3/12/2021 1º teste	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(1 valor)* Calcule $\sqrt{1+i}$.

$$\sqrt[4]{2}e^{(\pi/8+k\pi)} \quad \text{com} \quad k=0,1$$

2. *(1 valor)* Resolva $e^{-z}=i$.

$$z=-i\pi/2+2\pi i\mathbb{Z}$$

3. *(1 valor)* Verifique se a função $f(x+iy)=e^{-y}\,(i\cos x-\sin x)$ é holomorfa.

A função $f(z)$ é holomorfa, sendo $f(z)=ie^{iz}$.

4. *(1 valor)* Determine e esboce a imagem $f(R)$ do retângulo

$$R=\{x+iy\in\mathbb{C}\;:\;0<x<1\;,\;0<y<\pi/2\}$$

pela função holomorfa $f(z)=e^{-z}$.

A imagem $f(R)$ é o conjunto do plano definido em coordenadas polares por $1/e<r<1$ e $-\pi/2<\theta<0$.

5. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da seguinte série de potências, e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}=\frac{2}{2-z^2} \qquad \text{no disco} \quad |z|<\sqrt{2}.$$

6. *(2 valores)* Calcule o seguinte integral de contorno, onde γ é a curva definida por $z(t)=e^{it}$ com $t\in[0,\pi/2]$.

$$\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}\,dz\,.$$

$$\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}\,dz=-1\,.$$

7. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p=i$, e o seu disco de convergência, de

$$f(z)=\frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z}=-\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}(z-i)^n=-i+(z-i)+i(z-i)^2-(z-i)^3-i(z-i)^4+\dots \qquad \text{se } |z-i|<1\,.$$

8. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z^4}\,.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 1 + z^2 + z^4 + \dots \qquad \text{se } 0 < |z| < 1\,.$$

e

$$f(z) = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} - \frac{1}{z^{10}} - \dots \qquad \text{se } |z| > 1\,.$$

9. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas da função

$$f(z) = \frac{z^2 \sin(1/z)}{z^2 - 2}\,.$$

As singularidades isoladas são dois pólos simples em $\pm\sqrt{2}$, e uma singularidade essencial em 0.

10. *(2 valores)* Calcule o integral de contorno

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2 \sin(1/z)}{z^2 - 2}\, dz\,.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2 \sin(1/z)}{z^2 - 2}\, dz = 2\pi i \left(1 - \sqrt{2}\sin\left(1/\sqrt{2}\right)\right)\,.$$

11. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(\theta)}\, d\theta\,.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(\theta)}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

12. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)^2}\, dx\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,.$$

21/1/2022 2º teste	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(1 valor)* A série de Fourier de uma função integrável, periódica de período 2π e ímpar é uma série de cosenos.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

2. *(1 valor)* As soluções estacionárias da equação do calor são funções harmónicas.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

3. *(1 valor)* A parte imaginária de uma função holomorfa é uma função harmónica.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

4. *(1 valor)* A função
$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
define uma equivalência conforme entre o semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ e o disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

   ◯ Verdadeiro ◯ Falso

5. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis e limitadas da equação de Laplace
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
para um campo escalar $u(x, y)$ definido na região $[0, \pi] \times [0, \infty)$ com condições de fronteira $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ para todo $y \geq 0$.
$$u(x,t) = e^{-ny} \sin(nx)\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos da função definida, no intervalo $[0, \pi]$, por
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x-\alpha| \geq \varepsilon \\ 1 & \text{se } |x-\alpha| < \varepsilon \end{cases}\,.$$
onde $\alpha \in (0, \pi)$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.
$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)\,\sin(n\varepsilon)}{n}\,\sin(nx)\,.$$

7. *(2 valores)* Determine a solução formal do problema da propagação de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
no intervalo $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, e condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 6).
$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)\,\sin(n\varepsilon)}{n}\,e^{-n^2 t}\,\sin(nx)\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier inversa $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{2\pi i \xi x}\, d\xi$ da função

$$F(\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

com $t > 0$.

$e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ é a transformada de Fourier do núcleo do calor

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

9. *(2 valores)* Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

na reta real $x \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x,0) = e^{-x^2}$.

Se $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi t}\ \widehat{u}(\xi,t)\, d\xi$, então

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi,t) = -(4\pi^2\xi^2 - 2\pi i\xi)\widehat{u}(\xi,t)$$

e portanto

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{2\pi i \xi t}\, e^{-4\pi^2\xi^2 t}\, \widehat{u}(\xi,0)\,.$$

Mas $e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ é a transformada de Fourier do núcleo do calor

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

e portanto $e^{-4\pi^2\xi^2 t + 2\pi i \xi t}$ é a transformada de Fourier de $H_{4\pi t}\ (x+t)$. Finalmente,

$$u(x,t) = \int_{-\infty} e^{-y^2}\ \ H_{4\pi t}(x+t-y)\, dy\,.$$

10. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{i2\pi x} & \text{se } |x| \le 1/2 \\ 0 & \text{se } |x| > 1/2 \end{cases}\,.$$

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(\pi(\xi+1))}{\pi(\xi+1)}\,.$$

11. *(2 valores)* Determine uma função harmónica conjugada de $u(x,y) = e^y \sin(x)$.

$$v(x,y) = e^y \cos(x)\,.$$

12. *(2 valores)* Determine uma equivalência conforme $f : Q_3 \to \mathbb{D}$ entre terceiro quadrante, a região $Q_3 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\,,\ \Im(z) < 0\}$, e o disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

$$f(z) = \frac{z^2 - i}{z^2 - i}\,.$$