31/10/2023 1º teste	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome ....**N**º .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Resolva $z^3 = -i$.

2. *(1 valor)* Calcule o logaritmo principal de $z = 1 + i$.

3. *(1 valor)* Verifique se a função $f(x + iy) = ix + y$, definida no plano complexo, é holomorfa.

4. *(1 valor)* Resolva $\sin(z) = 3$.

5. *(1 valor)* Considere a função inteira $f(z) = e^{-z}$. Determine e esboce a imagem $f(R)$ da região

$$R = \{x + iy \in \mathbb{C} \ : \ 0 < x < 1 \ , \ -\pi/2 < y < 0\}$$

6. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$$

e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define.

7. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = i$ e o disco de convergência da função

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

8. *(1 valor)* Determine a série de Taylor em torno de $p = 0$ da função

$$f(z) = \sin(z^2)$$

9. *(1 valor)* Determine a série de Taylor em torno de $p = 0$ de uma primitiva de $f(z) = \sin(z^2)$.

10. *(1 valor)* Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ o contorno definido por $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ com $0 \leq t \leq \pi$. Calcule

$$\int_\gamma z^4 \, dz\,.$$

11. *(1 valor)* Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z} \, dz$$

12. *(1 valor)* Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^2} \, dz\,.$$

13. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z}\,.$$

14. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidades isoladas da função

$$f(z) = e^{1/(z+1)} + \frac{1}{z(z-1)^3}\,.$$

15. *(2 valores)* Calcule os resíduos nas singularidade isoladas da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2}\,.$$

9/1/2024 2^o teste	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome ....**N^o** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+2}\, dz\,.$$

2. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos(\theta)}\, d\theta\,.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

3. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+9}\, dx\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+9}\, dx = \frac{\pi}{6e^6}\quad .$$

4. *(2 valores)* Determine a solução da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

na reta real com condições iniciais $u(x,0) = \sin(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -x\, e^{-x^2}$.

5. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido para $x \in [0,\pi]$ e com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$.

6. *(1 valor)* Calcule a série de Fourier de senos da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < \pi/3 \\ 0 & \text{se } \pi/3 \leq x \leq \pi \end{cases} .$$

7. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido para $x \in [0,\pi]$ com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$, e condição inicial $u(x,0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 6).

8. *(1 valor)* Calcule a transformada de Fourier $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx$ da função

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases} .$$

$$F(\xi) = \frac{\sin((1-2\pi\xi)\pi)}{1-2\pi\xi} + \frac{\sin((1+2\pi\xi)\pi)}{1+2\pi\xi} .$$

9. *(1 valor)* Calcule o quadrado da norma L^2, ou seja, $\|F\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2\, d\xi$, da função $F(\xi)$ calculada no exercício 8.

10. *(1 valor)* Calcule a transformada de Fourier inversa $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\, e^{2\pi i \xi x}\, d\xi$ da função

$$G(\xi) = e^{-4\pi^2 t \xi^2}$$

11. *(2 valores)* Use a transformada de Fourier para determinar uma solução da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

para um campo escalar $u(x,t)$ definido para $x \in \mathbb{R}$ com condição inicial $u(x,0) = e^{-x^2}$.

12. *(2 valores)* Determine uma função harmónica conjugada da função harmónica

$$u(x,y) = y^2 - x^2 + y$$