11/11/2025 1º teste	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome .....**Nº**..... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`
`Se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(1 valor)* Resolva $z^3 = 1 + i$.

   $\sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/12}$ $\sqrt[6]{2}\, e^{i3\pi/4}$ $\sqrt[6]{2}\, e^{-i7\pi/12}$

2. *(1 valor)* Calcule o logaritmo principal de $z = 1 + i$.

   $\frac{\log 2}{2} + i\,\frac{\pi}{4}$

3. *(1 valor)* Verifique se a função $f(x+iy) = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$, definida no plano complexo perfurado $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, é holomorfa.

   Não é holomorfa, pois $f(z) = 1/\overline{z}$.

4. *(1 valor)* Resolva $\cos(z) = i$.

   $z = \pm\frac{\pi}{2} - i\log\left(\sqrt{2} \pm 1\right) + i2\pi\mathbb{Z}$

5. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da série de potências

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}$$

   e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define.

   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n} = e^{-z^2}$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$

6. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = i$ e o disco de convergência da função

   $$f(z) = \frac{1}{z}$$

   $\frac{1}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}\,(z-i)^n = -i + (z-i) + i(z-i)^2 - (z-i)^3 + \ldots$ se $|z-i| < 1$.

7. *(1 valor)* Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ o contorno definido por $\gamma(t) = te^{it}$ com $0 \le t \le 2\pi$. Calcule

   $$\int_\gamma \cos(z)\, dz \ .$$

   $\int_\gamma \cos(z)\, dz = 0$

8. *(1 valor)* Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{z-1}{z}\, dz$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{z-1}{z}\, dz = -2\pi i$$

9. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z}\,.$$

$$f(z) = -\frac{1}{z} - z - z^3 - z^5 - \ldots \qquad \text{se} \quad 0 < |z| < 1\,.$$

e

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^9} + \ldots \qquad \text{se} \quad |z| > 1\,.$$

10. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidades isoladas da função

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3 - z}\,.$$

Uma singularidade removível em 0, e pólos simples em ± 1.

11. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=1} z^3\, e^{1/z} dz\,.$$

$$\oint_{|z|=1} z^3\, e^{1/z} dz = i\frac{\pi}{12}$$

12. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin(\theta)}\, d\theta\,.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin(\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

13. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 + 2}\, dx\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 + 2}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\, e^{-3\sqrt{2}}\,.$$

12/1/2026 2º teste	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome .....**Nº** ..... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier real $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ da função periódica de período 2π definida por $f(x) = \cos^2(x)$ no intervalo $(-\pi, \pi]$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

2. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier complexa $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ da função periódica de período 2π definida, no intervalo $(-\pi, \pi]$, por

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\sum_{\pi n} \frac{\sin(n\pi/2)}{n}\, e^{inx}$$

3. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$, definido no intervalo $x \in [0,\pi]$, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$ (condutor isolado).

$$\sim e^{-3n^2 t}\cos(nx) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

4. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de cosenos (ou seja, da extensão par e periódica de período 2π) da função definida no intervalo $(0, \pi]$ por

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases},$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n}\cos(nx)$$

5. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido no intervalo $x \in [0,\pi]$ com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$, e condição inicial $u(x,0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 4).

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n}\, e^{-3n^2 t}\cos(nx)$$

6. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$ da função

$$f(x) = e^{-(x-1)^2}$$

$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-2\pi i\xi}\, e^{-\pi^2\xi^2}$

7. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier inversa $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi$ da função

$$\widehat{g}(\xi) = \xi\, e^{-\xi^2}$$

$i\pi^{3/2}\, x\, e^{-\pi^2 x^2}$

8. *(2 valores)* Aplique o teorema de Plancherel (fórmula da energia) à função pulso, definida na reta real por $p(x) = 1$ se $|x| \leq 1/2$ e $p(x) = 0$ caso contrário, e calcule o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2}\, dx$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2}\, dx = \pi$

9. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis e limitadas da equação de Schrödinger

$$i\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

para um campo escalar complexo $\psi(x,t)$ definido para $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$

$\sim e^{-i(p^2 t \pm px)} \qquad p \in \mathbb{R}$

10. *(2 valores)* Explique como determinar, usando a transformada de Fourier, uma solução formal da equação de Schrödinger

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

para um campo escalar complexo $\psi(x,t)$ definido na reta real e de quadrado integrável com condição inicial $\psi(x,0) = \varphi(x)$ de quadrado integrável.

$\psi(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i4\pi^2\xi^2 t}\, e^{i2\pi\xi x}\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi$