6/11/2024 1º teste	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome ....**Nº**................ ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Resolva $z^3 = -i$.

$$e^{i\pi/2} \qquad e^{i7\pi/6} \qquad e^{-i\pi/6}$$

2. *(1 valor)* Calcule o logaritmo principal de $z = i - 1$.

$$\frac{\log 2}{2} + i\frac{3}{4}\pi$$

3. *(1 valor)* Verifique se a função $f(x + iy) = ix - y$, definida no plano complexo, é holomorfa.

   É holomorfa, pois $f(z) = iz$.

4. *(1 valor)* Resolva $\sin(z) = 2$.

$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} - i\log(2 \pm \sqrt{3}).$$

5. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n}$$

   e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n} = \frac{1}{1-3z^2} \qquad \text{se} \qquad |z| < 1/\sqrt{3}$$

6. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = 1$ e o disco de convergência da função

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots \qquad \text{se} \qquad |z-1| < 1\,.$$

7. *(1 valor)* Seja $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ o contorno definido por $\gamma(t) = i + e^{it}$ com $0 \le t \le \pi$. Calcule

$$\int_\gamma e^z \, dz\,.$$

$$e^{i-1} - e^{i+1}$$

8. *(1 valor)* Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(\sin(z))}{z} \, dz$$

$$2\pi i$$

9. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z}\,.$$

$$f(z) = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \ldots \qquad \text{se} \quad 0 < |z| < 1\,.$$

e

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + \ldots \qquad \text{se} \quad |z| > 1\,.$$

10. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidades isoladas da função

$$f(z) = e^{1/z} + \frac{1}{(z+1)^2(z-1)}\,.$$

Uma singularidade essencial em 0, um pólo simples em 1 e um pólo duplo em -1.

11. *(1 valor)* Calcule o resíduo na singularidade isolada da função $f(z) = z^2\, e^{1/z}$.

$$\frac{1}{6}$$

12. *(1 valor)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=3} z^2\, e^{1/z} dz\,.$$

$$i\,\frac{\pi}{3}$$

13. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(\theta)}\, d\theta\,.$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

14. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2+4}\, dx\,.$$

$$\frac{\pi}{4}\, e^{-10}\,.$$

8/1/2025
2^o teste

Análise Complexa e de Fourier

FIS
ENGFIS

Nome ....**N^o** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier complexa $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ da função periódica de período 2π definida por

$$f(t) = \cos(t) - \sin(2t) + \cos(3t)$$

$$\frac{1}{2}e^{-3t} \; - \frac{i}{2}e^{-2t} \; + \frac{1}{2}e^{-t} \; + \frac{1}{2}e^{t} \; + \frac{i}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

2. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis e limitadas da equação de Schrödinger

$$i\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

para um campo escalar complexo $\psi(x,t)$ definido para $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$

$$\sim e^{-i(p^2 t \pm px)} \qquad p \in \mathbb{R}$$

3. *(2 valores)* Verifique que $u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$, com $f(x)$ e $g(x)$ funções arbitrárias com duas derivadas contínuas, é solução da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f(x-t) + g(x+t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-f'(x-t) + g'(x+t)\right) = f''(x-t) + g''(x+t)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(x-t) + g(x+t)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(x-t) + g'(x+t)\right) = f''(x-t) + g''(x+t)$$

4. *(2 valores)* Determine a solução $u(x,t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, da equação das ondas

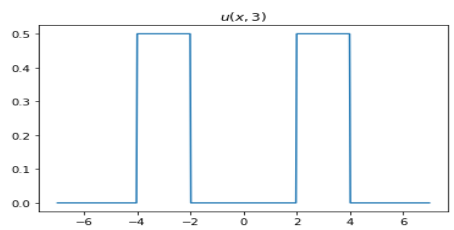
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, e esboce o gráfico de $u(x,3)$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-t) + \varphi(x+t)\right) \qquad \text{onde} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$



5. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$, definido para $x \in [0,\pi]$, com condições de fronteira nulas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$.

$$\sim e^{-n^2 t} \sin(nx) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

6. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi/3 \leq x < 2\pi/3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n\pi/3) - \cos(n\pi/3)}{n} \sin(nx) \,.$$

7. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido para $x \in [0,\pi]$ com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$, e condição inicial $u(x,0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 6).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n\pi/3) - \cos(n\pi/3)}{n} e^{-2n^2 t} \sin(nx) \,.$$

8. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx$ da função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1/2 \end{cases} .$$

$$F(\xi) = i\frac{\cos(\pi\xi)}{2\pi\xi} - i\frac{\sin(\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2}$$

9. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier inversa $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\, e^{2\pi i \xi x}\, d\xi$ da função

$$G(\xi) = -2\pi\xi\, e^{-\pi\xi^2}$$

$$g(x) = -i2\pi x \;\, e^{-\pi x^2}$$

10. *(2 valores)* Explique como determinar, usando a transformada de Fourier, uma solução formal da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido para $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ com condição inicial $u(x,0) = e^{-x^2}$.

ver as aulas