31/1/2025
recurso

Análise Complexa e de Fourier

FIS
ENGFIS

Nome .....**N**^{o} ..... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(1 valor)* Resolva $z^2 = 1 - i$.

2. *(1 valor)* Calcule o logaritmo principal de $z = 1 - i$.

3. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define.

4. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = -1$ e o disco de convergência da função

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

5. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + z}\,.$$

6. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidades isoladas da função

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4 - z^2}\,.$$

7. *(1 valor)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}\,dz$$

8. *(2 valores)* Calcule (apenas) um dos seguintes integrais

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos(\theta)}\, d\theta \qquad\qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+1}\, dx$$

9. *(1 valor)* Calcule a série de Fourier real $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ da função periódica de período 2π definida, no intervalo $(-\pi, \pi]$, por

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \pi/3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

10. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$, definido no intervalo $x \in [0,\pi]$, com condições de fronteira nulas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$.

11. *(1 valor* Determine a solução formal da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido no intervalo $x \in [0,\pi]$ com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$, e condição inicial $u(x,0) = \sin(2x) - 3\sin(5x)$.

12. *(1 valor)* Calcule a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}dx$ da função

$$f(x) = e^{-|x+1|}$$

13. *(2 valores)* Explique como determinar, usando a transformada de Fourier, uma solução formal da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido na reta real com condição inicial $\psi(x,0) = e^{-x^2}$.