7/2/2022 recurso	Análise Complexa e de Fourier	FIS ENGFIS

Nome ....**N^o** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valor)* Resolva

$$z^3 = -i \qquad \text{e} \qquad e^w = -i$$

$$z = e^{i\pi/2}, e^{-i\pi/6}, e^{-i5\pi/6} \qquad z = -i\pi/2 + 2\pi i\mathbb{Z}$$

2. *(2 valores)* Verifique se a função $f(x+iy) = e^x(\cos y - i\sin y)$ é holomorfa.

A função não é holomorfa, sendo $f(z) = e^{i\overline{z}}$.

3. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da seguinte série de potências, e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+1} = z\, e^{3z} \qquad \text{no disco } \ |z| < \infty.$$

4. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}\,.$$

$$f(z) = -1 - z^2 - z^4 + \dots \qquad \text{se } |z| < 1$$

e

$$f(z) = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^8} + \dots \qquad \text{se } |z| > 1\,.$$

5. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas da função

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3 - z}$$

e calcule o integral de contorno

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{\sin(z)}{z^3-z}\, dz\,.$$

As singularidades isoladas são dois pólos simples em $z = \pm 1$, e uma singularidade removível em $z = 0$. O itegral de contorno é

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{\sin(z)}{z^3-z}\, dz = 0\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule um (e apenas um) dos integrais

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos(\theta)}\, d\theta \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

7. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de cosenos da função definida, no intervalo $[0, \pi]$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x-\alpha| \geq \varepsilon \\ 1 & \text{se } |x-\alpha| < \varepsilon \end{cases} .$$

onde $\alpha \in (0, \pi)$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

$$\frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)\,\sin(n\varepsilon)}{n} \cos(nx) .$$

8. *(2 valores)* Determine a solução formal do problema da propagação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira nulas $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$, e condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 7).

$$u(x,t) = \frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)\,\sin(n\varepsilon)}{n} e^{-n^2 t} \cos(nx) .$$

9. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$ da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-i\pi x} & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases} .$$

$$\widehat{f}(\xi) = 2\,\frac{\sin(\pi(2\xi+1))}{\pi(2\xi+1)} .$$

10. *(2 valores)* Determine uma equivalência conforme $f : Q_2 \to \mathbb{D}$ entre o segundo quadrante, a região $Q_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\,,\, \Im(z) > 0\}$, e o disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

$$f(z) = \frac{z^2 + i}{z^2 - i} .$$