

NomeNº

☐ ENG FIS
☐ FIS

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.

1. (1 valor) Resolva

$$z^3 = 1 - i$$

$$2^{1/6} e^{-i(1/12)\pi}, \quad 2^{1/6} e^{i(3/12)\pi} \quad e \quad 2^{1/6} e^{i(7/12)\pi}$$

2. (1 valor) Verifique se é holomorfa a função

$$f(x + iy) = (e^{-y} - e^y) \cos x + i(e^y + e^{-y}) \sin x$$

A função $f(z)$ é holomorfa, sendo $f(z) = 2 \cos z$.

3. (1 valor) Considere a função holomorfa
- $f(z) = e^z$
- . Determine e esboce a imagem
- $f(R)$
- do retângulo

$$R = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < 1, 0 < y < \pi\}$$

A imagem $f(R)$ é o conjunto do plano definido em coordenadas polares por $1 < r < e$ e $0 < \theta < \pi$.

4. (2 valores) Determine o disco de convergência da seguinte série de potências, e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n} = 1 + 3z^2 + 9z^4 + 27z^6 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n} = \frac{1}{1 - 3z^2} \quad \text{no disco } |z| < 1/\sqrt{3}.$$

5. (2 valores) Determine a série de Taylor em torno de
- $p = 3$
- da função

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

e o seu disco de convergência.

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-3)^n = \frac{1}{3} - \frac{(z-3)}{9} + \frac{(z-3)^2}{27} - \frac{(z-3)^3}{81} + \dots \quad \text{se } |z-3| < 1.$$

6. (2 valores) Resolva

$$\sin(z) = 2$$

$$z = \pi/2 + 2\pi\mathbb{Z} - i \log(2 \pm \sqrt{3}).$$

7. (2 valores) Determine a série de Taylor de

$$f(z) = \sin(z^2)$$

em torno de $p = 0$.

$$\sin(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{4n+2} = z^2 - \frac{1}{6} z^6 + \frac{1}{120} z^{10} + \dots$$

8. (1 valor) Determine uma primitiva de $\sin(z^2)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} z^{4n+3} = \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{42}z^7 + \frac{1}{1320}z^{11} + \dots$$

9. (2 valores) Calcule o seguinte integral de contorno, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é o caminho definido por $\gamma(t) = (1+i)t$.

$$\int_{\gamma} z^2 dz.$$

$$\int_{\gamma} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

10. (1 valor) Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z^2)}{z} dz$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z^2)}{z} dz = 0$$

11. (1 valor) Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z^2)}{z^2} dz.$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(z^2)}{z^2} dz = 0.$$

12. (1 valor) Toda função analítica é holomorfa.

☒ Verdadeiro ☐ Falso

.

13. (1 valor) A parte real $u(x, y)$ de uma função holomorfa $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função harmônica, ou seja, satisfaz $\Delta u = 0$.

☒ Verdadeiro ☐ Falso

14. (1 valor) Se $f(z)$ é uma função holomorfa na região $\Omega \subset \mathbb{C}$, então $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo contorno fechado $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$.

☐ Verdadeiro ☒ Falso

15. (1 valor) Toda função inteira (ou seja, holomorfa em todo o plano complexo) e limitada é constante.

☒ Verdadeiro ☐ Falso