k formas lineares independentes num espaço linear de dimensão finita $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$, então a interseção dos núcleos $\mathbf{W} = \ker(\boldsymbol{\xi}^1) \cap \ker(\boldsymbol{\xi}^2) \cap \cdots \cap \ker(\boldsymbol{\xi}^k)$, ou seja o conjunto dos vetores $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ que resolvem o “sistema homogéneo”

$$\left\langle \boldsymbol{\xi}^1, \mathbf{x} \right\rangle = 0\,, \quad \left\langle \boldsymbol{\xi}^2, \mathbf{x} \right\rangle = 0\,, \quad \dots \quad \left\langle \boldsymbol{\xi}^k, \mathbf{x} \right\rangle = 0\,,$$

é um subespaço vetorial de co-dimesão k, e portanto de dimensão $n-k$. De fato, se completamos o sistema de formas independentes até formar uma base $\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^k, \boldsymbol{\xi}^{k+1}, \dots, \boldsymbol{\xi}^n$ de $\mathbf{V}^*$, e se $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ denota a base dual de $\mathbf{V}$ (assim que $\left\langle \boldsymbol{\xi}^i, \mathbf{b}_j \right\rangle = \delta^i{}_j$), então nas coordenadas relativas a esta base o sistema é

$$x^1 = 0\,, \quad x^2 = 0\,, \quad \dots \quad x^k = 0\,,$$

e as soluções são todos os vetores $\mathbf{x} = \sum_{i=k+1}^n x^i \mathbf{b}_i \in \mathbf{W} \approx \mathbb{R}^{n-k}$.

7. (integral) O integral

$$f \mapsto I(f) := \int_a^b f(t)\, dt$$

é uma forma linear no espaço $\mathcal{I}([a,b], \mathbb{R})$ das funções integráveis no intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

8. (delta de Dirac) A *delta de Dirac* (no ponto 0), definida por

$$f \mapsto \delta(f) := \text{“} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt \text{ ”} = f(0)\,,$$

é uma forma linear no espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O núcleo de δ é o conjunto das funções contínuas tais que $f(0) = 0$, que é um hiperplano do espaço $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

9. (plane waves and Pontryagin dual) A *plane wave* is a complex valued function $e_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ defined by

$$e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i2\pi\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$$

for some “wave vector” $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ (an alternative definition omits the factor 2π). For example, a plane wave

$$e^{i2\pi(\omega t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$$

in the space-time $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ with coordinates $(t, \mathbf{r})$, describes a wave traveling in the direction of the vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ with frequency ω (observe that vectors and covectors have different dimensions, e.g. if t is time then ω is the inverse of a time, hence the distinction is real!).

Any plane wave is a continuous (actually infinitely differentiable) homeomorphism from the abelian (additive) group $\mathbb{R}^n$ into the abelian (multiplicative) group $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$, i.e.

$$e_\xi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_\xi(\mathbf{x})\, e_\xi(\mathbf{y})$$

The set $\widehat{\mathbb{R}^n}$ of all plane waves, or, technically, the set of all continuous homomorphisms $e_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}$, equipped with the group law

$$(e_\xi \cdot e_{\xi'})(\mathbf{x}) = e_\xi(\mathbf{x})\, e_{\xi'}(\mathbf{x})\,,$$

is called *Pontryagin/topological dual* of the abelian (topological) group $\mathbb{R}^n$, and, as an abelian group, it is isomorphic to $\widehat{\mathbb{R}^n} \approx (\mathbb{R}^n)^*$, the isomorphism being $e_\xi \leftrightarrow \boldsymbol{\xi}$.

10. (lattices and reciprocal lattices) A *(Bravais) lattice* is an additive subgroup

$$\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{v}_n := \{\mathbf{v} = n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + \dots n_n\mathbf{v}_n \text{ with } n_1, n_2, \dots, n_n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n$$

of the additive group $\mathbb{R}^n$, generated by n linearly independent vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, called *primitive vectors*. A plane wave $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i2\pi\xi\cdot\mathbf{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ is Λ-periodic, i.e. satisfies $e_\xi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = e_\xi(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ and all $\mathbf{v} \in \Lambda$, provided the wave vector $\boldsymbol{\xi}$ belongs to the *reciprocal lattice*

$$\Lambda_* := \{\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ s.t. } \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \Lambda\} \subset (\mathbb{R}^n)^*\,,$$

isomorphic to the *dual subgroup*

$$\Lambda^\perp := \{e_\xi \in \widehat{\mathbb{R}^n} \text{ s.t. } e_\xi(\mathbf{v}) = 1 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \Lambda\} \subset \widehat{\mathbb{R}^n}\,.$$

For example, the reciprocal lattice of the one-dimensional lattice $\Lambda = \lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, with $\lambda > 0$, is $\Lambda_* = \lambda^{-1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^*$. Physicists are mainly interested in lattices $\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_3 \subset \mathbb{R}^3$ generated by three independent vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, since they describe (the positions of atoms in) crystals. The volume of a *fundamental domain* (or *primitive unit cell*) for such a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ (a domain $F \subset \mathbb{R}^3$ such that $\cup_{\mathbf{v}\in\Lambda} T_\mathbf{v}(F) = \mathbb{R}^3$, and such that the different images $T_\mathbf{v}(F)$ and $T_{\mathbf{v}'}(F)$ for $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ in Λ have disjoint interiors), or, equivalently, the volume of the quotient space $\mathbb{R}^3/\Lambda$, is

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^3/\Lambda) = |\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)|$$

The reciprocal lattice is the lattice $\Lambda_* = \mathbb{Z}\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbb{Z}\boldsymbol{\xi}_2 + \mathbb{Z}\boldsymbol{\xi}_3 \subset (\mathbb{R}^3)^*$ generated by the covectors

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1)} \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}$$

(under the identification $(\mathbb{R}^3)^* \approx \mathbb{R}^3$ induced by the Euclidian scalar product).

11. (conjuntos convexos) Um subconjunto $C \subset \mathbf{V}$ de um espaço vetorial real é *convexo* se contém o segmento entre cada par dos seus pontos, i.e. se

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \qquad \Rightarrow \qquad (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in C \quad \forall t \in [0,1]$$

O menor convexo que contém (ou seja, a interseção de todos os convexos que contêm) um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *envoltória/invólucro/fecho convexa/o* de A, e denotado por $\mathrm{Conv}(A)$. Em particular, o menor convexo que contém o conjunto finito de pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$ é

$$\mathrm{Conv}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}) = \{t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_m\mathbf{x}_m \quad \text{com } t_i \geq 0 \text{ e } t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 1\}$$

- As bolas $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}$ e $\overline{B_r(\mathbf{x})} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ são convexas.
- Dados um vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $b \in \mathbb{R}$, os semi-espaços $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \geq b\}$ são convexos.
- Dada uma forma $\xi \in \mathbf{V}^*$ e um escalar $b \in \mathbb{R}$, os semiespaços $\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \xi, \mathbf{v} \rangle \geq b\}$ são convexos.
- A envoltória convexa de três pontos, A, B e C do plano $\mathbb{R}^2$ é o triângulo de vértices A, B e C.
- Se $C \subset \mathbf{V}$ é convexo, então também $T_{\mathbf{a}}(C)$ e $H_\lambda(C)$ são convexos, $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Se $\xi \in \mathbf{V}^*$, então $\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \xi(\mathbf{v}) < 0\}$ é convexo.

12. (medidas de probabilidades) Uma *(medida de) probabilidade* num "espaço dos acontecimentos" finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ é uma função $\mathbb{P} : 2^\Omega := \{\text{subconjuntos } A \subset \Omega\} \to [0,1]$ aditiva, i.e. tal que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \qquad \text{se } A \cap B = \emptyset\,,$$

(a probabilidade do evento "A ou B" é igual à probabilidade do evento A mais a probabilidade do evento B se A e B são eventos mutuamente exclusivos) que verifica $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a probabilidade do "evento impossível" é nula) e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (a probabilidade do "evento certo" é um).

Cada vetor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas estão limitadas por $0 \leq p_i \leq 1$ e tal que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ define uma probabilidade $\mathbb{P}$, por meio de

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

ou seja, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}$. Portanto, o espaço das medidas de probabilidades em Ω é o fecho convexo dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, chamado *"simplex"*

$$\Delta^{n-1} := \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \text{ com } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ e } p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n\,.$$

9 Transformações lineares

1. (transformações lineares) Uma *transformação/aplicação/operador linear* entre os espaços vetoriais reais (ou complexos) $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ é uma função $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ aditiva e homogénea, i.e. tal que
$$L(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}') \qquad \text{e} \qquad L(\lambda \mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{v})$$
ou seja, tal que
$$\boxed{L(\lambda \mathbf{v} + \lambda' \mathbf{v}') = \lambda L(\mathbf{v}) + \lambda' L(\mathbf{v}')}$$
$\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\forall \lambda \in \mathbb{C}$).
O espaço $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$) das transformações lineares de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{W}$ é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e a multiplicação por um escalar são definidas por
$$(L + L')(\mathbf{v}) := L(\mathbf{v}) + L'(\mathbf{v}) \qquad\qquad (\lambda L)(\mathbf{v}) := \lambda L(\mathbf{v})$$
Em particular, é um espaço linear o espaço $\mathrm{End}(\mathbf{V}) := \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ dos *endomorfismos* de $\mathbf{V}$.
Uma transformação linear bijetiva $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é dita *isomorfismo (linear)* entre os espaços lineares $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$.

- Se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é uma transformação linear, então $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $L(-\mathbf{v}) = -L(\mathbf{v})$.
- Uma transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ envia retas afins $\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbf{V}$ em retas afins $\mathbf{b} + \mathbb{R}\mathbf{w} \subset \mathbf{W}$, se $\mathbf{b} = L(\mathbf{a})$ e $\mathbf{w} = L(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, ou em pontos $\mathbf{b}$, se $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Em particular, envia retas $\mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbf{V}$ passando pela origem em retas $\mathbb{R}\mathbf{w} \subset \mathbf{W}$ passando pela origem.
- Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por
$$(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (T^1(x^1, x^2, \dots, x^n), T^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, T^m(x^1, x^2, \dots, x^n))$$
é linear sse todas as suas "coordenadas" $T^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, m$, são lineares.
- A transformação *identidade* $\mathbf{1}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$, e transformação *nula* $\mathbf{0}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$, são lineares.
- Diga se as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são lineares.
$$(x, y) \mapsto (3x - 5y, x - y) \qquad (x, y) \mapsto (x^2, xy)$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, y + z, 2) \qquad (x, y, z) \mapsto (x, y + z, 0)$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, z + y, 3x + 2y - z) \qquad (x, y, z) \mapsto (1, 2, 3)$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (0, 0, 1) \qquad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$
- Diga se as seguintes aplicações de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são lineares.
$$T \text{ transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta } y = 0$$
$$T \text{ transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta } y = x$$
$$T \text{ transforma o ponto de coordenadas polares } (r, \theta) \text{ no ponto de coordenadas polares} (2r, \theta)$$
$$T \text{ transforma o ponto de coordenadas polares } (r, \theta) \text{ no ponto de coordenadas polares } (r, \theta + \pi/2)$$
- Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $L(1, 1) = (1, 4)$ e $L(2, -1) = (-2, 3)$. Determine $L(5, -1)$ (observe que $1 + 2 \cdot 2 = 5$ e $1 + 2 \cdot (-1) = -1$).
- Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$T(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad T(\mathbf{j}) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$
- Se $X \subset \mathbf{V}$ é um subespaço linear de $\mathbf{V}$ e $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é uma transformação linear, então a imagem $L(X)$ é um subespaço linear de $\mathbf{W}$.

- As translações de $\mathbb{R}^n$, as transformações $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, são transformações lineares?
- As homotetias de $\mathbb{R}^n$, as transformações $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, são transformações lineares?
- [Ap69] **16.4**.

2. (núcleo e imagem) Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ uma transformação linear. O *núcleo/espaço nulo* (em inglês, *kernel*) de L é o subespaço vetorial

$$\boxed{\ker(L) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbf{V}}$$

A *imagem* de L é o subespaço vetorial

$$\boxed{\mathrm{im}(L) := L(\mathbf{V}) = \{L(\mathbf{v}) \in \mathbf{W} \text{ com } \mathbf{v} \in \mathbf{V}\} \subset \mathbf{W}}$$

A dimensão do núcleo é dita *nulidade* de L, e a dimensão da imagem é dita *ordem* de L. Se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, então também a imagem $L(\mathbf{V})$ tem dimensão finita e

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \ker(L) + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(L) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}}$$

- Mostre que $\ker(L)$ é um subespaço de $\mathbf{V}$ e que $\mathrm{im}(L)$ é um subespaço de $\mathbf{W}$.
- Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem das seguintes transformações lineares

$$L(x,y) = (x+y, x-y) \qquad L(x,y) = (y,-x) \qquad L(x,y) = (x+y, 3x-2y)$$

$$L(x,y,z) = (2x, 3y, 0) \qquad L(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$$

$$L(x,y,z) = (0,0,0) \qquad L(x,y,z) = (x,y)$$

- Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $x = 0$
- Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à origem.
- [Ap69] **16.14**.

3. (operadores) Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear (de dimensão não necessariamente finita!). Um *operador (linear)* em $\mathbf{V}$ é uma transformação linear $A : \mathbf{D} \to \mathbf{V}$ definida num subespaço linear $\mathbf{D} \subset \mathbf{V}$, dito *domínio* do operador A (esta definição é importante em análise, quando $\mathbf{V}$ é um espaço de dimensão infinita e o operador apenas pode ser definido num subespaço próprio de $\mathbf{V}$). Um subespaço linear $\mathbf{W} \subset \mathbf{D}$ é *invariante* se $A(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$ (ou seja, se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica $A\mathbf{v} \in \mathbf{W}$), e portanto a restrição de A a $\mathbf{W}$ é um endomorfismo $A|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$.

4. (operadores derivação e multiplicação) O operador *derivação* envia uma função derivável $f(x)$ na função

$$(Df)(x) := f'(x)\,.$$

Pode ser pensado como um operador $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ou também como un endomorfismo $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ do espaço linear das funções $f(x)$ infinitamente diferenciáveis. O operador *multiplicação* envia uma função $f(x)$ na função

$$(Xf)(x) := x \cdot f(x)\,.$$

- Determine o núcleo do operador derivação $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
- O subespaço $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómio é um subespaço invariante de $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. O subespaço $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau n é um subespaço invariante do operador derivação $D : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$?

5. (operador primitivação) O operador *primitivação* envia uma função integrável (na reta real ou num intervalo da reta) $f(x)$ na função

$$(Pf)(x) := \int_c^x f(t)\,dt$$

Pode ser pensado como um endomorfismo $P : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ do espaço linear das funções contínuas.

   - Determine o núcleo $\ker(P)$ e a imagem $\mathrm{im}(P) = P(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$.

6. (Laplaciano, equação de Laplace, funções harmónicas) O *Laplaciano* (ou *operador de Laplace*) no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o operador diferencial $\Delta := \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$, definido, em coordenadas cartesianas (ou seja, relativamente à uma base ortonormal), por

$$(\Delta f)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^n)^2}(\mathbf{x})$$

se $f(\mathbf{x}) = f(x^1, x^2, \ldots, xn)$ é uma função real de classe C^2 defnida num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O Laplaciano pode ser pensado como um operador $\Delta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. A *equação de Laplace* para o campo escalar $f(\mathbf{x})$, definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é

$$\Delta f = 0$$

As soluções da equação de Laplace, ou seja, os campos escalares contidos no núcleo do Laplaciano, são ditas *funções harmónicas*.

   - Quais funções satisfazem a equação de Laplace $f''(x) = 0$ na reta?
   - Determine as soluções da equação de Laplace $f''(x) = 0$ no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira $f(a) = c$ e $f(b) = d$.
   - Verifique que
   $$f(\mathbf{r}) = \log \|\mathbf{r}\|\,,$$
   é uma solução da equação de Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$ em $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$.
   - Verifique que (o potencial elétrico/gravitacional gerado por uma carga/massa unitária colocada na origem do espaço 3-dimensional)
   $$f(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|\,,$$
   é uma solução da equação de Laplace $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ em $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$.

7. (composição) A composição de duas transformações lineares $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ e $M : \mathbf{W} \to \mathbf{Z}$, definida por $(ML)(\mathbf{v}) := M(L(\mathbf{v}))$, é uma transformação linear. Em particular, a composição de dois endomorfismos de um espaço vetorial $\mathbf{V}$ é um endomorfismo de $\mathbf{V}$. A composição não é comutativa! Ou seja, em geral, não há razão para que LM seja igual a ML. Os endomorfismos $L, M \in \mathrm{End}(\mathbf{V})$ *comutam/são permutáveis* se $LM = ML$. A obstrução é o *comutador*, definido por
$$[L, M] := LM - ML$$

8. (álgebra de Weyl-Heisenberg-Schrödinger) A álgebra do grupo de Weyl-Heisenberg[9] (em dimensão um) é gerada pelos operadores *multiplicação* e *derivação*

$$(Xf)(x) := xf(x) \qquad \text{e} \qquad (Df)(x) := f'(x)\,,$$

definidos, por exemplo, no *espaço de Schwarz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ das funções complexa $f(x)$ infinitamente diferenciáveis tais que todas as derivadas decrescem mais rapidamente do que qualquer polinómio. Os operadores X e $P := -i\hbar D$ (onde $\hbar$ é a constante de Planck reduzida) representam a *posição* e o *momento*, respetivamente, de uma partícula quântica livre na

[9] Os físicos dizem "grupo de Weyl", que era um matemático (colega de Einstein em Zurich e depois em Princeton), e os matemático dizem "grupo de Heisenberg", que era um físico!

"representação de Schrödinger". Os operadores X e D, e portanto X e P, não comutam, pois

$$[X, P] = i\hbar$$

e está é a causa do "princípio de incerteza de Heisenberg".

9. (transformações lineares invertíveis) A transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é *invertível* se é *biunívoca* (i.e. a equação $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ admite uma e uma única solução para cada $\mathbf{y} \in \mathrm{im}(L)$), $\Leftrightarrow$ existe uma transformação linear $L^{-1} : \mathrm{im}(L) \to \mathbf{V}$ (a *inversa* de L) tal que $L^{-1}L = \mathbf{1}_{\mathbf{V}}$ e $LL^{-1} = \mathbf{1}_{\mathrm{im}(L)}$ $\Leftrightarrow$ o núcleo de L é trivial, i.e. $\ker(L) = \{\mathbf{0}\}$.

   Em particular, se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, a transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é invertível $\Leftrightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(L) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$ $\Leftrightarrow$ L transforma vetores independentes de $\mathbf{V}$ em vetores independentes de $\mathbf{W}$ $\Leftrightarrow$ L transforma bases de $\mathbf{V}$ em bases de $\mathrm{im}(L)$.

   Os *automorfismos* $\mathrm{Aut}(\mathbf{V})$ de um espaço linear $\mathbf{V}$ são os endomorfismos $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ invertíveis.

   - Diga se L é biunívoca e, caso afirmativo, determine a imagem $\mathrm{im}(L)$ e a transformação inversa L^{-1}.

   $$L(x, y) = (x, x) \qquad L(x, y) = (y, x)$$
   $$L(x, y) = (x - y, x + y) \qquad L(x, y) = (0, y)$$
   $$L(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x) \qquad L(x, y, z) = (3x, 2y, z)$$
   $$L(x, y, z) = (y, z, 0) \qquad L(x, y, z) = (x + y + z, y, z)$$
   $$L(x, y) = (x, 0, y) \qquad L(x, y) = (x - x, x + y, 0)$$

   - [Ap69] **16.8**.
   - Mostre que se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ é invertível então também L^n é invertível e $(L^n)^{-1} = (L^{-1})^n$.
   - Mostre que se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ e $M : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ comutam, então também as inversas L^{-1} e M^{-1} comutam, e $(LM)^n = L^n M^n$.
   - Considere o *operador derivação* $D : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, definido por $f(t) \mapsto f'(t)$, e o *operador integração* $I : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, definido por $f(t) \mapsto \int_0^t f(s)ds$. Mostre que $DI = \mathbf{1}_{\mathrm{Pol}(\mathbb{R})}$ mas $ID \neq \mathbf{1}_{\mathrm{Pol}(\mathbb{R})}$. Descreva o núcleo e a imagem de ID.
   - O operador $T : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, definido por $f(t) \mapsto t \cdot f(t)$, é invertível?
   - O operador *deslocamento* $\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definido por

   $$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots),$$

   é invertível?

10. (equações diferenciais ordinárias lineares) Uma *equação diferencial ordinária linear* de ordem n é uma lei

    $$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

    para a função $x(t)$, onde a_k são coeficientes (não necessariamente constantes) e $f(t)$ é uma função dada. Pode ser escrita como

    $$Lx = f$$

    se $L : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é o operador diferencial $L := a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$. A equação *homogénea* associada é a equação diferencial $Ly = 0$, ou seja,

    $$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0.$$

    O espaço das soluções da equação homogénea $Lz = 0$ é um subespaço vetorial $\mathbf{H} \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de dimensão finita, tipicamente $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$. Por exemplo, se os coeficientes a_k's são constantes, uma base de $\mathbf{H}$ é formada pelos exponenciais complexos $y_k(t) = e^{z_k t}$, onde $z_1, z_2, \dots, z_n$ são as raizes (distintas, no caso genérico!) do polinómio caraterístico $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. A "solução geral", ou seja, o ponto genérico de $\mathbf{H}$, é portanto uma combinação linear

$$c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} + \cdots + c_n e^{z_n t} .$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ coeficientes arbitrários (a cada raiz z de multiplicidade m corresponde um "quase-polinómio" $(c_1 + c_2 t + \cdots + c_p t^{m-1}) e^{zt}$, assim que a solução geral no caso não-genérico de raizes múltiplas é uma soma de quase-polinómios). Se $z(t)$ é uma solução (apenas uma!) de $Lz = f$, então o espaço das todas as soluções de $Lx = f$ é o espaço afim $z + \mathbf{H}$, formado pelos pontos

$$z(t) + c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} + \cdots + c_n e^{z_n t} .$$

10 Transformações lineares e matrizes

1. (espaço linear das matrizes) Uma *matriz* real (ou complexa) $m \times n$ é uma tabela

$$\boxed{A = ({a^i}_j) = \begin{pmatrix} {a^1}_1 & {a^1}_2 & \dots & {a^1}_n \\ {a^2}_1 & {a^2}_2 & \dots & {a^2}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {a^m}_1 & {a^m}_2 & \dots & {a^m}_n \end{pmatrix}}$$

de $m \cdot n$ números reais (ou complexos) dispostos em m linhas e n colunas. O número real (ou complexo) ${a^i}_j$ é dito *elemento/componente/entrada* ij da matriz A. O co-vetor e o vetor

$$\boxed{\mathbf{a}^i = ({a^i}_1, {a^i}_2, \dots, {a^i}_n) \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} {a^1}_j \\ {a^2}_j \\ \vdots \\ {a^m}_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m}$$

são ditos *i-ésima linha* e *j-ésima coluna* da matriz A, respetivamente. Se $n = m$, a matriz é dita "quadrada".

O espaço $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{m \cdot n}$ (ou $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^{m\cdot n}$) das matrizes reais (ou complexas) $m \times n$ é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e multiplicação por um escalar são definidas por

$$A + B := ({a^i}_j + {b^i}_j) \qquad \text{e} \qquad \lambda A := (\lambda {a^i}_j)$$

se $A = ({a^i}_j)$ e $B = ({b^i}_j) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. O elemento neutro é a "matriz nula" $0 = (0) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, cujas entradas são todas nulas, que satisfaz $A + 0 = A$ para toda a matriz A.

- Calcule $A + B$, $A - B$, $2A - 3B$ quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Verifique que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  é uma base do espaço linear $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- [Ap69] **16.16**.

2. (álgebra das matrizes) Se $A = ({a^i}_j) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = ({b^i}_j) \in \mathrm{Mat}_{n\times s}(\mathbb{R})$, o *produto (linhas por colunas)* AB é a matriz $AB = C = ({c^i}_j) \in \mathrm{Mat}_{m\times s}(\mathbb{R})$ definida por

$$\boxed{{c^i}_j = \textstyle\sum_{k=1}^n {a^i}_k \, {b^k}_j}$$

(ou seja, o elemento ${c^i}_j$ de $C = AB$ é o produto escalar ${c^i}_j = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{b}_j$ da i-ésima linha de A com a j-ésima coluna de B). A "matriz identidade" $\mathbf{1}_n \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz

$$\mathbf{1}_n = ({\delta^i}_j) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que satisfaz $\mathbf{1}_n A = A$ e $B\mathbf{1}_n = B$ para todas as matrizes A e B. O produto é "associativo",

$$\boxed{A(BC) = (AB)C}$$

e satisfaz as "propriedades distributivas" à esquerda e à direita,

$$\boxed{A(B+C) = AB + AC \qquad \text{e} \qquad (A+B)C = AC + BC}$$

- Calcule AB quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \mathbf{1}_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Existem matrizes $A \neq 0$ e $B \neq 0$ tais que $AB = 0$?
- [Ap69] **16.16**.

3. (transformações lineares e matrizes) Uma transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, definida num espaço de dimensão finita, é determinada pelos seus valores nos vetores de uma base de $\mathbf{V}$. De fato, sejam $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ uma base ordenada de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ uma base ordenada de $\mathbf{W} \approx \mathbb{R}^m$ (por exemplo, as bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente). Se definimos os números ${a^i}_j$ por

$$L(\mathbf{b}_j) = {a^1}_j\, \mathbf{c}_1 + {a^2}_j\, \mathbf{c}_2 + \cdots + {a^m}_j\, \mathbf{c}_m$$

com $j = 1, 2, \dots, n$, então o valor de L no vetor $\mathbf{x} = x^1\mathbf{b}_1 + x^2\mathbf{b}_2 + \cdots + x^n\mathbf{b}_n$ é

$$L(\mathbf{x}) = L\left(\sum_j x^j \mathbf{b}_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n {a^i}_j\, x^j\right) \mathbf{c}_i\,,$$

Portanto, as coordenadas do vetor $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ são

$$\boxed{y^i = \textstyle\sum_{j=1}^n {a^i}_j\, x^j \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, m\,.}$$

Se X e Y denotam os "vetores coluna" (matrizes com apenas uma coluna!)

$$X := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad Y := \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

e A denota a matriz

$$A := \begin{pmatrix} {a^1}_1 & {a^1}_2 & \dots & {a^1}_n \\ {a^2}_1 & {a^2}_2 & \dots & {a^2}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {a^m}_1 & {a^m}_2 & \dots & {a^m}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})\,,$$

então a transformação linear L é representada pela equação matricial

$$Y = AX\,,$$

ou seja, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \dots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \dots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m{}_1 & a^m{}_2 & \dots & a^m{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ \\ x^n \end{pmatrix}$$

Se uma segunda matriz $B \in \mathrm{Mat}_{p\times m}(\mathbb{R})$ define a transformação linear $M : \mathbf{W} \to \mathbf{Z}$ relativamente às bases $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ de $\mathbf{W} \approx \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_p$ de $\mathbf{Z} \approx \mathbb{R}^p$, então a composição $ML : \mathbf{V} \to \mathbf{Z}$, que é também uma transformação linear, é definida pela matriz produto $BA \in \mathrm{Mat}_{p\times n}(\mathbb{R})$. De fato, se as coordenadas de $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ são $y^k = \sum_j a^k{}_j\, x^j$ e as coordenadas de $\mathbf{z} = M(\mathbf{y})$ são $z^i = \sum_k b^i{}_k\, y^k$, então

$$z^i = \sum_{j,k} b^i{}_k\, a^k{}_j\, x^j \qquad i = 1, 2, \dots, p\,,$$

ou seja, se $Y = AX$ e $Z = BY$, então

$$Z = BAX\,.$$

- Determine a matriz que define a transformação

$$L(x,y) = (x-y, 2x-3y) \qquad L(x,y,z) = (3x+y-z, -x+2y+z)$$

$$L(x,y,z) = (3x,3y,3z) \qquad L(x,y) = (x+y, x-y, 2x-7y)$$

$$L(x,y,z) = (x,y) \qquad L(x,y,z) = (x,z)$$

- Determine a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determine a matriz 2×2 que define a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $x = 0$

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = -x$

transforma o ponto de coordenadas polares (r,θ) no ponto de coordenadas polares$(r/2,\theta)$

transforma o ponto de coordenadas polares (r,θ) no ponto de coordenadas polares $(r,\theta-\pi/2)$

- [Ap69] **16.12**.

4. (Einstein's notation) It is often important to take care of the distinction between vectors and co-vectors, and then different types of tensors, as well as to shorten formulas and computations. One possibility is the convention introduced by Einstein. We denote vectors using upper indices as $\mathbf{x} = (x^i) \in \mathbb{R}^n$, and denote co-vectors using lower indices as $\xi = (\xi_j) \in (\mathbb{R}^n)^*$. The pairing between a co-vector ξ and a vector $\mathbf{x}$ reads $\langle \xi, \mathbf{x}\rangle = \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n$, and is shortened as $\langle \xi, \mathbf{x}\rangle = \xi_i x^i$, Einstein's convention being that a repeated index which appear once as an upper index and once as a lower index implies summation. Using Einstein's sum convention, the coordinates of the image of a linear transformation represented by the matrix $T = (t^i_j)$ are given by $y^j = t^j{}_i\, x^i$. The composition of $T = (t^i{}_j)$ followed by $S = (s^i{}_j)$ is then represented by the matrix $ST = (s^i{}_k\, t^k{}_j)$.

5. (endomorfismos e matrizes quadradas) Fixada uma base (por exemplo, a base canónica de $\mathbb{R}^n$), o espaço linear $\mathrm{End}(\mathbf{V}) := \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ dos *endomorfismos* de um espaço linear $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ é isomorfo ao espaço linear $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes "quadradas" $n \times n$, os seus elementos sendo as transformações lineares

$$X \mapsto Y = AX \qquad \text{ou seja,} \qquad x^i \mapsto y^i = \sum_j a^i{}_j \, x^j$$

com $X \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. À composição de dois endomorfismos corresponde o produto de matrizes. Em particular, a n-ésima iterada $L^n = L \circ L \circ \cdots \circ L$ (n vezes) do endomorfismo $L : X \mapsto AX$ é representada pela *potência* n -ésima de A, definida recursivamente por

$$A^0 = \mathbf{1}_n \qquad \text{e} \qquad A^n = AA^{n-1} \qquad \text{se } n \geq 1\,.$$

A *diagonal* da matriz quadrada $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto ordenado $\{a^1{}_1, a^2{}_2, \ldots, a^n{}_n\}$, e o *traço* (em inglês, *trace*) de A é a soma dos elementos da diagonal,

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) := \textstyle\sum_i a^i{}_i = a^1{}_1 + a^2{}_2 + \cdots + a^n{}_n}$$

Uma matriz quadrada é "diagonal" se os elementos que não pertencem à diagonal são nulos, ou seja, se é da forma

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Determine a matriz da transformação "identidade" $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ e da transformação "nula" $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$.
- Determine a matriz da homotetia $\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e calcule o seu traço.
- Mostre que
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$
- Calcule A^0, A^1, A^2, A^3, ... , A^n , ... quando
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
- Determine as matrizes $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = 0$.
- Determine as matrizes $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = \mathbf{1}_2$.

6. (comutador) A composição de transformações lineares, e portanto o produto de matrizes, não são comutativos! Ou seja, em geral, $AB \neq BA$. As matrizes quadradas $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (e portanto os endomorfismos que representam), *comutam/são permutáveis* se $AB = BA$. A obstrução é o *comutador*, definido por

$$\boxed{[A, B] := AB - BA}$$

O comutador satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$\boxed{[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0}$$

- Mostre que cada matriz quadrada A comuta com si própria, i.e. $[A, A] = 0$.
- Mostre que duas matrizes diagonais comutam.

- Verifique se A e B comutam quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Considere as matrizes 2×2

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule $[E, E_+]$, $[E, E_-]$ e $[E_+, E_-]$.

7. (operadores e matrizes transpostas) O *operador transposto* do operador linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é o operador linear $L^* : (\mathbb{R}^m)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ definido por

$$\langle L^*\xi, \mathbf{x}\rangle := \langle \xi, L\mathbf{x}\rangle$$

se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in (\mathbb{R}^m)^*$. Se $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz que representa L relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, então a matriz que representa $L^* \in L((\mathbb{R}^m)^*, (\mathbb{R}^n)^*) \approx L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é a *matriz transposta* $A^t = (b_i j) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, definida por $b_i{}^j = a^j{}_i$ (ou seja, as linhas de A^t são as colunas de A e vice-versa). De fato, se $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ ten coordenadas $y^i = \sum_j a^i{}_j\, x^j$, então $\langle \xi, A\mathbf{x}\rangle = \sum_{i,j} \xi_i\, a^i{}_j\, x^j = \langle A^t\xi, \mathbf{x}\rangle$.

Uma matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é *simétrica* se $A = A^t$ e *anti-simétrica* se $A^t = -A$.

- Verifique que $(A^t)^t = A$.
- Mostre que $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.
- Calcule o operador transposto de $L(x, y) = (x + y, x - y)$.
- Mostre que, se A é uma matriz quadrada, $A+A^t$ é simétrica, e que $A-A^t$ é anti-simétrica. Deduza que cada matriz quadrada pode ser decomposta como soma $A = A_\mathrm{s} + A_\mathrm{a}$ de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.
- Mostre que o traço de uma matriz (quadrada) anti-simétrica é nulo.

8. (inversão de matrizes 2×2) A matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

representa o endomorfismo genérico do plano $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. A transformação L é invertível se para cada vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ é possível encontrar um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $L(x, y) = (\alpha, \beta)$, ou seja, resolver o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & \alpha \\ cx + dy & = & \beta \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} (ad - bc)\, x & = & d\alpha - c\beta \\ (ad - bc)\, y & = & -c\alpha + a\beta \end{array}\right.$$

(o segundo sistema é obtido ao retirar b vezes a segunda equação de d vezes a primeira equação, e depois ao retirar c vezes a primeira equação de a vezes a segunda equação). Portanto, a transformação L é invertível sse $\det A := ad - bc \neq 0$, e a sua inversa é a transformação linear

$$L^{-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{ad - bc}(d\alpha - c\beta, -c\alpha + a\beta)\,,$$

representada pela matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

9. (automorfismos e matrizes invertíveis) A matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é *não-singular/regular/invertível* se existe uma matriz quadrada $A^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, dita *inversa* de A, tal que

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{1}_n}$$

A transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, representada pela equação matricial $X \mapsto AX$, é invertível sse a matriz A é regular, e a sua inversa é a transformação linear $Y \mapsto A^{-1}Y$. Se $A = (a^i{}_j)$, então as entradas da inversa $A^{-1} = (b^i{}_j)$ satisfazem as n^2 equações lineares

$$\sum_k b^i{}_k\, a^k{}_j = \delta^i{}_j$$

Se A e B são regulares, então também AB é regular e a sua inversa é

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Se A é regular então também A^t é regular e

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

- Mostre que, se $A, B, \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $BA = \mathbf{1}_n \Rightarrow AB = \mathbf{1}_n$ (ou seja, uma inversa esquerda é também uma inversa direita, logo uma inversa).
- Diga se as seguintes matrizes são regulares e, caso afirmativo, calcule a inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- [Ap69] **16.20**.

10. (mudança de bases/coordenadas) Sejam $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n)$ duas bases do espaço vetorial $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$. Então existe uma matriz invertível $U = (u^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com inversa $U^{-1} = (v^i{}_j)$, tal que

$$\mathbf{b}'_j = \sum_i u^i{}_j\, \mathbf{b}_i \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b}_j = \sum_i v^i{}_j\, \mathbf{b}'_i\ .$$

Se (x^i) são as coordenadas do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ relativamente à base $\mathcal{B}$, então as coordenadas do vetor $\mathbf{x}$ relativamente à base $\mathcal{B}'$ são

$$\boxed{x'^i = \textstyle\sum_k v^i{}_j\, x^j \qquad \text{ou seja} \qquad x^i = \sum_j u^i{}_j\, x'^j}$$

pois $\mathbf{x} = \sum_j x^j \mathbf{b}_j = \sum_{j,k} v^i{}_j x^j \mathbf{b}'_i$. A matriz U é a matriz que realiza a mudança de coordenadas. As matrizes U e U^{-1} podem ser pensadas como matrizes das derivadas parciais, pois $u^i{}_j = \partial x^i/\partial x'^j$ e $v^i{}_j = \partial x'^i/\partial x^j$.

Sejam $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m)$ e $\mathcal{C}' = (\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \dots, \mathbf{c}'_m)$ duas bases do espaço vetorial $\mathbf{W} \simeq \mathbb{R}^m$, e seja $S = (s^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$, com inversa $S^{-1} = (t^i_j)$, a matriz que realiza a mudança de coordenadas, ou seja, $\mathbf{c}'_j = \sum_i s^i{}_j\, \mathbf{c}_i$ e $\mathbf{c}_j = \sum_i t^i{}_j\, \mathbf{c}'_i$. Se $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz da transformação L relativamente às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, então a matriz da transformação L relativamente às bases $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$ é

$$\boxed{A' = S^{-1}AU}$$

De fato, se $y^i = \sum_j a^i{}_j\, x^j$, então $y'^i = \sum_k t^i{}_k\, y^k = \sum_{k,\ell} t^i{}_k\, a^k{}_\ell\, x^\ell = \sum_{k,\ell,j} t^i{}_k\, a^k{}_\ell\, u^\ell{}_j\, x'^j$.

Em particular, se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz do endomorfismo $L \in \mathrm{End}(\mathbf{V})$ relativamente à base $\mathcal{B}$, então a matriz de L relativamente à base $\mathcal{B}'$ é

$$\boxed{A' = U^{-1}AU}$$

- Mostre que $\sum_k v^i{}_k\, u^k{}_j = \delta^i{}_j$ e $\sum_k u^i{}_k\, v^k{}_j = \delta^i{}_j$.
- Verifique que se $A' = U^{-1}AU$ então $A = UA'U^{-1}$.
- Determine a matriz de $L(x, y) = (3x, 2y)$ relativamente à base $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.
- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = x$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica e relativamente à base $(1, 1)$ e $(1, -1)$.
- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = 3x$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica.
- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projecção sobre a reta $x + y = 0$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica.
- Determine a matriz que representa o operador derivação $D : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ relativamente às bases ordenadas $(1, t, t^2, t^3)$ e $(1, t, t^2)$. Determine umas bases de $\mathbf{V} = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ e $\mathbf{W} = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ tal que o opeador $D : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ seja diagonal.

11. (rotações no plano e funções trigonométricas) Seja R_θ a matriz 2×2 que representa uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de um ângulo θ no sentido anti-horário, relatvamente à base canónica do plano. Pela definição das funções trigonométricas,

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

e portanto, usando a linearidade,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ou seja, a rotação de um ângulo θ é o automorfismo do plano cartesiano definido por $R_\theta(x, y) = ((\cos\theta)x - (\sin(\theta)y, (\sin\theta)x + (\cos\theta)y)$.

- Observe que $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ e deduza as fórmulas de adição para as funções trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(\theta \pm \phi) &= \ldots \\ \sin(\theta \pm \phi) &= \ldots \end{aligned}$$

- Observe que $R_\theta R_{-\theta}$ é a transformação "identidade", e calcule a matriz inversa de R_θ.

12. (números complexos e matrizes reais 2×2) O mapa $M : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definido por

$$z = x + iy \mapsto M(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},$$

é um isomorfismo do corpo $\mathbb{C}$ sobre a sua imagem $M(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^4$, ou seja,

$$M(z + z') = M(z) + M(z') \qquad \text{e} \qquad M(zz') = M(z)M(z').$$

Em particular, as imagens de 1 e i são as matrizes

$$\mathbf{1} := M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{i} := M(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

respetivamente, e satisfazem $\mathbf{i}^2 = \mathbf{1}$. A *norma* (no sentido da teoria de números!) do número complexo $z = x+iy$ é $N(z) := z\overline{z} = x^2+y^2$ (o quadrado da norma euclidiana do vetor (x, y)). Então $N(z) = \det M(z)$, e portanto a norma é multiplicativa, pois $\det(M(z)M(z')) = \det M(z) \cdot \det M(z')$.

Observe que o ponto $z = x + iy \approx (x, y)$ no plano $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ pode ser representado como o produto $z = M(z)1$, se $1 \approx (1, 0)$, i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11 Sistemas lineares

1. (Peppermint Patty's problems)

   - "In driving from town A to town D you pass first through town B and then through town C. It is 10 miles farther from A to B than from B to C and 10 miles farther from B to C than from C to D. If it is 390 miles from A do D, how far is it from A to B?"[10]
   - "A man has a daughter and a son.. The son is three years older than the daughter . . . In one year the man will be six times as old as the daughter is now, and in ten years he will be fourteen years older than the combined ages of his children . . . What is the man's present age?"
   - "A man has twenty coins consisting of dimes and quarters[11] . . . If the dime were quarters and the quarters were dimes, he would have ninety cents more than he has now . . . How many dimes and quarters does he have?"

[10] Peppermint Patty, in *Peanuts*, by Charles M. Schulz, December 6th, 1968.
[11] A *dime* is a 10 cents coin, and a *quarter* is a 25 cents coin.

2. (equações lineares na reta) Uma equação linear

$$ax = b$$

na reta real $\mathbb{R}$ (ou na reta complexa $\mathbb{C}$, ou, em geral, num corpo), com $a \neq 0$, admite uma única solução $x = b/a$.

3. (equações lineares no plano) Uma equação linear

$$ax + by = c$$

no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, com $\mathbf{n} = (a, b) \neq (0, 0)$, define uma reta afim $R \subset \mathbb{R}^2$. A equação homogénea associada

$$ax + by = 0$$

define uma reta que passa pela origem, ou seja, um subespaço vetorial $\mathbf{n}^\perp = \mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbb{R}^2$ de dimensão 1 (por exemplo, com $\mathbf{v} = (b, -a)$). Se $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto de R, ou seja, (apenas) uma solução de $ax + by = c$, então o espaço de todas as soluções é $R = \mathbf{r}_0 + \mathbb{R}\mathbf{v}$. Ou seja, as soluções de $ax + by = c$ são dadas por

$$(x, y) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = (x_0, y_0) + t\,(b, -a)$$

ao variar o parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Um sistema de duas equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{array} \right.$$

descreve a interseção entre duas retas afins $(R_1 \cap R_2) \subset \mathbb{R}^2$. Esta interseção pode ser vazia (retas paralelas e distintas), pode ser uma reta $ax + by = c$ (equações proporcionais/equivalentes), ou pode ser um único ponto. A última possibilidade é o caso genérico, e o sistema é equivalente (eliminando x na segunda equação, se $a \neq 0$) ao sistema "em escada de linhas"

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} ax + & by & = & c \\ & b''y & = & c'' \end{array} \right.$$

com $a \neq 0$ e $b'' \neq 0$, e portanto ao sistema "diagonal"

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} x & & = & \alpha \\ & y & = & \beta \end{array} \right.$$

com $\beta = c''/b''$ e $\alpha = (c - b\beta)/a$.

- Resolva, se possível, os seguintes sistemas lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x - y & = & 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rl} 2x - y & = 0 \\ -x + 2y & = 3 \end{array} \right.$$

4. (equações lineares no espaço) Uma equação linear

$$ax + by + cz = d$$

no espaço $\mathbb{R}^3$, com $\mathbf{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, define um plano afim $P = \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d\} \subset \mathbb{R}^3$. A equação homogénea associada

$$ax + by + cz = 0$$

define o supespaço vetorial $\mathbf{n}^\perp \subset \mathbb{R}^3$. Um sistema de duas equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \end{array} \right.$$

descreve a interseção entre dois planos afins $(P_1 \cap P_2) \subset \mathbb{R}^3$. Esta interseção pode ser vazia (dois planos paralelos e distintos), pode ser um plano $ax + by + cz = d$ (duas equações proporcionais/equivalentes), ou pode ser uma reta. A última possibilidade é o caso genérico, e o sistema é equivalente (eliminando x na segunda equação, se $a \neq 0$) ao sistema "em escada de linhas"

$$\begin{cases} ax + & by + & cz & = & d \\ & b''y + & c''z & = & d'' \end{cases}$$

A última variável pode ser pensada como um parâmetro $z = t$ da reta:

$$t \mapsto (\alpha t + \gamma, \beta t + \delta, t) \,.$$

Um sistema de três equações lineares

$$\begin{cases} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \\ a''x + b''y + c''z & = & d'' \end{cases}$$

descreve a interseção entre três planos afins $(P_1 \cap P_2 \cup P_3) \subset \mathbb{R}^3$. Esta interseção pode ser vazia (dois planos paralelos e distintos, ou um plano paralelo à reta de interseção entre os outros dois), pode ser um plano $ax+by+cz = d$ (equações proporcionais/equivalentes), pode ser uma reta (sistema equivalente a um sistema de duas equações), ou pode ser um único ponto. A última possibilidade é o caso genérico, e o sistema é equivalente (eliminando x na segunda e na terceira equação, se $a \neq 0$, e depois y na terceira, se $b''' \neq 0$) ao sistema "em escada de linhas"

$$\begin{cases} ax + & by + & cz & = & d \\ & b'''y + & c'''z & = & d''' \\ & & c''''z & = & d'''' \end{cases}$$

com $a \neq 0$, $b''' \neq 0$ e $c'''' \neq 0$, e portanto ao sistema "diagonal"

$$\begin{cases} x & & & = & \alpha \\ & y & & = & \beta \\ & & z & = & \gamma \end{cases}$$

com $\gamma = d''''/c''''$, $\beta = (d''' - c'''\gamma)/b'''$ e $\alpha = (d - c\gamma - b\beta)/a$.

- Resolva, se possível, os seguintes sistemas lineares

$$\begin{cases} 3x - y & = 0 \\ x + y + z & = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & = & 1 \\ x + y & = & 2 \\ x + y + z & = & 3 \end{cases}$$

5. (sistemas lineares) Um *sistema* de m equações lineares com n incógnitas $x^1, x^2, \ldots, x^n$ é um conjunto de equações

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a^1{}_1\, x^1 + a^1{}_2\, x^2 + \cdots + a^1{}_n\, x^n & = & b^1 \\ a^2{}_1\, x^1 + a^2{}_2\, x^2 + \cdots + a^2{}_n\, x^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1\, x^1 + a^m{}_2\, x^2 + \cdots + a^m{}_n\, x^n & = & b^m \end{array}}$$

com $a^i{}_j$ e b^k números reais (ou complexos). Uma *solução* do sistema linear é um vetor $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas satisfazem as m equações. A matriz $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é dita *matriz dos coeficientes* do sistema. Um sistema linear pode ter uma solução única, ter uma família (uma reta afim, um plano afim, ...) de soluções, ou não ter nenhuma solução ("sistema impossível"). O *sistema homogéneo correspondente* é o sistema

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a^1{}_1\, x^1 + a^1{}_2\, x^2 + \cdots + a^1{}_n\, x^n & = & 0 \\ a^2{}_1\, x^1 + a^2{}_2\, x^2 + \cdots + a^2{}_n\, x^n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1\, x^1 + a^m{}_2\, x^2 + \cdots + a^m{}_n\, x^n & = & 0 \end{array}}$$

Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema homogéneo, então todos os pontos $t\mathbf{x}$ da reta $\mathbb{R}\mathbf{x}$ também são soluções. Em particular, o sistema homogéneo admite pelo menos a *solução trivial* $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

6. (soluções de um sistema linear) O sistema linear

$$\begin{cases} a^1{}_1\, x^1 + a^1{}_2\, x^2 + \cdots + a^1{}_n\, x^n & = \quad b^1 \\ a^2{}_1\, x^1 + a^2{}_2\, x^2 + \cdots + a^2{}_n\, x^n & = \quad b^2 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ a^m{}_1\, x^1 + a^m{}_2\, x^2 + \cdots + a^m{}_n\, x^n & = \quad b^m \end{cases}$$

é equivalente a

$$AX = B \qquad \text{ou seja,} \qquad L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

onde $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz dos coeficientes, $B \approx \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e $X \approx \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ são vetores coluna, e $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a transformação linear $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = L_A(\mathbf{x})$ definida por $y^i = \sum_j a^i{}_j\, x^j$. O vetor $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots . x^n) \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema $AX = B$ se

$$x^1\mathbf{a}_1 + x^2\mathbf{a}_2 + \cdots + x^n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{a}_j = (a^1{}_j, a^2{}_j, \dots, a^m{}_j) \in \mathbb{R}^m$ é a j-ésima coluna da matriz A. Portanto, o sistema admite (pelo menos) uma solução (i.e. é *possível*) sse $\mathbf{b} \in \mathrm{im}(L_A)$. A dimensão de $\mathrm{im}(L_A)$, ou seja, o número de colunas linearmente independentes de A, é dita *caraterística* da matriz A. O vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema homogéneo $AX = 0$ se

$$\langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x} \rangle = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

onde $\mathbf{a}^i = (a^i{}_1, a^i{}_2, \dots, a^i{}_n) \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ é a i-ésima linha da matriz A, ou seja, se é ortogonal ao espaço vetorial $\mathrm{Span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)$ gerado pelas linhas de A. Portanto, o espaço das soluções do sistema homogéneo é

$$\ker(L_A) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)^\perp \subset \mathbb{R}^n$$

e a sua dimensão é igual a $n - k$, se k é o número de linhas linearmente independentes de A. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ são soluções do sistema $AX = B$, então a diferença $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ é solução do sistema homogéneo $AX = 0$. Portanto, se $\mathbf{z}$ é uma das soluções do sistema linear possível $AX = B$, então o espaço d(e todas)as soluções é o subespaço afim

$$\mathbf{z} + \ker(L_A) \subset \mathbb{R}^n .$$

Em particular, a caraterística da matriz A é também igual ao número de linhas linearmente independentes de A.

Se $AX = B$ é um sistema de n equações com n incógnitas, e se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz regular (i.e. invertível), então o sistema admite uma solução única dada por $X = A^{-1}B$.

- Estude os seguintes sistemas (ou seja, diga se são possíveis e, caso afirmativo, determine o espaço das soluções)

$$\begin{cases} 2x + y & = -1 \\ x - y & = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y & = 11 \\ x - y & = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y & = -1 \\ -6x + 9y & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z & = -3 \\ x - 2y + z & = 5 \\ x - 4y + 6z & = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y - 10z & = 1 \\ -2x - 5y + 7z & = 2 \\ x + 3y - z & = 0 \end{cases}$$

- [Ap69] **16.20**.

7. (eliminação de Gauß-Jordan) Considere o sistema linear

$$AX = B\,,$$

com $A = (A_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \approx (b^1, b^2, \ldots, b^m) \in \mathbb{R}^m$ e $X \approx (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ vetores-coluna, ou seja,

$$\begin{cases} a^1{}_1\, x^1 + a^1{}_2\, x^2 + \cdots + a^1{}_n\, x^n & = & b^1 \\ a^2{}_1\, x^1 + a^2{}_2\, x^2 + \cdots + a^2{}_n\, x^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1\, x^1 + a^m{}_2\, x^2 + \cdots + a^m{}_n\, x^n & = & b^m \end{cases}$$

O *método de eliminação de Gauss-Jordan* consiste em efectuar as seguintes "operações elementares" sobre as equações, e portanto sobre as linhas da "matriz ampliada"

$$(A|B) := \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \ldots & a^1{}_n & b^1 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \ldots & a^2{}_n & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^m{}_1 & a^m{}_2 & \ldots & a^m{}_n & b^m \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

i) trocar a ordem das equações,

ii) multiplicar (todos os termos de) uma equação por um escalar não nulo $\lambda \neq 0$,

iii) somar a uma equação um múltiplo de outra equação,

...até obter um sistema equivalente $A'X = B'$, com A' "matriz em escada de linhas", ou seja, da forma

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} \star & * & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & \star & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & \star & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

onde os "pivots" $\star$ são os elementos $\neq 0$ mais à esquerda de cada linha. *condensação.* A característica da matriz A é então igual ao número de linhas não nulas da matriz em escada de linhas equivalente.

- Usando operações elementares sobre as linhas, tranforme a matriz A dada numa matriz em escada e calcule a característica de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Resolva os seguintes sistemas lineares usando o método de eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = 1 \\ 5x + 3y + 3z & = 2 \\ -x + y + z & = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y + z & = 1 \\ 2x - 6y + 4z & = 3 \\ x + y + z & = -2 \\ 2x - 5y + 5z & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z & = 2 \\ 6x + y & = -10 \\ -x + 2y - 10z & = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z & = 1 \\ x + 2y - z & = 3 \\ x + y + z & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w & = 3 \\ 5z + 6w & = 0 \\ z + 3w & = 1 \\ x - y + 8w & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y - z & = 1 \\ x + 3z & = -3 \\ y - z & = 0 \end{cases}$$

- [Ap69] **16.20**.

8. (exemplos) Dê exemplos de

   - um sistema de 2 equações lineares com 2 incógnitas com solução única,
   - um sistema de 2 equações lineares com 2 incógnitas sem nenhuma solução,
   - um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja uma reta afim.
   - um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas com solução única,
   - um sistema de 2 equações lineares com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja um plano afim.
   - um sistema de 2 equações lineares com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja um subespaço vetorial de dimensão 1.

12 Volumes e determinantes

1. (formas alternadas) Seja $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial de dimensão finita. Uma *forma bilinear alternada* é uma função $F : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, que envia $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ em $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, linear (ou seja, aditiva e homogénea) em cada variável, e tal que

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{e} \qquad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$$

   Fixada uma base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{V}$, uma forma bilinear é determinada pelas suas "coordenadas"

$$f_{ij} := F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

   A forma bilinear F é alternada sse as coordenadas são antisimétricas, i.e. se $f_{ij} = -f_{ji}$ e, em particular, $f_{ii} = 0$.

   - Mostre que $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ implica $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ (calcule $F(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \ldots$)

2. (n-formas alternadas e volumes de paralelepípedos) Seja $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real de dimensão (finita) n. Uma *n-forma (linear)* é uma função $F : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \cdots \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \mapsto F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n)$$

   multilinear, ou seja, homogénea e aditiva em cada variável, i.e.

$$F(\ldots, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \ldots) = \lambda F(\ldots, \mathbf{v}, \ldots) + \mu F(\ldots, \mathbf{w}, \ldots)$$

   Uma n-forma é *alternada* se é nula quando duas varáveis são iguais (ou proporcionais), i.e.

$$F(\ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v} \ \ldots) = 0 \quad \text{e (portanto)} \quad F(\ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w}, \ \ldots) = -F(\ldots, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}, \ \ldots)\,.$$

   Fixada uma base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$, uma n-forma $F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ é determinada pelas suas "coordenadas"

$$f_{ijk\ldots} := F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \ldots)$$

   pois

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots) = \sum_{i,j,k,\ldots} f_{ijk\ldots} x^i y^j z^k \ldots$$

   Se a forma é alternada, então as coordenadas com dois índices repetidos são nulas, i.e. $f_{\ldots i \ldots i \ldots} = 0$. Em particular, apenas podem ser diferentes de zero as coordenadas cujos índices são permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. As coordenadas são também anti-simétricas, i.e. $f_{\ldots i \ldots j \ldots} = -f_{\ldots j \ldots i \ldots}$. Mas toda permutação $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ pode ser obtida da permutação trivial $\sigma(k) = k$ usando trocas repetidas. Se $f_{12\ldots n} = \lambda$, então as outras coordenadas não nulas são $\pm\lambda$, ou seja, $f_{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)} = \pi(\sigma)\lambda$, onde $\pi(\sigma) := (-1)^k$ é a "paridade" da permutação σ (k é o número de trocas que transforma σ na permutação trivial). Portanto, o espaço linear das n-formas alternadas em $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ tem dimensão um.

   Em particular, existe uma única n-forma alternada D em $\mathbb{R}^n$ normalizada de maneira tal que $d_{12\ldots n} = D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$. Uma n-forma alternada genérica em $\mathbb{R}^n$ é proporcional a D, ou seja, é igual a $F = \lambda D$, se $\lambda = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ é o seu valor nos vetores da base canónica, ou seja,

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)\, D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

   O *paralelepípedo* de lados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_n$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$P = \{t^1\mathbf{v}_1 + t^2\mathbf{v}_2 + \cdots + t^n\mathbf{v}_n \ \text{ com } \ t^1, t^2, \ldots, tn \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$$

   O *volume (n-dimensional)* do paralelepípedo de lados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_n$ é

$$\mathrm{vol}(P) = |D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n)|$$

   - Verifique que em dimensão 2 a forma canónica é $D((a,b),(c,d)) = ad - bc$.

- Calcule o volume do paralelogramo de lados $(2,-1)$ e $(3,5)$ em $\mathbb{R}^2$.
- Calcule o volume do paralelepípedo de lados $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ e $(0,0,5)$ em $\mathbb{R}^3$.

3. (determinante) Existe uma única função *determinante* $\det : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$A \mapsto \det A$$

(outra notação é $\det A = |A|$) que é uma forma multilinear alternada nas colunas da matriz, e tal que $\det \mathbf{1}_n = 1$. De fato, se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ são as colunas de $A = (a^i{}_j)$, então esta função é $\det A := D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$. Uma fórmula para o determinante é

$$\boxed{\det A = \textstyle\sum_{\sigma\in \mathrm{Per}_n} \pi(\sigma)\, a^1{}_{\sigma(1)}\, a^2{}_{\sigma(2)} \cdots a^n{}_{\sigma(n)}}$$

onde $\pi(\sigma)$ é a paridade da permutação σ. É imediato verificar que $\det A^t$ é uma n-forma linear alternada nas linhas $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$ da matriz A que vale 1 se as linhas são a base canónica de $\mathbb{R}^n$, e portanto, pelo teorema de unicidade, $\det A^t = \det A$.

O determinante de uma matriz 2×2 é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix} = a^1{}_1\, a^2{}_2 - a^1{}_2\, a^2{}_1}$$

O determinante de uma matriz 3×3 é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix} = a^1{}_1 \det \begin{pmatrix} a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix} - a^1{}_2 \det \begin{pmatrix} a^2{}_1 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_3 \end{pmatrix} + a^1{}_3 \det \begin{pmatrix} a^2{}_1 & a^2{}_2 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 \end{pmatrix}}$$

O determinante de uma matriz diagonal é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

- Calcule o determinante das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

- Calcule o determinante de $2A$ e $-A$ sabendo que A é uma matriz 5×5 com determinante $\det A = -3$.
- Verifique que uma equação cartesiana da reta que passa pelos pontos (a,b) e (c,d) de $\mathbb{R}^2$ é

$$\det \begin{pmatrix} x-a & y-b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{pmatrix} = 0$$

- [Ap69] **3.6**.

4. (determinante e produtos) Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformação linear definida pela matriz quadrada $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, que envia o vetor $\mathbf{x}$ no vetor $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$ de coordenadas $y^i = \sum_j a^i{}_j\, x^j$. A função $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \mapsto D(L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2, \ldots, L\mathbf{v}_n)$ é uma n-forma alternada, e portanto, pelo teorema de unicidade, proporcional à forma canónica D, ou seja,

$$D(L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2, \ldots, L\mathbf{v}_n) = D(L\mathbf{e}_1, L\mathbf{e}_2, \ldots, L\mathbf{e}_n) \cdot D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n)$$

Os vetores $L\mathbf{e}_j = \sum_i a^i{}_j\, \mathbf{e}_i$ são as colunas da matriz A, portanto $D(L\mathbf{e}_1, L\mathbf{e}_2, \ldots, L\mathbf{e}_n) = \det A$. Se $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ denota a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$, então os vetores $L\mathbf{v}_j$ são as colunas da matriz AB. Temos portanto o teorema:

$$\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$$

Em particular, se A é regular então $\det A \neq 0$ e

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \tfrac{1}{\det A}}$$

Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$, então o determinante da matriz "diagonal por blocos" $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{R})$ é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = (\det A)(\det B)}$$

- Verdadeiro ou falso? Dê uma demonstração ou um contra-exemplo.

$$\det(A + B) = \det A + \det B \quad ?$$

$$\det\left((A+B)^2\right) = \left(\det(A+B)\right)^2 \quad ?$$

$$\det\left(A^n\right) = \left(\det A\right)^n \quad ?$$

- Uma matriz quadrada A é dita *ortogonal* se $A^tA = AA^t = \mathbf{1}$ (ou seja, se é invertível e a sua inversa é A^t). Mostre que o determinate de uma matriz ortogonal é ± 1.
- [Ap69] **3.11**.

5. (determinante de um endomorfismo e volumes) Seja $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a matriz quadrada que define a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, relatvamente à base canónica (ou seja, $y^i = \sum_j a^i{}_j\, x^j$). Se $F = \lambda D$ é uma n-forma alternada genérica, então

$$F(L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2, \ldots, L\mathbf{v}_n) = (\det A) \cdot F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n)$$

Em particular, o determinante da matriz A depende apenas da transformação linear L, e não da base usada para calcular a matriz!

Se $Q := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } 0 \leq x^i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ denota o hiper-cubo unitário, ou seja, o paralelepípedo de lados $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, então a imagem $L(Q)$ é o paralelepípedo de lados $L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1$, $L(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2$, $\ldots L(\mathbf{e}_n) = \mathbf{a}_n$ (as colunas da matriz). O determinante da matriz é portanto o quociente

$$\det A = \pm \frac{\mathrm{Vol}(L(Q))}{\mathrm{Vol}(Q)},$$

o sinal sendo positivo ou negativo dependendo se L preserva ou não a orientação. Em geral, se $R \subset \mathbb{R}^n$ é uma região suficientemente regular, e portanto o seu volume pode ser aproximado con precisão arbitrária usando somas de volumes de hiper-cubos, então $\det A$ é igual a $\pm$ o quociente $\mathrm{Vol}(L(R))/\mathrm{Vol}(R)$.

- Calcule o determinate das transformações lineares

$$T(x,y) = (2x, 3y) \qquad T(x,y) = (x, -y) \qquad T(x,y) = (y, x)$$

$$T(x,y,z) = (3z, 2y, x) \qquad T(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z) \qquad T(x,y,z) = (y, x, 0)$$

6. (método de Gauß-Jordan para calcular determinantes) O determinante de uma matriz triangular superior é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \dots & a^1{}_n \\ 0 & a^2{}_2 & a^2{}_3 & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^n{}_n \end{pmatrix} = a^1{}_1\, a^2{}_2 \cdots a^n{}_n}$$

Portanto, é possível calcular um determinante transformando uma matriz genérica numa matriz triangular superior e observando que as operações têm efeitos triviais no determinante (trocar a ordem das linhas ou somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha não muda o determinante, em quanto multiplicar uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$ transforma $\det A$ em $\lambda \det A$). .

- Use o método de eliminação de Gauss-Jordan para calcular o determinante das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

7. (determinantes e independência) Os vetores $\mathbf{v}_1 = (v^1{}_1, v^2{}_1, \dots, v^n{}_1)$, $\mathbf{v}_2 = (v^1{}_2, v^2{}_2, \dots, v^n{}_n)$, ..., $\mathbf{v}_n = (v^1{}_n, v^2{}_n, \dots, v^n{}_n) \in \mathbb{R}^n$ são independentes sse

$$\det \begin{pmatrix} v^1{}_1 & v^1{}_2 & \dots & v^1{}_n \\ v^2{}_1 & v^2{}_2 & \dots & v^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^n{}_1 & v^n{}_2 & \dots & v^n{}_n \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

- Diga se os vetores $(1,-5)$ e $(-1,7)$ de $\mathbb{R}^2$ são independentes.
- Diga se os vetores $(1,2,3)$, $(-1,2,5)$ e $(9,-5,0)$ de $\mathbb{R}^3$ são independentes.
- Diga se os vetores $(1,2,3,4)$, $(-1,2,7,5)$, $(0,-3,0,1)$ e $(2,9,-5,0)$ de $\mathbb{R}^4$ são independentes.

8. (Wronskiano, independência e identidade de Abel) Sejam $x(t)$ e $y(t)$ duas funções diferenciáveis definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O *(determinante) Wronskiano* das funções x e y é a função

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

($\dot{x} = dx/dt$ e $\dot{y} = dy/dt$).

- Mostre que se x e y são linearmemte dependentes então $W(t) = 0$ para todo o t (ou seja, se existe um ponto t onde $W(t) \neq 0$ então as funções x e y são linearmente independentes).
- Mostre que a derivada de $W(t)$ é

$$\dot{W}(t) = \det \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

($\ddot{x} = d^2x/dt^2$ e $\ddot{y} = d^2y/dt^2$).

- Deduza que se $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções da equação diferencial homogénea de segunda ordem $\ddot{z} + p(t)\dot{z} + q(t)z = 0$, então

$$\dot{W}(t) = -p(t)W(t) \qquad \text{e portanto} \qquad W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)\,ds}.$$

  Em particular, para verificar se $x(t)$ e $y(t)$ são independentes num intervalo, é suficiente calcular $W(t)$ num ponto arbitrário deste intervalo.

9. (Vandermonde deteminant) Given n real or complex numbers $z_1, z_2, \dots, z_n$, the *Vandermonde matrix* is the $n \times n$ matrix whose rows (or colums) are the geometric progressions (up to $n-1$) of the z_i's, namely (below, upper indices denote powers!)

$$V := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & (z_1)^2 & \dots & (z_1)^{n-1} \\ 1 & z_2 & (z_2)^2 & \dots & (z_2)^{n-1} \\ 1 & z_3 & (z_3)^2 & \dots & (z_3)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & (z_n)^2 & \dots & (z_n)^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Its determinant is given by the product

$$\det V = \prod_{i<j} (z_j - z_i)$$

10. (menores, complemento algébrico e fórmula de Laplace) Seja $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. O *menor-ij* de A é a matriz $A^i_j \in \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ obtida da matriz A suprimindo a linha i e a coluna j. O *complemento algébrico* do elemento $a^i{}_j$ de A é o número

$$\boxed{\mathrm{Cal}\,(a^i{}_j) := (-1)^{i+j} \det A^i_j}$$

   A *matriz dos complementos algébricos* (ou *dos cofactores*) de A é a matriz $\mathrm{Cal}\, A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cujo elemento ij é $\mathrm{Cal}\,(a^i{}_j)$, ou seja

$$\boxed{\mathrm{Cal}\, A := \left(\mathrm{Cal}\,(a^i{}_j)\right)}$$

   O desenvolvimento do determinante $\det A$ em função dos elementos da linha i é

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^n a^i{}_j \,\mathrm{Cal}(a^i{}_j) = \sum_{j=1}^n a^i{}_j\, (-1)^{i+j} \det A^i_j}$$

- Calcule a matriz dos complementos algébricos das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcule o determinante das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

11. (determinante e matrizes invertíveis) Se $A = (a^i{}_j) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $n \geq 2$, então

$$\boxed{A\,(\mathrm{Cal}A)^t = (\det A)\,\mathbf{1}}$$

Em particular, se $\det A \neq 0$ então a matriz A é invertível/regular e a sua inversa é dada por

$$\boxed{A^{-1} = \tfrac{1}{\det A}\,(\mathrm{Cal}A)^t}$$

Ou seja, uma matriz quadrada A é regular/invertível sse $\det A \neq 0$.

- Calcule a inversa das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

- Determine os valores de λ para os quais $\lambda\mathbf{1} - A$ é singular, quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 8 \\ 19 & -3 & 14 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- [Ap69] **3.17**.

12. (regra de Cramer) Seja $AX = B$ um sistema linear de n equações com n incógnitas. Se a matriz dos coeficientes $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível, então o sistema admite uma única solução $X = A^{-1}B$, ou seja,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Cal}A)^t\,B$$

A i-ésima coordenada da solução X é

$$\boxed{x^i = \tfrac{1}{\det A}\textstyle\sum_j (\mathrm{Cal}\,(a^j{}_i))\,b^j}$$

Se $C^i \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ denota a matriz obtida de A pela substituição da coluna i pelo vetor coluna B, então as coordenadas da solução do sistema $AX = B$ são

$$\boxed{x^i = \tfrac{\det C^i}{\det A}}$$

- Resolva os seguines sistema utilizando a regra de Cramer

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = 1 \\ 5x + 3y + 3z & = 2 \\ -x + y + z & = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y + z & = 1 \\ 2x - 6y + 4z & = 3 \\ x + y + z & = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y & = -6 \\ -x + 2y + 4z & = 1 \\ -x + z & = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + z & = 0 \\ 2x - y + 3z & = 1 \\ x + y + z & = 1 \end{cases}$$

13 Valores e vetores próprios

1. (subespaços invariantes) Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ um operador linear. Um subespaço linear $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ é L-*invariante* se $L(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$, ou seja, se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica $L\mathbf{v} \in \mathbf{W}$.
   - Mostre que o subespaço trivial $\{\mathbf{0}\}$, o núcleo $\ker(L)$ e a imagem $\mathrm{im}(L)$ são subespaços invariantes de $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.
   - Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = x$.
   - Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projecção sobre a reta $y = x$.
   - Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 3y, y)$.

2. (valores e vetores próprios) Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ um operador linear definido no espaço linear real (ou complexo) $\mathbf{V}$. Um *vetor próprio/autovetor* (em inglês *eigenvector*, do alemão *eigen* = próprio) de L é um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tal que $L(\mathbf{v})$ é proporcional a $\mathbf{v}$, ou seja,

$$\boxed{L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

   onde $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$) é um escalar, chamado *valor próprio/autovalor* (em inglês *eigenvalue*) do operador L (associado ao vetor próprio $\mathbf{v}$). O conjunto

$$\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} = \ker(\lambda - L)$$

   ($\lambda - L$ denota o operador $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v} - L(\mathbf{v})$) é um subespaço vetorial invariante de $\mathbf{V}$ (não-trivial se λ é um valor próprio), dito *subespaço próprio* associado ao valor próprio λ. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são vetores próprios e se os correspondentes valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são dois a dois distintos (i.e. $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$), entaõ os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes.
   - Determine valores e vetores próprios da homotetia $H_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definda por $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = 2x$.
   - Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projecção sobre a reta $3y = x$.
   - Determine valores e vetores próprios da rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \; .$$

   - Determine os valores e os vetores próprios das transformações

$$L(x, y) = (0, 0) \qquad L(x, y) = (x/2, 3y) \qquad L(x, y) = (-y, x)$$
$$L(x, y) = (x, x + y) \qquad L(x, y) = (x + \lambda y, y) \qquad L(x, y) = (1 + \alpha y, y)$$
$$L(x, y, z) = (0, y, -z) \qquad L(x, y, z) = (y, z, x)$$

   - Se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ é um automorfismo (i.e. uma transformação linear invertível) e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é um vetor próprio de L, então $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de L^{-1}
   - [Ap69] **4.4**.

3. (espetro) Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, então o operador

$$L_\lambda := \lambda - L$$

   não é invertível (pois o autovetor $\mathbf{v}$ associado a λ está no seu núcleo). O *espetro* do operador L é o conjunto

$$\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \lambda - L \text{ não é invertível }\} \subset \mathbb{C}\,,$$

ou seja, o conjunto dos valores complexos de $z \in \mathbb{C}$ fora dos quais existe o operador *resolvente*

$$R_z := (z - L)^{-1}$$

O número $\rho(L) := \sup_{z \in \sigma(L)} |z|$ é dito *raio espetral*. Quando $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, o espetro $\sigma(L)$ coincide com o conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ dos valores próprios. Em geral, o espetro pode conter mais pontos.

- O operador *deslocamento* (*shift*)

  $$L : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

  definido no espaço $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não é invertível, portanto $0 \in \sigma(L)$. No entanto, 0 não é um valor próprio de L.

4. (operador derivação) O operador *derivação* envia uma função derivável $f(x)$ na função

$$(Df)(x) := f'(x) .$$

Pode ser pensado como un endomorfismo $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ do espaço linear das funções infinitamente diferenciáveis. O produto $P := -i\hbar D$, onde $\hbar \simeq 1.054 \cdots \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s é a constante de Planck reduzida, é o *operador momento* na "represantação de Schrödinger".

- O subespaço $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómio é um subespaço invariante de D. O subespaço $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$ é um subespaço invariante do operador derivação $D : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$?
- Verifique que todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio do operador "derivação" $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e que espaço próprio associado ao valor próprio λ é gerado pela função exponencial $f(x) = e^{\lambda x}$. Deduza que $e^{i\xi x}$ é uma função própria do operador momento, e calcule o valor próprio.

5. (operador primitivação) O operador *primitivação* envia uma função integrável $f(x)$ numa das suas primitivas $F(x)$, por exemplo a função

$$(Pf)(x) := \int_c^x f(t)\, dt$$

Pode ser pensado como um endomorfismo $P : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ do espaço linear das fuções contínuas.

- Determine valores e vetores próprios do operador $P : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

6. (Laplaciano) O *Laplaciano* de uma função real de uma variável real $f(x)$ é

$$(\Delta f)(x) := f''(x)$$

Seja $\mathbf{V} = \{f \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ t.q. $f(0) = f(\pi) = 0\}$ (o espaço dos deslocamentos de uma "corda vibrante"). Os valores próprios do Laplaciano $\Delta : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ são $\lambda_n = -n^2$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, e as correspondentes funções próprias são (por exemplo)

$$\mathbf{v}_n(x) = \sin(nx) .$$

7. (equação de Schrödinger estacionária) Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E \psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262 \cdots \times 10^{-34}$ J$\cdot$s.

- Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

8. (operadores diferenciais, translações e ondas planas) Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, de grau $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, o operador diferencial ∂^α, que atua sobre o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ (ou suficientemente diferenciáveis) definidas em abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é definido por
$$(\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}) \, .$$

   - Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$, com $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, são funções próprias dos operadores diferenciais ∂^α, com $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com valores próprios $(i\boldsymbol{\xi})^\alpha := (i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2} \ldots (i\xi_n)^{\alpha_n}$, ou seja,
$$\partial^\alpha e_\xi = (i\boldsymbol{\xi})^\alpha e_\xi \, .$$

   - O operador de *translação* T_a, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, é definido por
$$(T_a f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \, .$$
Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$ são também funções próprias dos operadores de translação com valores próprios $\lambda_{\mathbf{a}}(\xi) = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a}}$, ou seja,
$$T_a e_\xi = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a}} e_\xi \, .$$

   - O operador de *modulação* M_ξ, com $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, é definido por
$$(M_\xi f)(\mathbf{x}) := e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \, .$$
Mostre que $T_a \circ M_\xi = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a}} M_\xi \circ T_a$. Os operadores translação e modulação geram o *grupo de Heisenberg*.

9. (PDEs e símbolo de um operador diferencial) Um *operador diferencial linear* de grau $\leq k$, definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é um polinómio
$$P(\partial, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \, \partial^\alpha \, ,$$
em ∂, com "coeficientes" $a_\alpha(\mathbf{x})$ que são funções $a_\alpha : X \to \mathbb{R}$. O operador é invariante por translações se os coeficientes a_α não dependem do ponto $\mathbf{x}$, i.e. são constantes. As "ondas planas" $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$ são funções próprias do operador linear com coeficientes constantes $L = P(\partial)$, ou seja, satisfazem
$$L e_\xi = \sigma(\boldsymbol{\xi}) \, e_\xi \, ,$$
onde o valor próprio, o polinómio $\sigma(\boldsymbol{\xi}) := P(i\boldsymbol{\xi})$, é dito *símbolo* do operador L. O *símbolo principal* é o termo (polinómio homogéneo) de grau máximo, $\sigma_p(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \cdot (i\boldsymbol{\xi})^\alpha$.

10. (polinómio caraterístico) Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, então o operador $L_\lambda := \lambda - L$ não é invertível, e os vetores próprios com valor próprio λ são os vetores não triviais do núcleo de L_λ. Se $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ tem dimensão finita, então o operador L é $X \mapsto AX$ onde $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz quadrada (que depende da base escolhida). O *polinómio caraterístico* da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é
$$\boxed{P_A(t) := \det(t\mathbf{1}_n - A)}$$
O escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (ou do operador L) sse a matriz $\lambda\mathbf{1}_n - A$ é singular, ou seja, sse
$$\det(\lambda\mathbf{1}_n - A) = 0 \, ,$$
e portanto sse λ é uma raiz do polinómio caraterístico $P_A(t)$. O espaço próprio associado ao valor próprio λ é $\mathbf{V}_\lambda = \ker(\lambda - L)$. Portanto, para determinar os vetores próprios associados ao valor próprio λ é suficiente resolver o sistema homogéneo (indeterminado) $(\lambda\mathbf{1}_n - A)V = 0$.

- Mostre que A e A^t têm o mesmo polinómio caraterístico.
- Verifique que $P_A(0) = \det A$.
- Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são as raizes (complexas) do polinómio caraterístico da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então
$$P_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)\,.$$
Em particular, $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ e $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, assim que
$$P_A(t) = t^n - (\mathrm{tr}A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n(\det A)$$
- Determine valores e vetores próprios dos endomorfismos definidos pela seguintes matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- [Ap69] **4.10**.

11. (matrizes semelhantes e diagonalização) As matrizes quadradas $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são ditas *semelhantes* se existe uma matriz invertível $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que
$$B = U^{-1}AU\,.$$
(ou seja, se representam a mesma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em bases que podem ser diferentes!). Se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico, e portanto os mesmos valores próprios.

A matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é *diagonalizável* se é semelhante a uma matriz diagonal. Se (o operador linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido na base canónica pel)a matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ admite n vetores próprios linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respetivamente (não necessariamente distintos), e se $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é matriz (invertível) cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$, então $U^{-1}AU$ é a matriz diagonal $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

- Mostre que se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$.
- Mostre que matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico, e portanto os mesmos valores próprios.
- As matrizes
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
são semelhantes?
- Diagonalize as seguintes matrizes, ou mostre que não é possível.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. (quociente de Rayleigh) Seja $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica, e seja

$$Q_A(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

a forma quadrática associada. Os extremos da forma quadrática Q_A na esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$ são atingidos nos pontos onde o gradiente de $Q_A(\mathbf{x})$ é proporcional ao gradiente de $\|\mathbf{x}\|^2$, ou seja nos pontos onde existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

O *quociente de Rayleigh* da matriz (operador) A é a função

$$R_A(\mathbf{x}) := \frac{Q_A(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$$

definida em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

- Use os multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos de Q_A na esfera unitária.
- Mostre que o quociente de Rayleigh $R_A(\mathbf{x})$ de um vetor próprio $\mathbf{x}$ é igual ao valor próprio associado λ.
- Deduza que o quociente de Rayleigh atinge máximo e mínimo, e que estes valores são o maior e o menor valor próprio de A, respetivamente.

13. (gato de Arnold) Considere a transformação $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida (relativamente à base canónica) pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja, $L(x, y) = (2x + y, x + y)$. O polinómio caraterístico é $P_A(t) = t^2 - 3t - 5$, e portanto os valores próprios são $\lambda_\pm = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Os vetores próprios correspondentes, que satisfazem $L(\mathbf{v}_\pm) = \lambda_\pm \mathbf{v}_\pm$, são (por exemplo)

$$\mathbf{v}_+ = (\varphi, 1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}_- = (1, -\varphi)$$

onde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.6180339887\dots$ é a "razão" dos gregos. A matriz que representa L na base $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-)$ é a matriz diagonal $\mathrm{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$. Observem que $\lambda_+ > 1$ e $0 < \lambda_- < 1$, e portanto L estica os vetores de $\mathbb{R}\mathbf{v}_+$ e contrae os vetores de $\mathbb{R}\mathbf{v}_-$. Observe também que $\det A = \lambda_+ \lambda_- = 1$. Em particular, L preserva as àreas, ou seja, a área de uma região (mensurável!) $R \subset \mathbb{R}^2$ é igual à área da sua imagem $L(R)$. A matriz A é invertível, e a sua inversa A^{-1} tem entradas inteira (pois $\det A = 1$). Em particular, L preserva o subgrupo $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, ou seja, $L(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Isto implica que L define uma transformação invertível $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ do "toro" $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mapsto (2x + y, x + y) + \mathbb{Z}^2$$

A "dinâmica" da transfomação T, ou seja, o comportamento das trajetórias $\mathbf{v} \mapsto T(\mathbf{v}) \mapsto T(T(\mathbf{v})) \mapsto \dots$, é particularmente interessante, e T é o arquétipo de uma classe importante de transformações, ditas "hiperbólicas".

Referências

[Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].

[Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985.

[Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989.

[Ba77] F. Banino, *Geometria per fisici*, Feltrinelli, 1977.

[Be62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics*, McGraw-Hill 1962.

[Bo89] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Algebra I*, Springer, 1989.

[BR98] T.S. Blyth and E.F. Robertson, *Basic Linear Algebra*, McGraw Hill, 1998.

[Go96] R. Godement, *Cours d'algébre* (Troisième édition mise à jour), Hermann Éditeurs, 1996.

[Ha58] P.R. Halmos, *Finite dimensional vetor spaces*, Van Nostrand, 1958.

[La87] S. Lang, *Linear Algebra*, Third Edition, UTM Springer, 1987.

[La97] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, UTM Springer, 1997.

[Me00] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

[MB99] S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra (Third Edition)*, AMS Chelsea Publishing, 1999.

[RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2006.

[Se89] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989.

[St98] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Hartcourt Brace Jonovich Publishers, 1998.

[St09] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, fourth edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM 2009.
`http://math.mit.edu/linearalgebra/` , MIT Linear Algebra Lectures

[Wa91] B.L. van der Waerden, *Algebra*, Springer, 1991 [*Moderne Algebra*, 1930-1931].

[We52] H. Weyl, *Space Time Matter*, Dover, 1952 [*Raum Zeit Materie*, 1921]