

# Análise Complexa e Análise de Fourier para físicos e engenheiros

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática - Universidade do Minho

Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL

e-mail [scosentino@math.uminho.pt](mailto:scosentino@math.uminho.pt)

4 de Janeiro de 2021



## Resumo

This is not a book! These are notes written for personal use while preparing lectures on “Análise Complexa” for students of FIS and MIENGFIS during the a.y.’s 2014/15, 2017/18 and 2018/19. They are rather informal and certainly contain mistakes (indeed, they are constantly actualized). I tried to be as synthetic as I could, without missing the observations that I consider important. Emphasis is on the ideas used in physics and engineering.

Chapters correspond, at least in my during the first drafts, to weeks, i.e. four hours lectures. Most probably I will not lecture all I wrote, and did not write all I plan to lecture. So, I included sketched paragraphs, about material that I think should/could be lectured within the same course, given enough time, or that can be read alone by motivated students.

References contain some introductory manuals that I like, some classics, books where I have learnt things in the past century, recent books which I find interesting. Almost all material can be found in the great series [SS03a, SS03b] by Stein and Shakarchi. More classical references are Ahlfors and Rudin [Ah78, Ru87] for complex analysis, and [BDP92] for partial differential equations. Good material and further references can easily be found in the web, for example in [Scholarpedia](#), in [Wikipedia](#), in [KhanAcademy](#) or in the [MIT OpenCourseWare](#).

It would be nice to have time and places to do simulations, using some of the software at our disposal in laboratories: this includes proprietary software like [Mathematica](#)<sup>®8</sup>, [Matlab](#) and [Maple](#), or open software like [Maxima](#) and [GeoGebra](#). Occasionally, we may also use some [c++](#) code and [Java](#) applets. Some applets are in the [bestiario](#) in my [web page](#).

Everything about the course may be found in my web pages

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/salteaching.html>

**Black paragraphs** form the main text.

**e.g.** means EXEMPLI GRATIA, that is, “for example”, and is used to introduce important or (I hope!) interesting examples.

**ex:** means “exercise”, to be solved at home or in the classroom.

**Blue paragraphs** deal with examples, applications and ideas relevant in physics, engineering or other sciences. They are the main reason why all this maths is worth studying for you.

**Red paragraphs** are non-trivial facts and results which may be skipped in a first (and also second) reading.

A  $\square$  indicates the end of a proof.

Pictures were made with *Grapher* on my MacBook, or taken from [Wikipedia](#), or produced with [Matlab](#), [Python](#) or [Java](#) codes,



## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Álgebra e geometria dos números complexos</b>	<b>7</b>
1.1	Números complexos	7
1.2	Representação polar	11
1.3	Geometria elementar	13
1.4	Sucessões e limites	16
1.5	Esfera de Riemann	20
<b>2</b>	<b>Funções holomorfas</b>	<b>22</b>
2.1	Limites e continuidade	22
2.2	Compactos e continuidade uniforme	23
2.3	Derivada complexa e funções holomorfas	25
2.4	Curvas e conexidade	27
2.5	Condições de Cauchy-Riemann	29
2.6	Polinómios e funções racionais	33
<b>3</b>	<b>Séries de potências e funções analíticas</b>	<b>39</b>
3.1	Séries	39
3.2	Sucessões e séries de funções	41
3.3	Séries de potências e funções analíticas	43
3.4	Funções geradoras e teoremas de Abel e Tauber	45
3.5	Exponencial e funções trigonométricas	50
<b>4</b>	<b>Integração complexa e teorema de Cauchy</b>	<b>54</b>
4.1	Integral de Riemann e aproximação	54
4.2	Integrais de contorno	58
4.3	Teorema de Cauchy-Goursat e primitivas locais	63
4.4	Homotopias e teorema de Cauchy global	67
4.5	Logaritmos	74
<b>5</b>	<b>Fórmula integral de Cauchy e séries de Taylor</b>	<b>77</b>
5.1	Fórmula de Cauchy	77
5.2	Índice	78
5.3	Séries de Taylor	79
5.4	Zeros isolados e princípio do máximo	85
<b>6</b>	<b>Séries de Laurent e cálculo dos resíduos</b>	<b>88</b>
6.1	Séries de Laurent	88
6.2	Singularidades isoladas	90
6.3	Teorema e cálculo dos resíduos	92
6.4	Princípio do argumento	95
6.5	Cálculo de integrais reais	96
<b>7</b>	<b>EDPs da física-matemática</b>	<b>103</b>
7.1	Ondas	103
7.2	Corda vibrante e harmónicas	107
7.3	Equação de calor/difusão	110
7.4	Separação de variáveis	117
7.5	Potenciais e equação de Laplace	121
7.6	Princípios variacionais	123
<b>8</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>129</b>
8.1	Funções periódicas e polinómios trigonométricos	129
8.2	Geometria do espaço das funções de quadrado integrável	130
8.3	Séries de Fourier	133
8.4	Derivadas e decaimento dos coeficientes	136
8.5	Aplicações das séries de Fourier às EDPs	138

<b>9</b>	<b>Convergência das séries de Fourier</b>	<b>143</b>
9.1	Convergência uniforme . . . . .	143
9.2	Produto de convolução e convergência pontual . . . . .	146
9.3	Identidades aproximadas e teorema de Fejer . . . . .	150
9.4	Convergência em média quadrática . . . . .	154
<b>10</b>	<b>Transformada de Fourier</b>	<b>156</b>
10.1	Transformada de Fourier . . . . .	156
10.2	Transformada de Fourier no espaço de Schwartz . . . . .	159
10.3	Identidades aproximadas e fórmula de inversão . . . . .	161
10.4	Aplicações da transformada de Fourier às EDPs . . . . .	167
10.5	Fórmula do somatório de Poisson . . . . .	171
<b>11</b>	<b>Funções harmônicas no plano</b>	<b>177</b>
11.1	Funções harmônicas no plano e funções holomorfas . . . . .	177
11.2	Princípio do valor médio e do máximo . . . . .	180
11.3	Fórmula de Poisson . . . . .	181
<b>12</b>	<b>Transformações conformes</b>	<b>186</b>
12.1	Geometria local das funções holomorfas . . . . .	186
12.2	Grupo de Möbius . . . . .	188
12.3	Transformações conformes elementares . . . . .	192
12.4	Teorema de uniformização de Riemann . . . . .	196
<b>13</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>200</b>
13.1	Transformada de Laplace . . . . .	200
13.2	Transformada de Laplace inversa . . . . .	205
13.3	Função de transferência e resposta impulsiva . . . . .	209
13.4	Teoremas abelianos e tauberianos . . . . .	213
<b>14</b>	<b>Avaliação assintótica de integrais</b>	<b>217</b>
14.1	Fórmula de Laplace . . . . .	217
14.2	Integrais oscilatórios e princípio da fase estacionária . . . . .	219
14.3	Aproximação semi-clássica . . . . .	221

## Notações

**Números.**  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  denota o conjunto dos números naturais,  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  denota o conjunto dos números inteiros não negativos.  $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  denota o anel dos números inteiros.  $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$  denota o corpo dos números racionais.  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

**Notação de Landau.** Se  $f(t)$  e  $g(t)$  são duas funções definidas numa vizinhança do ponto  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ , então

- $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$  (“ $f$  is big-O of  $g$ ”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $f(t) \leq C \cdot g(t)$  para todos os  $t$  numa vizinhança de  $a$ ,
- $f(t) = o(g(t))$  (“ $f$  is small-o of  $g$ ”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que o quociente  $f(t)/g(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow a$ .
- $f(t) \asymp g(t)$  (“ $f$  and  $g$  are within a bounded ratio”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que  $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$  e  $g(t) = \mathcal{O}(f(t))$ , ou seja, que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\frac{1}{C} \cdot g(t) \leq f(t) \leq C \cdot g(t)$  para todos os  $t$  numa vizinhança de  $a$ ,
- $f(x) \sim g(x)$  (“ $f$  and  $g$  are asymptotically equal”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$

**Espaço euclidiano.**  $\mathbb{R}^n$  denota o espaço Euclidiano de dimensão  $n$ . Fixada a base canónica  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ , os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas  $x_i \in \mathbb{R}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

O produto escalar/interno *Euclidiano* entre os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

O produto escalar realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico)  $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  e o próprio  $\mathbb{R}^n$ : o valor da forma linear  $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$  no vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$ .

A norma Euclidiana do vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

A distância Euclidiana entre os pontos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  e raio  $\varepsilon > 0$  é o conjunto

$$B_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}.$$

Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  se cada seu ponto  $\mathbf{a} \in A$  é o centro de uma bola  $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$ , com  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, ou seja, se é uma reunião de bolas abertas.

Os pontos e as relativas coordenadas no plano  $\mathbb{R}^2$  ou no espaço  $\mathbb{R}^3$  são também denotados, conforme a tradição, por  $\mathbf{r} = (x, y)$  ou  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , respetivamente. Neste caso,  $r = \|\mathbf{r}\|$  denota a norma do vetor  $\mathbf{r}$ , e portanto  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$  denota o vetor unitário paralelo a  $\mathbf{r}$ .

**Caminhos.** Se  $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável do “tempo”  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos  $I \subset \mathbb{R}$  com valores no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada  $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$  é dita “velocidade”, a sua norma  $v(t) := |\mathbf{v}(t)|$  é dita “velocidade escalar”, e a segunda derivada  $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$  é dita “aceleração”.

**Campos.** Um *campo escalar* é uma função real  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida num domínio  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Um *campo vetorial* é uma função  $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$ , cujas coordenadas  $F_i(\mathbf{x})$  são  $k$  campos escalares.

A derivada do campo diferenciável  $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  no ponto  $\mathbf{x} \in X$  é a aplicação linear  $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} + o(|\mathbf{v}|)$$

para todos os vetores  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  de norma  $\|\mathbf{v}\|$  suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana  $\text{Jac}\mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\partial F_i / \partial x_j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ . Em particular, o *diferencial* do campo escalar  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $\mathbf{x} \in X$  é a forma linear  $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde  $dx_k$ , o diferencial da função coordenada  $\mathbf{x} \mapsto x_k$ , é a forma linear que envia o vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  em  $dx_k \cdot \mathbf{v} := v_k$ ). A derivada do campo escalar diferenciável  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  na direção do vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (aplicado) no ponto  $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ , é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é o campo vetorial  $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \langle \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$$

para todos os vetores (tangentes)  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (aplicados no ponto  $\mathbf{x} \in X$ ).

# 1 Álgebra e geometria dos números complexos

5 out 2020

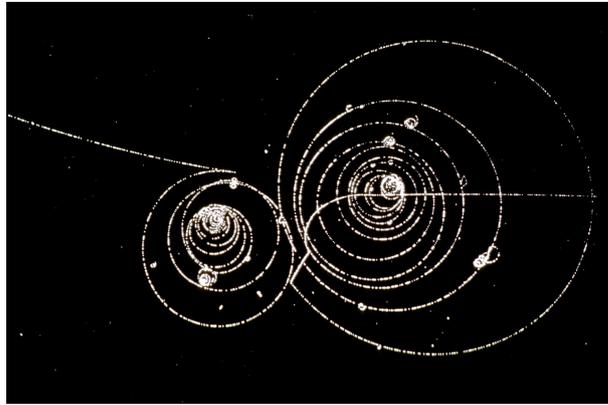
**História muito breve.** Os números complexos foram inventados/descobertos no século XVI como um truque “sofístico” para resolver polinômios do gênero  $x^3 + px + q = 0$ . Hoje em dia, fazem parte da formulação das leis fundamentais da Natureza, como, por exemplo, a *equação de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

da mecânica quântica, ou os *integrals de Feynman*

$$\int_{\text{paths}} e^{iS[x]/\hbar} \mathcal{D}x$$

da teoria quântica dos campos.



Nas palavras de Roger Penrose [Pe05],

... complex numbers, as much as reals, and perhaps even more, find a unity with nature that is truly remarkable. It is as though Nature herself is as impressed by the scope and consistency of the complex-number system as we are ourselves, and has entrusted to these numbers the precise operations of her world at its minutest scales.

## 1.1 Números complexos

Os números complexos formam um corpo que estende o corpo dos números reais, e cujas operações refletem a geometria euclidiana, ou melhor, conforme, do plano.

**O corpo dos números complexos.** Do ponto de vista algébrico, o corpo dos *números complexos* é  $\mathbb{C} := \mathbb{R}(i)$ , onde  $i^2 = -1$ . Ou seja, é o conjunto  $\mathbb{C}$  das expressões formais  $z = x + iy$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ , que chamamos “números complexos”, munido das operações binárias “soma”, definida por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

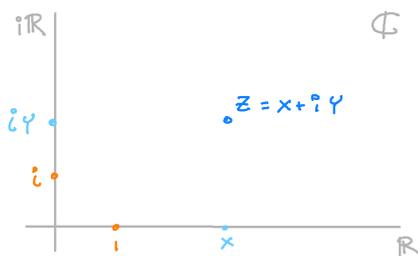
e “multiplicação”, definida por

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.2)$$

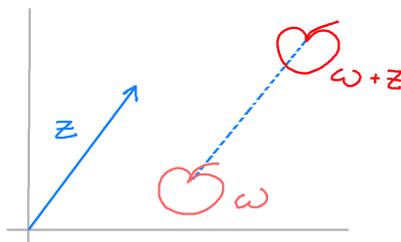
É subentendido que dois números complexos  $x_1 + iy_2$  e  $x_2 + iy_2$  são iguais sse  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ . É também conveniente denotar simplesmente  $x + i0 = x$  e  $0 + iy = iy$ . Em particular,  $x \mapsto x + i0$  define uma inclusão  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , e as operações definidas acima são as usuais operações no corpo dos reais.

Se  $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$ , então  $i \cdot i = -1$ , ou seja,  $\pm i$  são (as únicas) “raízes quadradas de  $-1$ ”. De fato (e esta é a origem das fórmulas acima), somas e multiplicações entre números complexos podem ser manipuladas como as correspondentes operações entre números reais (ou seja, usando as propriedades associativas, comutativas e distributivas), e depois substituindo  $i \cdot i$  por  $-1$ .

É natural identificar os números complexos  $z = (x + iy)$  com os pontos/vetores  $(x, y)$  do plano  $\mathbb{R}^2$ , e denotar a correspondência com  $x + iy \approx (x, y)$ . A reta real  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  é naturalmente identificada com o eixo dos  $x$ 's em  $\mathbb{R}^2$ , e a reta “imaginária”  $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  é naturalmente identificada com o eixo dos  $y$ 's.



Então a soma  $z_1 + z_2$  corresponde à soma dos vetores  $z_1 \approx (x_1, y_1)$  e  $z_2 \approx (x_2, y_2)$  do plano. O conjunto  $\mathbb{C}$ , munido da operação  $+$  definida em (1.1), é um grupo abeliano aditivo, cujo elemento neutro é  $0 := 0 + i0$ . O oposto do número complexo  $z = x + iy$  é o número complexo  $-z = (-x) + i(-y)$  (denotado simplesmente por  $-z = -x - iy$ ), que verifica  $z + (-z) = 0$ . Somar um número complexo  $z$ , i.e. fazer  $w \mapsto w + z$ , corresponde a fazer uma translação no plano.



Todo  $z = x + iy \neq 0$  admite um único inverso multiplicativo, um número complexo  $1/z$  tal que  $z \cdot (1/z) = (1/z) \cdot z = 1$ , dado por

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

como é fácil verificar (observe que se  $z \neq 0$  então  $x^2 + y^2 > 0$ ). Portanto, o conjunto  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , munido da operação  $\cdot$  definida em (1.2), é um grupo abeliano, o grupo multiplicativo dos números complexos invertíveis, cujo elemento neutro é  $1 := 1 + i0$ .

As potências inteiras de um número complexo são definidas por recorrência:  $z^{n+1} := z \cdot z^n$ , se  $n \geq 1$ , sendo  $z^0 := 1$ . Se  $z \in \mathbb{C}^\times$ , então as potências negativas são definidas por  $z^{-n} := (1/z)^n$ . Por exemplo,  $i^2 = -1$ , e  $i^{-1} = 1/i = -i$ .

A propriedade distributiva  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ , que implicitamente foi usada na definição da multiplicação, mostra que  $\mathbb{C}$  é um corpo. Contém, como subcorpos, o corpo dos reais  $\mathbb{R}$ , que por sua vez contém o corpo  $\mathbb{Q}$  dos racionais. No entanto, não é possível estender a ordem de  $\mathbb{R}$  a uma ordem de  $\mathbb{C}$  que seja compatível com as operações: o corpo dos números complexos não é um corpo ordenado.

**ex:** Calcule

$$(2 + i3) + (3 - i2) \quad (1 - i) \cdot (2 - i) \quad (1 + i) + (1 - i) \cdot (2 - i5)$$

**ex:** Na identificação  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  definida por  $x + iy \approx (x, y)$ , o produto  $(a + ib)(x + iy)$  é dado por

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em particular, se  $a + ib \neq 0$ , então o produto é

$$\sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde  $\tan \theta = b/a$  se  $a \neq 0$ , ou  $\theta = \pi/2$  se  $a = 0$ . Esta fórmula revela o significado geométrico da multiplicação: a multiplicação por um número complexo  $a + ib$  diferente de zero corresponde a uma rotação de um ângulo  $\theta$  e uma homotetia de razão  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

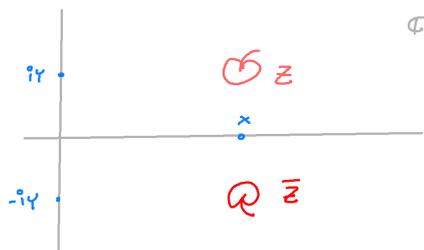
**ex:** Represente na forma  $x + iy$  os seguintes números complexo

$$i^3 \quad \frac{1}{1+i} \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2 \quad i^{17} \quad (2 \pm i)^3$$

**Conjugação.** O conjugado de  $z = x + iy$  é

$$\bar{z} := x - iy,$$

ou seja, a imagem do ponto  $x + iy \approx (x, y)$  pela reflexão na reta  $y = 0$  do plano  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ .



A conjugação respeita soma e produtos, ou seja, verifica

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{e} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

(a segunda identidade não é óbvia, mas um “milagre” que relaciona multiplicação e geometria euclidiana do plano). Observe também que a conjugação é uma involução, ou seja,  $\bar{\bar{z}} = z$ .

Os números reais

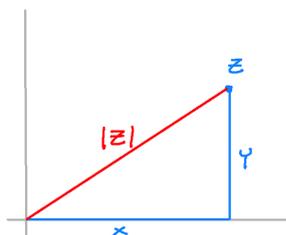
$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo  $z = x + iy$ , respetivamente. Observe que  $z = \bar{z}$  sse  $z$  é real, i.e. sse  $\Im(z) = 0$ .

**Módulo.** A conjugação permite definir  $N(z) := z\bar{z} = x^2 + y^2$ , que é um número real não-negativo (o “módulo” de  $z$  no sentido da teoria de números), e portanto o *módulo*, ou *valor absoluto*, de  $z = x + iy$ ,

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que é a norma euclidiana do vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Em particular,  $|z| = 0$  sse  $z = 0$ .



O valor absoluto é multiplicativo, ou seja,

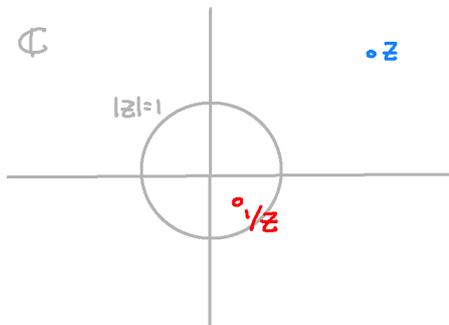
$$|zw| = |z||w|$$

e, portanto,  $|z/w| = |z|/|w|$  se  $w \neq 0$ . O inverso multiplicativo de um número complexo  $z \neq 0$  é então

$$1/z = \bar{z}/|z|^2.$$

Os números complexos de norma um definem a *circunferência unitária*  $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ , que é um subgrupo do grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^\times$ , isomorfo ao grupo  $U(1)$  das transformações unitárias do espaço euclidiano complexo  $\mathbb{C}$ .

Portanto, a inversão  $z \mapsto 1/z$  de um número complexo não nulo corresponde a uma “reflexão” na circunferência unitária, a transformação  $z \mapsto z^* := z/|z|^2$ , seguida por uma conjugação, uma reflexão na reta real.



**ex:** Verifique que  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ .

**ex:** Interprete, e prove, a seguinte identidade entre números reais:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

**Raízes de polinômios reais de grau dois.** Um polinômio de grau dois com coeficiente reais é uma função do gênero  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Para calcular as suas raízes, ou seja, os pontos onde  $f(x) = 0$ , podemos dividir por  $a$ , e considerar o polinômio mônico (ou seja, tal que o termo de grau maior tem coeficiente unitário)

$$f(z) = z^2 + 2\alpha z + \beta$$

(coloquei o fator 2 para simplificar os cálculos seguintes). Ao “completar o quadrado”, observamos que

$$\begin{aligned} z^2 + 2\alpha z + \beta &= z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 - \alpha^2 + \beta \\ &= (z + \alpha)^2 + (\beta - \alpha^2) \end{aligned}$$

e portanto as raízes são soluções de

$$(z + \alpha)^2 = \alpha^2 - \beta.$$

O número  $\delta := \alpha^2 - \beta$  é chamado *discriminante* do polinômio. Se  $\delta \geq 0$ , temos duas raízes reais  $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\delta}$ , eventualmente coincidentes quando  $\delta = 0$ . Em termos dos coeficientes originais  $a, b, c$ , esta é a famosa *fórmula resolvente*

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se  $\delta < 0$ , e portanto  $\delta = -\omega^2$  para algum  $\omega > 0$ , o polinómio não admite raízes reais. No entanto, podemos observar que  $(\pm i\omega)^2 = \delta$ . Então temos duas raízes complexas e conjugadas

$$z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega.$$

Nos dois casos, o polinómio mónico fatoriza como produto

$$f(z) = (z - z_+)(z - z_-)$$

de duas raízes, simétricas em relação ao eixo real.

**ex:** Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

## 1.2 Representação polar

A fórmula de Euler revela a relação entre o produto entre números complexo e as homotetias e as rotações do plano.

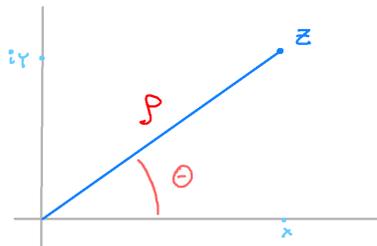
**Representação polar.** A *representação polar* do número complexo  $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$  é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$  é o módulo de  $z$ ,  $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  é um *argumento* de  $z$ , ou seja, um ângulo tal que  $x = \rho \cos(\theta)$  e  $y = \rho \sin(\theta)$  (logo definido a menos de múltiplos inteiros de  $2\pi$ ), e o número complexo unitário  $e^{i\theta} \in \mathbb{S}$  é (provisoriamente) definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta). \quad (1.3)$$

à custa, portanto, das funções trigonométricas  $\cos$  e  $\sin$ , supostas definidas anteriormente (e.g. num curso de cálculo). Pode ser útil escolher um valor do argumento, e chamar *argumento principal* de um número  $z$  o único argumento que satisfaz  $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ .



**Produto em representação polar.** Se  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ , então as fórmulas de adição para seno e cosseno mostram que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1.4)$$

Por exemplo, o quadrado de um número complexo  $z = \rho e^{i\theta}$  é  $z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$ . Também, se  $z_2 \neq 0$ ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Estas fórmulas revelam, mais uma vez, o significado geométrico da multiplicação entre números complexos.

Uma primeira consequência é que o inverso do número complexo  $z = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho > 0$ , é  $z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$ . Outra é que a multiplicação por  $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$ , no plano  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ , ou seja, a transformação  $w \mapsto zw$ , corresponde a uma homotetia  $w \mapsto \rho w$  de razão  $|z| = \rho > 0$  (uma dilatação ou contração se  $\rho \neq 1$ ) e uma rotação  $w \mapsto e^{i\theta} w$  de um ângulo  $\theta$ .



Em particular, a multiplicação por um número complexo de módulo um, ou seja, da forma  $e^{i\theta}$  com  $\theta$  real, corresponde a uma rotação anti-horária de um ângulo  $\theta$ . Por exemplo, a multiplicação por  $i = e^{i\pi/2}$  é uma “raiz quadrada” da rotação  $z \mapsto e^{i\pi}z = -z$  de um ângulo  $\pi$ , logo uma rotação de um ângulo  $\pi/2$  (chamada “rotação de Wick” pelos físicos).

**Exponencial.** A fórmula de Euler (1.3) e a propriedade (1.4) permitem definir o *exponencial* de um número complexo arbitrário  $z = x + iy$  como

$$e^z := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \tag{1.5}$$

Assim, o módulo de  $e^z$  é igual ao número real  $e^x$ , que é estritamente positivo, e o argumento de  $e^z$  é igual a  $y$ , a parte imaginária de  $z$ . Em particular,  $e^z \neq 0$ . É imediato então verificar, usando a equação funcional do exponencial real e as fórmulas de adição trigonométricas, que o exponencial complexo satisfaz a regra do produto

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

ou seja, define um homomorfismo do grupo aditivo  $\mathbb{C}$  no grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^\times$ .

**Raízes.** Se  $n = 1, 2, 3, \dots$ , então cada número complexo  $w \neq 0$  possui  $n$  raízes  $n$ -ésimas, i.e.  $n$  números complexos  $z$  que resolvem

$$z^n = w.$$

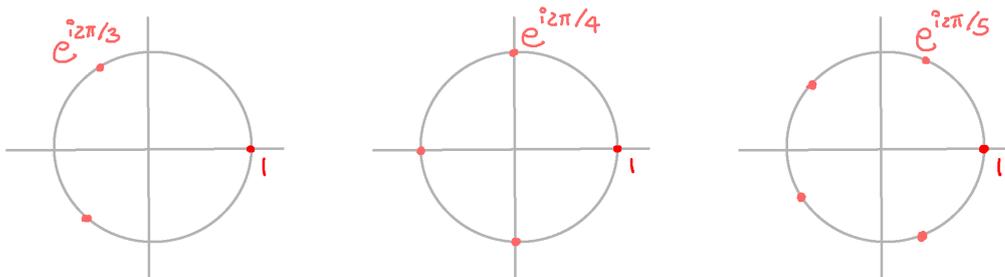
De fato, as raízes  $n$ -ésimas de  $w = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho \neq 0$ , são os números

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2\pi k)/n}$$

com  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Os pontos  $z_k$  formam os vértices de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito na circunferência de raio  $\sqrt[n]{\rho}$  e centro 0. Em particular, os números complexos

$$\zeta_k := e^{i2\pi k/n},$$

com  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , que resolvem  $(\zeta_k)^n = 1$  e portanto pertencem a circunferência unitária, são chamados *raízes  $n$ -ésimas da unidade*. Observe que  $\zeta_k = (\zeta_1)^k$ , onde  $\zeta_1 = e^{i2\pi/n}$  é uma raiz “primitiva”.



**ex:** Represente na forma polar os seguintes números complexos:

$$-i \quad i - 1 \quad 1 + i \quad 3 - 4i$$

**ex:** Verifique que o conjugado de  $z = \rho e^{i\theta}$  é  $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ .

**ex:** Calcule

$$e^{i\pi} \quad e^{-i\pi/2} \quad \sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i} \quad \sqrt[4]{i}$$

**ex:** Resolva as equações  $z^3 = 1$ ,  $z^5 = 1$  e  $z^3 = 81$ .

**ex:** Verifique que  $(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$ , e portanto, se  $z \neq 1$ ,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Considere  $z = e^{i\theta}$  com  $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$  e real, calcule a parte real e deduza

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2 \sin(\theta/2)}$$

**ex:** Mostre que se  $\omega$  é uma raiz  $n$ -ésima não trivial da unidade (ou seja,  $\omega^n = 1$  e  $\omega \neq 1$ ) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

**ex:** Use a representação polar e a fórmula de Euler (1.3) para provar a

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (1.6)$$

Deduza fórmulas

$$\cos(n\theta) = \dots \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \dots$$

para valores pequenos de  $n$ . Deduza que existem polinômios algébricos  $T_n(x)$  de grau  $n \geq 0$ , (chamados *polinômios de Chebyshev*) tais que

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

(observe que as potências pares de  $\sin \theta$  podem ser substituídas por potências pares de  $\cos \theta$  usando a identidade trigonométrica), e calcule os primeiros.

### 1.3 Geometria elementar

A geometria dos números complexos é a geometria euclidiana do plano.

**Norma e métrica euclidiana.** É evidente que a parte real e a parte imaginária de um número complexo  $z = x + iy$  são limitadas pelo módulo, i.e.  $|x| \leq |z|$  e  $|y| \leq |z|$ . Por outro lado, um cálculo direto mostra que  $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2 \Re(z\bar{w})$ . Portanto, o módulo satisfaz a *desigualdade do triângulo*

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|} \quad (1.7)$$

A desigualdade do triângulo diz que  $|z|$  é uma norma, e portanto

$$d(z, w) := |z - w|$$

é uma métrica no plano complexo. Ou seja, é positiva quando  $z \neq w$ , nula sse  $z = w$ , e satisfaz a desigualdade do triângulo

$$\text{dist}(z, w) \leq \text{dist}(z, p) + \text{dist}(p, w).$$

De fato, como já observado, é a métrica euclidiana de  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ , definida pelo produto escalar euclidiano  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy' = \Re(z\bar{z}')$ .

Um caso particular da desigualdade do triângulo é  $|x + iy| \leq |x| + |y|$ , e diz que o módulo de um número complexo é limitado pela soma dos módulos das suas partes real e imaginária.

**ex:** Diga quando vale a igualdade na (1.7).

**ex:** Mostre que

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

**ex:** Prove a desigualdade

$$|z \pm w| \geq ||z| - |w||$$

**ex:** O *norma do supremo* no plano  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  é definida por  $\|x + iy\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$ . Mostre que as normas  $\|\cdot\|_\infty$  e  $|\cdot|$  são equivalentes, ou seja,

$$\|z\|_\infty \leq |z| \leq \sqrt{2} \|z\|_\infty \quad (1.8)$$

(é caso particular de um teorema mais geral, que diz que todas as normas de um espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes). Estas desigualdades dizem que  $|z|$  é pequeno quando  $\|z\|_\infty$  é pequeno, e vice-versa. Portanto, as topologias (i.e. as noções de limite) geradas pelas duas normas são equivalentes.

**Retas.** A reta real  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  pode ser definida pela equação cartesiana  $\Im(z) = 0$ . As outras retas (reais do plano  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ , enquanto espaço vetorial real) podem ser obtidas ao fazer translações e rotações, que correspondem a somas e multiplicações por números complexos. Portanto, a equação cartesiana de uma reta genérica é  $\Im(\alpha z + \beta) = 0$ , onde  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$  e  $\beta \in \mathbb{C}$  são parâmetros complexos (definidos a menos de um fator real arbitrário), ou seja,

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \quad (1.9)$$

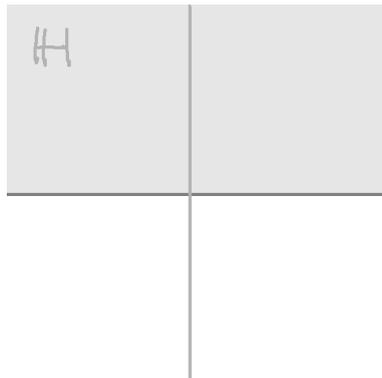
onde  $a = i\bar{\alpha} \in \mathbb{C}^\times$  e  $b = 2\Im(\beta) \in \mathbb{R}$ . Por exemplo, umas equações cartesianas do eixo real  $\mathbb{R}$  e do eixo imaginário  $i\mathbb{R}$  são  $z - \bar{z} = 0$  e  $z + \bar{z} = 0$ , respetivamente.

A equação paramétrica de uma reta passando pelo ponto  $p \in \mathbb{C}$  com velocidade  $v \in \mathbb{C}^\times$  é  $z(t) = p + vt$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Ao resolver para  $t$ , a condição “ $t$  real” traduz-se  $\Im((z - p)/v) = 0$ , ou seja,  $\Im(\alpha z + \beta) = 0$ , onde  $\alpha = 1/v \in \mathbb{C}^\times$  e  $\beta = -p/v \in \mathbb{C}$ .

**Semiplanos.** A desigualdade  $\Im(z) > 0$  define o *semi-plano superior* (em inglês, *upper half-plane*)

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\} \subset \mathbb{C}.$$

Outros semi-planos são obtidos por translações e rotações, e portanto definidos por desigualdades do género  $\Im(\alpha z + \beta) > 0$ , com  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$  e  $\beta \in \mathbb{C}$ .



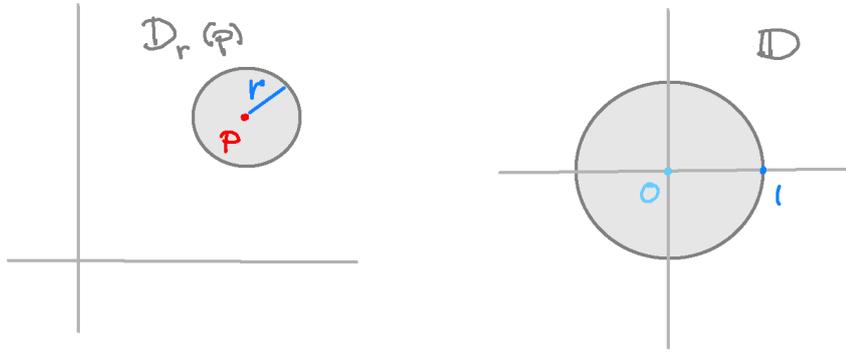
**Discos e bolas.** O *disco* (ou *bola*) *aberto* de raio  $r > 0$  e centro  $p \in \mathbb{C}$  (também chamado *r-vizinhança* de  $p$ ) é o conjunto dos pontos  $z$  a distância  $< r$  do ponto  $p$ , ou seja,

$$D_r(p) := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z - p| < r\}.$$

Particularmente importante é o *disco unitário*

$$\mathbb{D} := D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < 1\},$$

formado pelos números complexos de módulo  $|z| < 1$ . O plano complexo pode ser convenientemente pensado como o disco  $\mathbb{C} = D_\infty(0)$ .



O *disco fechado* de raio  $r > 0$  e centro  $p \in \mathbb{C}$  é

$$\overline{D_r(p)} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z - p| \leq r\}.$$

Também útil é definir o *disco perfurado*

$$D_r^\times(p) := D_r(p) \setminus \{p\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } 0 < |z - p| < r\}.$$

Por exemplo, o plano perfurado é  $\mathbb{C}^\times = D_\infty^\times(0)$ , o grupo multiplicativo dos números complexos diferentes de zero.

**Circunferências.** A *circunferência unitária*

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$$

é o conjunto dos números complexos de norma um, definido pela equação cartesiana  $\bar{z}z = 1$ . Em geral, a *circunferência* (ou círculo)  $S_r(p)$  de centro  $p \in \mathbb{C}$  e raio  $r > 0$  é o lugar dos pontos que satisfazem  $|z - p|^2 = r^2$ , logo a equação cartesiana

$$z\bar{z} - \bar{p}z - p\bar{z} + b = 0. \quad (1.10)$$

onde  $b := |p|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$ . Uma representação paramétrica da circunferência  $S_r(p)$  é

$$z(t) = p + re^{it}$$

com  $t \in [0, 2\pi]$ .

**ex:** Determine uma equação cartesiana da reta que passa por  $z_0 = 1 + i$  com velocidade  $v = 2 - i$ .

**ex:** Determine uma equação cartesiana da circunferência de centro  $1 + i$  e raio 3.

**ex:** Determine uma equação cartesiana da reta que passa pelos pontos distintos  $\alpha$  e  $\beta$  de  $\mathbb{C}$ .

**ex:** Mostre que a equação  $\Re((z - \alpha)/(z - \beta)) = 0$  define uma circunferência cujo diâmetro é o segmento entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

**ex:** Mostre que se  $z \in D_r(p)$ , então  $D_{r'}(z) \subset D_r(p)$  se  $r' < r - \text{dist}(z, p)$ .

**ex:** Esboce os lugares do plano definidos pelas seguintes equações ou desigualdades:

$$|z - i| = 2 \quad 0 < \Re(z) < 1 \quad \Im(z) < 0 \quad \Re(z) \geq 0 \quad 4/z = \bar{z}$$

$$|z - i| > |z + i| \quad |z - 1| + |z + 1| = 3 \quad |z + 1| - |z - 1| = 1$$

## 1.4 Sucessões e limites

**Sucessões.** Uma *sucessão* (ou *sequência*) com valores complexos é uma função  $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , ou seja, uma coleção  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números complexos  $z_n \in \mathbb{C}$ , indexados (portanto ordenados) por um inteiro positivo  $n \in \mathbb{N}$ . Podemos pensar que o índice  $n$  é um “tempo”, e portanto o  $n$ -ésimo termo  $z_n$  é o valor de um “observável”  $z$  (algo que é possível observar, ou seja, medir) no instante  $n$ . A sucessão é então chamada “série temporal”, e neste caso é mais natural incluir um valor  $z_0$  no tempo “inicial”  $n = 0$ .

As sucessões podem ser definidas exatamente como as funções. Em geral, uma sucessão com valores num conjunto arbitrário  $X$  não é outra coisa que uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ , disfarçada com a notação  $z_n := f(n)$ . Uma segunda possibilidade é uma lei recursiva que determina o valor de  $z_n$  dados os valores (passados)  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ . Uma terceira possibilidade é usar alguma propriedade que seleciona alguns elementos de uma lista.

**Progressão aritmética.** Por exemplo, a *progressão aritmética*  $z_n = a + nb$  pode ser definida usando a lei recursiva  $z_{n+1} = z_n + b$ , com condição inicial  $z_0 = a$ .

**Sequência de Fibonacci.** Os *números de Fibonacci*  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$  são definidos pela recorrência

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

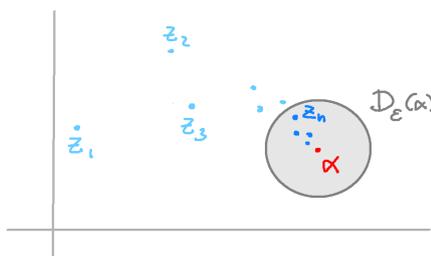
e as condições iniciais  $f_0 = f_1 = 1$ .

**Números primos.** Muito diferente ó caso da sequência  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$ , cujo termo genérico é o  $n$ -ésimo número primo.<sup>1</sup>

**Limites.** A sucessão  $(z_n)$  *converge* para o *limite*  $\alpha \in \mathbb{C}$ , notação  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$  ou simplesmente  $z_n \rightarrow \alpha$  (subentendido, quando  $n \rightarrow \infty$ ), se para cada “precisão”  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tal que

$$|z_n - \alpha| < \varepsilon$$

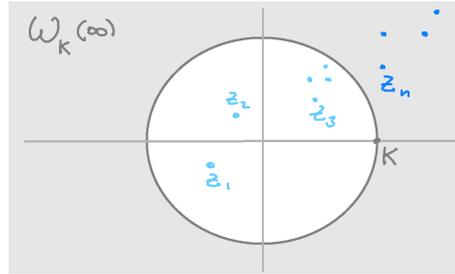
para todos os tempos  $n \geq \bar{n}$ . Isto significa que os valores  $z_n$  estão num disco  $D_\varepsilon(\alpha)$  arbitrariamente pequeno centrado em  $\alpha$ , uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $\alpha$ , desde que o tempo  $n$  seja suficientemente grande. É claro, pelas desigualdades (1.8), que a sucessão  $(z_n)$ , com  $z_n = x_n + iy_n$ , converge para  $\alpha = a + ib$  sse as duas sucessões reais  $(x_n)$  e  $(y_n)$  convergem para  $a$  e  $b$ , respetivamente.



<sup>1</sup>Se interessados, estão convidados a ler o fantástico livro de Marcus du Sautoy, *The music of primes*, Harper-Collins, 2003 [A música dos números primos, Zahar, 2008].

**Limites infinitos.** A sucessão  $(z_n)$  é *limitada* se existe  $M < \infty$  tal que  $|z_n| < M$  para todos os  $n$ , ou seja, se os seus valores estão contidos num disco  $D_M(0)$ . Também é útil dizer que  $z_n \rightarrow \infty$  quando, para cada  $K > 0$ , existe um tempo  $\bar{n}$  tal que  $|z_n| > K$  se  $n \geq \bar{n}$ .

Esta definição é formalmente análoga a anterior se acrescentamos o ponto  $\infty$  ao plano complexo e chamamos os conjuntos  $W_K(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > K\} \cup \{\infty\}$  s “discos centrados em  $\infty$ ”. Observe que  $z_n \rightarrow \infty$  sse  $w_n = 1/z_n \rightarrow 0$ , e os conjuntos  $W_K(\infty)$  são de fato os discos  $D_{1/K}(0)$  na variável complexa  $w = 1/z$ , se aceitamos a regra algébrica  $1/\infty = 0$ .



**ex:** Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n} = \infty$  (observe que, pelo menos quando  $n$  é par,  $n! \geq (n/2)^{n/2}$ ).

**ex:** Dê um exemplo de uma sucessão não limitada que não tem limite infinito.

**Subsucessões.** Uma *subsucessão* de  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma sucessão  $(z_{n_i})_{i \in \mathbb{Z}}$  obtida selecionando apenas os valores  $z_{n_i}$ , sendo  $i \mapsto n_i$  uma função crescente  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Por exemplo, uma sucessão não convergente pode ter subsucessões convergentes (é o caso de  $z_n = i^n$ ).

A propriedade importante de  $\mathbb{C}$  (ou dos espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$ ) é o seguinte

**Teorema 1.1** (Bolzano-Weierstrass). *Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.*

Pelas desigualdades (1.8), o teorema segue do caso real. Existem muitas provas do teorema de Bolzano-Weierstrass na reta real, onde é uma consequência do “axioma do supremo”: todo subconjunto limitado  $A \subset \mathbb{R}$  da reta real admite um supremo, o menor dos majorantes, i.e. um número minimal  $\alpha = \sup A$  tal que  $a \leq \alpha$  para todo  $a \in A$  (minimal significa que se também  $a \leq \beta$  para todo  $a \in A$ , então  $\alpha \leq \beta$ ). O axioma do supremo é equivalente à seguinte “propriedade de completude”: toda sucessão real monótona e limitada é convergente (de fato, o seu limite é o supremo ou o ínfimo dos seus valores, dependendo se a sucessão é crescente ou decrescente, respetivamente).

*Demonstração.* (do teorema de Bolzano-Weierstrass real) Seja  $(a_n)$  é uma sucessão limitada. A sucessão  $b_n := \sup_{k \geq n} a_k$  é decrescente e limitada, logo admite um limite  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ , chamado “limsup”. É agora simples construir uma subsucessão dos  $a_n$ 's que converge para  $\beta$ . Por exemplo, podemos definir  $a_{n_1}$  como sendo o primeiro (no sentido em que é o  $a_k$  com menor “tempo”  $k$ ) termo tal que  $|a_{n_1} - b_1| < 1/2$ , depois  $a_{n_2}$  como sendo o primeiro termo com  $n_2 > n_1$  tal que  $|a_{n_2} - b_{n_1+1}| < 1/2^2$ , e assim a seguir  $\dots$ , sendo  $a_{n_{k+1}}$  o primeiro termo com  $n_{k+1} > n_k$  tal que  $|a_{n_{k+1}} - b_{n_k+1}| < 1/2^{k+1}$  (a existência é imediata pela definição de supremo). Então, sendo  $|a_{n_k} - b_{n_k+1}| < 1/2^k$ , um argumento triangular mostra que a subsucessão dos  $(a_{n_k})$  converge, e de fato para o mesmo limite da sucessão dos  $b_n$ 's, que é  $\beta$ .  $\square$

**Sucessões fundamentais.** Uma sucessão  $(z_n)$  é dita *fundamental*, ou *sucessão de Cauchy*, se para cada precisão  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tal que

$$|z_n - z_m| < \varepsilon$$

para todos os tempos  $n, m > \bar{n}$ . É evidente que uma sucessão convergente é fundamental (um argumento triangular, pois  $z_n$  e  $z_m$  estão  $\varepsilon$ -próximos do limite se  $n$  e  $m$  são suficientemente grandes). Um argumento triangular também mostra que uma sucessão fundamental que admite uma sub-sucessão convergente é convergente. As sucessões fundamentais são claramente limitadas, portanto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass 1.1,

**Teorema 1.2** (teste de Cauchy). *Toda a sucessão fundamental em  $\mathbb{C}$  (ou em  $\mathbb{R}^n$ ) é convergente.*

Isto quer dizer que pode ser possível decidir se uma sucessão é convergente sem conhecer o seu limite. Em geral, a convergência das sucessões fundamentais é usada como definição da completude (sequencial) de um espaço métrico.

**Progressão geométrica.** A sucessão mais importante é a *progressão geométrica*, definida pela lei recursiva

$$z_{n+1} = \lambda z_n$$

e uma condição inicial  $z_0 = a$ . Os seus termos são proporcionais aos termos da série com condição inicial  $a = 1$ , que são

$$z_0 = 1 \quad z_1 = \lambda \quad z_2 = \lambda^2 \quad \dots \quad z_n = \lambda^n \quad \dots$$

O parâmetro  $\lambda$  é chamado *razão*, sendo o quociente  $z_{n+1}/z_n$  entre dois termos sucessivos. A progressão geométrica  $(\lambda^n)$  converge para zero quando  $|\lambda| < 1$ . É constante, logo trivialmente convergente, quando  $\lambda = 1$ , e oscila entre  $\pm 1$  quando  $\lambda = -1$ . É útil também observar que  $|\lambda^n| \rightarrow \infty$  quando  $|\lambda| > 1$ .

O comportamento de  $z_n = \lambda^n$  para outros valores de  $\lambda \in \mathbb{S}$  é mais delicado, e depende da racionalidade do argumento de  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$  ...

**ex:** Mostre que a *progressão aritmética*  $z_n = a + bn$  não é limitada, e portanto não é convergente, quando  $b \neq 0$ .

**ex:** Esboce os pontos de uma progressão geométrica  $z_n = \lambda^n$  no plano complexo, com tempos  $n \in \mathbb{Z}$ , para diferentes valores da razão  $\lambda$ .

**ex:** A sucessão  $z_n = e^{2\pi i\alpha n}$ , com  $\alpha$  racional (ou seja,  $\alpha = p/q$  com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{N}$ ), é convergente? E se  $\alpha$  é irracional?

**Médias aritméticas.** Dada uma sucessão  $(z_n)$ , a *sucessão das médias aritméticas* (ou *médias de Birkhoff*, no contexto dos sistemas dinâmicos, se pensamos que os  $z_n$ 's são uma série temporal) é a sucessão  $(\langle z \rangle_n)$  definida por

$$\langle z \rangle_n := \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n+1}.$$

É natural esperar que as  $\langle z \rangle_n$ 's sejam mais regulares que as  $z_n$ 's. A seguinte observação é atribuída a Kronecker.

**Teorema 1.3** (Kronecker). *Se  $z_n \rightarrow 0$ , então as médias aritméticas também convergem para zero, ou seja,  $\langle z \rangle_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* A sucessão é claramente limitada, logo existe  $M$  tal que  $|z_n| \leq M$  para todo  $n$ . Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Pela convergência a zero, existe  $\bar{n}$  tal que  $|z_n| < \varepsilon$  se  $n > \bar{n}$ . Então,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_n}{n+1} \right| &\leq \left| \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_{\bar{n}}}{n+1} \right| + \left| \frac{z_{\bar{n}+1} + z_{\bar{n}+2} + \cdots + z_n}{n+1} \right| \\ &\leq M \frac{\bar{n}+1}{n+1} + \frac{n-\bar{n}}{n+1} \varepsilon \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

se  $n > \bar{n}$  é tão grande que  $M(\bar{n}+1)/(n+1) < \varepsilon$ . □

**ex:** A sucessão alternada dos  $z_n = (-1)^n$  não é convergente. No entanto, as médias aritméticas  $\langle z \rangle_n$  são convergentes.

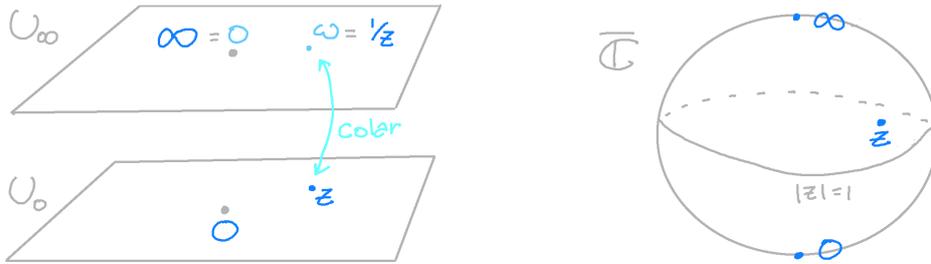
**ex:** Seja  $(z_n)$  uma sucessão convergente com  $z_n \rightarrow \alpha$ . Mostre que as médias aritméticas  $\langle z \rangle_n$  também convergem para  $\alpha$ .

## 1.5 Esfera de Riemann

O teatro natural da análise complexa não é o plano complexo, mas um espaço com mais simetrias, a esfera de Riemann.

**Esfera de Riemann.** É útil acrescentar um ponto chamado  $\infty$  ao plano complexo, e definir a *esfera de Riemann* (ou *plano complexo estendido*) como sendo a reunião  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Uma primeira motivação é fazer com que uma sequência de pontos  $z_n \in \mathbb{C}$  com valores absolutos  $|z_n|$  crescentes e ilimitados seja convergente com  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

Para fazer isto, podemos “colar” ao plano complexo usual  $U_0 \approx \mathbb{C}$ , com coordenada  $z$ , um outro plano complexo  $U_\infty \approx \mathbb{C}$ , com coordenada  $w$ , declarando que  $w = 1/z$  se  $z \neq 0$  e  $w \neq 0$ . O ponto  $z = \infty$  da esfera de Riemann corresponde portanto ao ponto  $w = 0$  da segunda “carta”  $U_\infty$ . Observe que um disco de raio  $\varepsilon$  centrado em  $w = 0$ , ou seja, em  $z = \infty$ , corresponde ao conjunto dos pontos  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  tais que  $|z| > 1/\varepsilon$ . Em particular, uma sucessão  $(z_n)$  em  $U_0$  tal que  $z_n \rightarrow \infty$  corresponde a uma sucessão  $(w_n)$  em  $U_\infty$ , definida por  $w_n = 1/z_n$ , tal que  $w_n \rightarrow 0$ . Desta forma, o “limite infinito” assume um significado menos exótico.

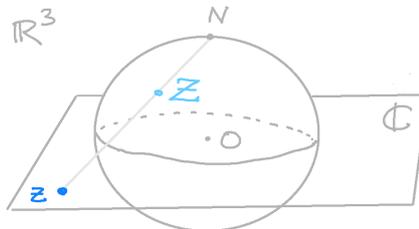


Um modelo mais concreto da esfera de Riemann é a esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . A correspondência  $\mathbb{S}^2 \approx \overline{\mathbb{C}}$  é definida da maneira seguinte. O “pólo norte”  $N = (0, 0, 1)$  representa o ponto  $\infty$ . Cada outro ponto  $Z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  é identificado a um ponto  $z = x + iy$  do plano complexo  $\mathbb{C} \approx \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$  por meio da “projeção estereográfica”  $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ , assim definida: o ponto  $z = \pi(x_1, x_2, x_3)$  é a interseção da reta passando por  $N$  e  $Z$  com o plano  $\{x_3 = 0\}$ . O resultado é que a projeção estereográfica  $Z \mapsto z$  é dada por

$$z = \frac{x_1 + iy_2}{1 - x_3}$$



Portanto, a inversa  $\pi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , que envia  $z = x + iy \mapsto Z = (x_1, x_2, x_3)$ , é dada por

$$x_1 = \frac{2x}{1 + |z|^2} \quad x_2 = \frac{2y}{1 + |z|^2} \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Observe que a projeção estereográfica fixa o equador de  $\mathbb{S}^2$ , que corresponde a circunferência unitária  $\mathbb{S}$  do plano complexo, envia o hemisfério sul no disco unitário  $\mathbb{D}$ , e o hemisfério norte no “disco”  $\{|z| > 1\} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ .

Uma circunferência genérica na esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$  é uma interseção  $C = \mathbb{S}^3 \cap P$  da esfera com um plano  $P = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c\} \subset \mathbb{R}^3$  (se  $c = 0$  é uma circunferência máxima, e se  $a_3 = c$  passa pelo pólo norte). A sua imagem  $\pi(C) \subset \mathbb{C}$  pela projeção estereográfica é uma circunferência do plano (caso genérico) ou uma reta (se o plano passa pelo pólo norte, ou seja, se  $a_3 = c$ ). Por esta razão, é natural chamar genericamente “circunferências” as circunferências e as retas de  $\mathbb{C}$ . De outra forma, as retas do plano complexo são as circunferências da esfera de Riemann que passam pelo ponto  $\infty$ .

**ex:** Verifique as fórmulas da projeção estereográfica e da sua inversa (a menos de uma rotação no eixo vertical, basta considerar o caso de um ponto no plano  $\{y_2 = 0\}$ ).

**ex:** Verifique que a projeção estereográfica envia circunferências de  $\mathbb{S}^2$  em circunferências ou retas de  $\mathbb{C}$ .

**ex:** Considere os pontos  $z_n = \lambda^n$  de uma progressão geométrica, com tempos  $n \in \mathbb{Z}$ , pensados na esfera de Riemann, quando  $|\lambda| \neq 0, 1$ . Faça uma rotação da esfera que não fixe o pólo norte, e volte a projetar a esfera no plano complexo por meio da projeção estereográfica. Descreva a figura obtida.

**Reta projetiva.** Um modelo mais abstrato da esfera de Riemann é a *linha projetiva complexa*  $\mathbb{CP}^1$ , o espaço das subespaços de dimensão um (ou seja, as retas passando pela origem) do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^2$ . Uma reta passando pela origem é determinada por um dos seus pontos diferentes de zero. Assim, a linha projetiva complexa é o espaço quociente

$$\mathbb{CP}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$$

dos pontos não nulos  $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  modulo a relação de equivalência  $(z_0, z_1) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1)$  se  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ . A classe do ponto  $(z_0, z_1)$ , ou seja, a linha complexa passando por  $(0, 0)$  e  $(z_0, z_1)$ , é denotada por  $[z_0, z_1]$ , e os números  $z_0$  e  $z_1$  são então chamados “coordenadas homogêneas” do ponto  $[z_0, z_1] \in \mathbb{CP}^1$ . É possível reconstruir as coordenadas usuais em  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ao definir  $z := z_0/z_1$  no subconjunto  $U_0 \approx \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$  onde  $z_1 \neq 0$ , e  $w := z_1/z_0 = 1/z$  no subconjunto  $U_1 \approx (\mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}) \subset \overline{\mathbb{C}}$  onde  $z_0 \neq 0$ . Estes dois subconjuntos,  $U_0 \approx \mathbb{C}$  e  $U_1 \approx \mathbb{C}$ , são duas cópias do plano complexo, e a interseção é  $U_0 \cap U_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ .

**Qubits.** A unidade dos computadores quânticos é o *qubit*<sup>2</sup> (ou seja, “quantum bit”), um sistema quântico descrito pelo espaço de Hilbert mais simples e não trivial. Os estados possíveis de um qubit são vetores unitários num espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2$ , com uma base ortonormada definida pelos vetores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  (por exemplo, as duas polarizações de um fóton, ou os dois valores possíveis do spin de uma partícula com spin  $1/2$ ). Um estado genérico é uma sobreposição

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

com coeficientes complexos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . A “observação” de um qubit (ou seja, a interação com um instrumento clássico que mede o “valor” do qubit) colapsa o estado  $|\psi\rangle$  num dos estados  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , com probabilidades  $p_0 = |\alpha|^2$  e  $p_1 = |\beta|^2$ , respetivamente. Isto significa que uma fase global não é observável. Portanto, o espaço dos estados de um qubit é o espaço de Hilbert projetivo  $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times$ . Por exemplo, os estados podem ser parametrizados por dois ângulos na *esfera de Bloch*  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$  (o quociente da esfera unitária  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$  pela ação da circunferência  $\mathbb{S}^1 \approx U(1)$  definida pela multiplicação por uma fase  $e^{i\psi}$ , que os matemáticos chamam *fibracção de Hopf*), um amplitude  $0 \leq \theta < \pi$  e uma fase  $0 \leq \phi < 2\pi$ , definidas por

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\phi} |1\rangle .$$

(assim que  $\cos(\theta/2) = |\alpha|$  e  $\phi = \text{Arg}(\beta) - \text{Arg}(\alpha)$ ).

<sup>2</sup>B. Schumacher, Quantum coding, *Physical Review A* **51** (1995), 2738-2747.

## 2 Funções holomorfas

12 out 2020

O objetivo é compreender certas classes de funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas em regiões  $\Omega \subset \mathbb{C}$  do plano complexo ou da esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ . Estas funções podem ser consideradas “campos”

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y),$$

com duas componentes reais,  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , que dependem de duas variáveis reais,  $x$  e  $y$ . Também podem ser consideradas “transformações”

$$z \mapsto w = f(z),$$

que enviam regiões do plano onde vive  $z$  em regiões do plano onde vive  $w$ . A noção de continuidade é equivalente ao caso do plano euclidiano. Por outro lado, a noção crucial de “derivada complexa”, apesar da sua simplicidade, é a origem de uma série de “milagres” que relacionam análise e geometria.

### 2.1 Limites e continuidade

As noções topológicas resumidas/esboçadas nesta seção costumam ser introduzidas num curso de cálculo ou cálculo vetorial. As provas detalhadas podem ser encontradas, por exemplo, em [Ah78, Si63].

**Topologia elementar.** Um subconjunto  $A$  do plano complexo  $\mathbb{C}$  (ou, em geral, de um espaço métrico, como por exemplo o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , ou a esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$  munida da métrica induzida pela métrica euclidiana em  $\mathbb{R}^3$ ) é dito *aberto* se é uma reunião de bolas abertas, ou seja, se é vazio ou se cada seu ponto  $p$  é centro de um disco aberto  $D_r(p)$ , com  $r > 0$ , contido em  $A$  (no caso de  $\overline{\mathbb{C}}$ , as bolas abertas são os discos  $D_r(p) \subset \mathbb{C}$  ou os discos  $\{z \in \mathbb{C}; |z| > K\} \cup \{\infty\}$  centrados em  $\infty$ ). A ideia física é que os abertos têm “tolerância”, ou seja, num aberto todos os pontos têm a liberdade de mexer um pouco sem sair do conjunto.

A família  $\mathcal{A}$  dos abertos é chamada *topologia* (induzida pela métrica), e verifica as seguintes propriedades: o conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio  $\mathbb{C}$  são abertos; uma reunião (arbitrária)  $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$  de abertos  $A_{\alpha}$ 's é um aberto; a interseção  $A \cap B$  de dois (ou de um número finito de) abertos  $A$  e  $B$  é um aberto. Estas propriedades podem ser usadas como “definição” de topologia, sem passar por uma métrica. Em geral, os abertos de um subconjunto arbitrário  $S \subset \mathbb{C}$  são as interseções  $A \cap S$  de  $S$  com os abertos  $A \subset \mathbb{C}$ .

Um subconjunto  $F \subset \mathbb{C}$  é dito *fechado* se o seu complementar  $\mathbb{C} \setminus F$  é aberto. Assim, a família  $\mathcal{F}$  dos fechados satisfaz as propriedades duais: o conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio  $\mathbb{C}$  são fechados; uma interseção de fechados é um fechado; uma reunião finita de fechados é fechada.

Um subconjunto arbitrário  $S \subset \mathbb{C}$  (que em geral não é nem aberto nem fechado) divide o plano em três subconjuntos disjuntos (alguns dos quais podem ser vazios): o *interior*  $\text{int}(S)$ , que é o maior aberto contido em  $S$  (ou seja,  $p \in \text{int}(S)$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $D_{\varepsilon}(p) \subset S$ ), o *exterior*  $\text{ext}(S) := \text{int}(\mathbb{C} \setminus S)$ , e a *fronteira*  $\partial S := \mathbb{C} \setminus (\text{int}(S) \cup \text{ext}(S))$ . Em particular,  $p \in \partial S$  se todo o disco  $D_{\rho}(p)$  contém pontos de  $S$  e do seu complementar  $\mathbb{C} \setminus S$ . A reunião  $\overline{S} := \text{int}(S) \cup \partial S$ , que é um conjunto fechado, é chamada *aderência*, ou *fecho*, de  $S$ . Um ponto  $p \in \overline{S}$  se todo o disco  $D_{\rho}(p)$  contém pontos de  $S$ . Em particular, existe uma sucessão de pontos  $z_n \in S$  (não necessariamente distintos) tal que  $z_n \rightarrow p$ .

Se existir uma sucessão de pontos distintos  $z_n \in S$  tais que  $z_n \rightarrow p$ , então  $p$  é dito *ponto de acumulação*, ou *ponto limite*, do subconjunto  $S \subset \mathbb{C}$ . Os pontos de acumulação de  $S$  formam um conjunto  $S'$ , chamado *conjunto derivado*. É claro que a aderência de  $S$  é formada por pontos de acumulação e por *pontos isolados*, pontos  $p \in S$  tais que  $D_{\rho}(p) \cap S = \{p\}$  se  $\rho$  é suficientemente pequeno.

Uma *vizinhança* do ponto  $p \in \mathbb{C}$  é um conjunto  $U$  que contém um disco  $D_{\rho}(p)$  suficientemente pequeno centrado em  $p$  (por exemplo, um aberto que contém  $p$ ). Em geral, uma vizinhança aberta de um subconjunto  $S \subset \mathbb{C}$  é um aberto  $A$  que contém  $S$ . Por exemplo, um disco  $D_{\varepsilon}(p)$  é chamado  $\varepsilon$ -vizinhança de  $p$ .

**Espaços completos.** Um espaço métrico é *completo* se toda sucessão de Cauchy é convergente. Os espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , ou o próprio  $\mathbb{C}$ , são completos. É fácil verificar que um subconjunto de um espaço completo é completo sse é fechado. Por exemplo, a esfera de Riemann  $\bar{\mathbb{C}}$ , munida da métrica esférica de  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , também é completa.

**Limites e continuidade.** Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função definida num aberto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , e  $p \in \Omega'$  (por exemplo,  $f(z)$  está definida numa vizinhança perfurada  $D_\rho(p) \setminus \{p\} \subset \Omega$  de  $p$ ). O *limite* de  $f$  quando  $z$  tende para  $p$  existe e é igual a  $\alpha$ , notação  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = \alpha$ , se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $z \in \Omega$  e  $0 < |z - p| < \delta$  então  $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ .

Se  $p \in \Omega$ , a função  $f$  é *contínua* em  $p$  se  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = f(p)$ , ou seja, se para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$f(D_\delta(p) \cap \Omega) \subset D_\varepsilon(f(p)).$$

Em termos de sucessões, isto é equivalente a dizer que  $f(z_n) \rightarrow f(p)$  para toda sucessão de pontos  $z_n \in \Omega$  tais que  $z_n \rightarrow p$ .

A função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é *contínua* se é contínua em todos os pontos do seu domínio  $\Omega$ . A noção de continuidade é independente da métrica particular usada para definir a topologia. De fato, é fácil mostrar que uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua sse a imagem inversa  $f^{-1}(A)$  de cada aberto  $A \subset \mathbb{C}$  é um aberto em  $\Omega$ . Esta caracterização implica, em particular, que composições de funções contínuas são contínuas.

Esta definição de limite é formalmente igual à definição de limite para funções reais de uma variável real. Portanto, as regras sobre limites e continuidade do cálculo na reta real (sobre somas, produtos, quocientes e composições) continuam válidas no caso de funções complexas de uma variável complexa. Em particular, são contínuas as funções que correspondem às operações de corpo, as translações  $f(z) = \beta$  e as homotetias complexas  $f(z) = \alpha z$ , logo a composição  $f(z) = \alpha z + \beta$ . Usando produtos e composições, é imediato ver que são contínuos os polinômios  $p(z) = \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ , e as funções racionais  $p(z)/q(z)$  fora dos pontos onde o denominador vale 0.

**ex:** Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua, então também o seu módulo  $|f|$ , a sua parte real  $\Re f$  e a sua parte imaginária  $\Im f$  são também funções contínuas, de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Compactos e continuidade uniforme

Particularmente importantes, por muitas razões, são os subconjuntos fechados e limitados do plano complexo, ou, em geral, de um espaço euclidiano de dimensão finita. São chamados “compactos”. No entanto, resulta conveniente utilizar uma definição alternativa, aparentemente menos intuitiva, que simplifica algumas provas.

**Compactos.** Uma *cobertura aberta* de um subconjunto  $D \subset X$  de um espaço métrico  $X$  (por exemplo, um subconjunto  $D \subset \mathbb{C}$ ) é uma família de abertos  $A_\alpha$ , parametrizada por um parâmetro  $\alpha$  não necessariamente numerável, tal que  $D \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$ .

Um subconjunto  $K \subset X$  de um espaço métrico é *compacto* (ou satisfaz a *propriedade de Heine-Borel*) se toda a cobertura aberta de  $K$  admite uma subcobertura finita, i.e. uma cobertura formada por um número finito dos  $A_\alpha$ 's.

É relativamente fácil mostrar que um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado, e, vice-versa, um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.

É importante observar que ser compacto é uma propriedade intrínseca de  $K$  em quanto espaço topológico, que apenas depende da estrutura dos seus abertos. Nos espaços métricos, esta noção coincide com duas noções mais naturais.

O espaço métrico  $K$  é *enumeravelmente compacto* (ou satisfaz a *propriedade de Bolzano-Weierstrass*) se todo subconjunto infinito  $S \subset K$  tem um ponto de acumulação em  $K$ , i.e.  $S' \neq \emptyset$ . O espaço métrico  $K$  é *seqüencialmente compacto* se toda sucessão em  $K$  admite uma subsucessão convergente em  $K$ .

Seja  $\{A_\alpha\}$  uma cobertura do espaço métrico  $X$ . Um número  $\lambda > 0$  é dito *número de Lebesgue* da cobertura  $\{A_\alpha\}$  se todo subconjunto  $S \subset X$  tal que  $\text{diam}(S) < \lambda$  está contido num dos abertos da cobertura, i.e.  $S \subset A_\alpha$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $K$  um espaço métrico seqüencialmente compacto. Então toda cobertura aberta de  $K$  possui um número de Lebesgue.*

*Demonstração.* Seja  $\{A_\alpha\}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Para todo  $x \in X$ , seja  $\varepsilon(x) > 0$  o supremo dos  $r > 0$  tais que a bola aberta  $B_r(x)$  está contida num dos  $A_\alpha$ . Seja  $\varepsilon = \inf_{x \in X} \varepsilon(x)$ . Se  $\varepsilon > 0$ , então  $\lambda = \varepsilon/2$  é um número de Lebesgue da cobertura. Por absurdo, assumimos que  $\varepsilon = 0$ . Então existe uma sucessão  $(x'_n)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(x'_n) = 0$ . Sendo  $X$  seqüencialmente compacto, existe uma subsucessão convergente  $(x_n)$  tal que ainda  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(x_n) = 0$ . Seja  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Existe  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x) < \varepsilon(x)/2$  se  $n > \bar{n}$ . Isto implica que  $\varepsilon(x_n) > \varepsilon(x)/2$  para todo  $n > \bar{n}$  (porque, se existe um elemento  $A_\alpha$  da cobertura que contém  $B_{\varepsilon(x)}(x)$ , ele também contém  $B_{\varepsilon(x)/2}(x_n)$ ), o que contradiz o facto de ser  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(x_n) = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** *Seja  $X$  um espaço métrico. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- i)  $X$  é compacto,
- ii)  $X$  é enumeravelmente compacto,
- iii)  $X$  é seqüencialmente compacto.

*Demonstração.* ( $i \Rightarrow ii$ ) Seja  $S$  um subconjunto infinito do espaço compacto  $X$ . Se  $S$  não tem pontos de acumulação em  $X$ , então todo ponto de  $S$  é isolado. Um particular é fechado, e portanto compacto. Mas um subconjunto infinito de pontos isolados não pode ser compacto, pois cada ponto é centro de um disco que não contém os outros pontos, e a cobertura formada por estes discos não possui uma subcobertura finita.

( $ii \Rightarrow iii$ ) Seja  $(x_n)$  uma sucessão em  $X$ . Se a imagem  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é finita, então  $(x_n)$  admite uma subsucessão constante, portanto convergente. Se a imagem  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  não é finita, então admite um ponto de acumulação  $x$  em  $X$ . Isto implica que, para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_{k+1} > n_k$  e  $d(x_{n_k}, x) < 1/k$ . Portanto, a subsucessão  $(x_{n_k})$  é convergente.

( $iii \Rightarrow i$ ) Se  $X$  não é compacto, existe uma cobertura aberta  $\{A_\alpha\}$  de  $X$  que não admite subcoberturas finitas. Seja  $\lambda > 0$  um seu número de Lebesgue, e seja  $0 < \varepsilon < \lambda/2$ . A família das bolas abertas  $\{B_\varepsilon(x) \text{ com } x \in X\}$  é uma cobertura aberta de  $X$  tal que todo  $B_\varepsilon(x)$  está contido num dos  $A_\alpha$ , portanto ela também não admite subcoberturas finitas. Isto implica que é possível escolher uma sucessão  $(x_n)$  de pontos de  $X$  tal que  $x_{n+1} \in X \setminus (\cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A sucessão  $(x_n)$  não admite subsucessões convergentes, porque  $d(x_n, x_m) > \varepsilon$  para todos  $n \neq m$ . Portanto,  $X$  não é seqüencialmente compacto.  $\square$

Um espaço métrico  $X$  é *totalmente limitado* se, para todo  $\varepsilon > 0$ , pode ser coberto por um número finito de bolas de raio  $\varepsilon$ , i.e. existe um número finito de pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  tais que

$$X \subset B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n)$$

**Teorema 2.3.** *Um espaço métrico é compacto sse é completo e totalmente limitado.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $X$  um espaço métrico compacto. Para todo  $\varepsilon > 0$ , a cobertura aberta  $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$  admite uma subcobertura finita. Isto prova que  $X$  é totalmente limitado. Seja  $(x_n)$  uma sucessão de Cauchy em  $X$ . Como  $X$  é seqüencialmente compacto,  $(x_n)$  admite uma subsucessão convergente. Mas uma sucessão de Cauchy que admite uma subsucessão convergente é convergente, logo  $X$  é completo.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $X$  um espaço métrico completo e totalmente limitado. Seja  $(x_n)$  uma sucessão de pontos de  $X$ . Dado  $k \in \mathbb{N}$ , o espaço  $X$  admite uma cobertura finita composta por bolas abertas de raio  $1/k$ . Portanto, é possível encontrar, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , um subconjunto infinito  $N_k$  dos naturais e uma bola aberta  $B_k$  de raio  $1/k$  tais que

$$\dots \subset N_{k+1} \subset N_k \subset \dots \subset \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x_n \in B_k \text{ se } n \in N_k$$

Escolhendo um natural  $n_k$  para cada  $k$ , de forma tal que  $n_{k+1} > n_k$ , as propriedades acima implicam que a subsucessão  $(x_{n_k})$  é de Cauchy, logo convergente porque  $X$  é completo. Portanto,  $X$  é seqüencialmente compacto.  $\square$

É claro que subconjuntos limitados de um espaço euclidiano de dimensão finita  $\mathbb{R}^n$  (como  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ ) são totalmente limitados, pois estão contidos numa bola de raio  $R$  suficientemente grande, que pode ser coberta por um número finito  $\sim (R/\varepsilon)^n$  de bolas de raio  $\varepsilon$ . Consequentemente,

**Teorema 2.4.** *Um subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto sse é fechado é limitado.*

Em particular, um compacto  $K \subset \mathbb{R}$  admite máximo  $\max_{x \in K} x$  e mínimo  $\min_{x \in K} x$ . Também importante é o “teorema da interseção de Cantor”.

**Teorema 2.5** (Cantor). *Seja  $K_n$  uma família decrescente (i.e. tal que  $K_{n+1} \subset K_n$ ) de subconjuntos compactos de um espaço métrico completo  $X$  tais que  $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então existe um (único) ponto  $k \in X$  tal que  $\bigcap_n K_n = \{k\}$ .*

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escolhamos um ponto  $x_n \in K_n$ . É imediato ver que  $(x_n)$  é uma sucessão de Cauchy. De fato, como  $K_{n+k} \subset K_n$ , então  $\text{dist}(x_n, x_{n+k}) \leq \text{diam}(K_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , que existe porque  $X$  é completo. O ponto  $x$  é um ponto de aderência de  $\{x_n \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ , e também um ponto aderência de  $\{x_n \text{ com } n \geq k\}$ . Mas  $K_k$  contém o conjunto  $\{x_n \text{ com } n \geq k\}$ , e, sendo fechado, contém os seus pontos de aderência. Logo  $x$  pertence a todos os  $K_k$ . Por outro lado, o diâmetro de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  não pode ser positivo, porque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K_n) = 0$ , logo a interseção dos  $K_n$  não pode conter dois pontos distintos.  $\square$

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua, e  $K \subset X$ . Se os  $A_\alpha$ 's formam uma cobertura aberta de  $f(K)$ , então as imagens inversas  $f^{-1}(A_\alpha)$  formam uma cobertura aberta de  $K$ . Consequentemente, a imagem  $f(K)$  de um compacto  $K \subset X$  por uma função contínua é um compacto. Em particular,

**Teorema 2.6** (Weierstrass). *Uma função contínua  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida num compacto  $K$  é limitada, e atinge o seu máximo e o seu mínimo.*

Em particular, se  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua definida num compacto  $K \subset \mathbb{C}$ , então o seu módulo  $|f|$  atinge máximo e mínimo em  $K$ .

**Continuidade uniforme.** Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é *uniformemente contínua* se para todo o  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$  se  $|z - z'| < \delta$ .

A continuidade uniforme implica a continuidade.

**Teorema 2.7** (Cantor). *Uma função contínua  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  definida num compacto  $K$  é uniformemente contínua.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . De acordo com a continuidade de  $f(z)$  em todo os pontos, para todo  $z \in K$  existe um raio  $\rho_z > 0$  tal que  $|f(z') - f(z)| < \varepsilon/2$  se  $|z - z'| < \rho_z$ . Pela compacidade de  $K$ , a cobertura aberta  $K \subset \bigcup_{z \in K} D_{\rho_z/2}(z)$  admite uma subcobertura finita. Portanto existe um número finito de pontos  $z_1, z_2, \dots, z_n \in K$  tais que  $K \subset \bigcup_k D_{\rho_{z_k}/2}(z_k)$ , ou seja, todo  $z \in K$  pertence a um destes discos centrados nos  $z_k$ 's. Seja  $\delta = \min_k \rho_{z_k}/2 > 0$ . Se  $|z - z'| < \delta$  e  $z \in D_{\rho_{z_k}/2}(z_k)$ , então pela desigualdade do triângulo também  $z' \in D_{\rho_{z_k}}(z_k)$ , pois  $|z' - z_k| \leq |z' - z| + |z - z_k| < \rho_{z_k}$ . Consequentemente  $|f(z) - f(z')| \leq |f(z) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(z')| < \varepsilon$ .  $\square$

## 2.3 Derivada complexa e funções holomorfas

Uma função é derivável, enquanto função complexa, se é localmente bem aproximada por uma função afim.

**Funções afins.** As funções complexas mais simples correspondem às operações de corpo. São as *translações*  $f(z) = z + \alpha$  e as *homotetias (complexas)*  $f(z) = \lambda z$ . Podem ser combinadas para dar origem às *funções/transformações afins*

$$f(z) = \lambda z + \alpha, \quad (2.1)$$

com parâmetros  $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  (i.e. se  $f$  não é constante!), a transformação  $z \mapsto w = \lambda z + \alpha$  é uma bijeção do plano complexo, cuja inversa é a transformação afim  $w \mapsto z = (w - \alpha)/\lambda$ . Se definimos  $f(\infty) := \infty$ , então é também uma bijeção da esfera de Riemann, que fixa o “polo norte”  $\infty$ . É claro que a composição de duas transformações afins é ainda uma transformação afim. O conjunto  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  das transformações afins invertíveis, munido da lei “composição”, forma portanto um grupo, chamado *grupo afim complexo*.

As transformações afins invertíveis enviam retas em retas, preservam os ângulos (mas não necessariamente os comprimentos) e a orientação.

**ex:** Sejam  $f(z) = \lambda z + \alpha$  e  $g(z) = \mu z + \beta$  duas transformações afins invertíveis. Calcule as composições  $f \circ g$  e  $g \circ f$ . Descreva a lei de composição do grupo  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ , parametrizado por  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  como em (2.1) (os matemáticos dizem que  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  é o produto “semi-direto” do grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^\times$  que age sobre o grupo aditivo  $\mathbb{C}$ , denotado por  $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ ).

**ex:** Determine os pontos fixos de  $f(z) = \lambda z + \alpha$ , ou seja, os pontos  $p \in \overline{\mathbb{C}}$  tais que  $f(p) = p$ .

**Derivada complexa.** Uma função  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida numa vizinhança  $U$  de  $p \in \mathbb{C}$ , é *derivável* (no sentido complexo) em  $p$  se existe o limite

$$f'(p) := \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(p+z) - f(p)}{z}, \quad (2.2)$$

Isto significa que, numa vizinhança de  $p$ , podemos escrever

$$f(p+z) = f(p) + \lambda z + |z| \rho(z)$$

com  $\rho(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow 0$ , sendo  $\lambda = f'(p)$ . Em outras palavras,  $f(z)$  é derivável em  $p$  se existe um número complexo  $\lambda$ , dito *derivada (complexa)* da função  $f(z)$  no ponto  $p$  e denotado por  $f'(p) := \lambda$ , tal que numa vizinhança de  $p$  podemos aproximar a função com uma função afim

$$f(p+z) \simeq \alpha + \lambda z,$$

com  $\alpha = f(p)$ , a menos de um “erro”  $e(z) := f(p+z) - \alpha - \lambda z$  que é “infinitésimo”, i.e. satisfaz  $\lim_{z \rightarrow 0} e(z)/z = 0$ . Em particular, uma função derivável em  $p$  é contínua em  $p$ .

É tautológico que uma função afim  $f(z) = \lambda z + \alpha$  é derivável em todo ponto do plano complexo, e a sua derivada é  $f'(z) = \lambda$ .

**Funções holomorfas.** Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definida num aberto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  do plano complexo, é dita *holomorfa* se admite a derivada em todos os pontos  $p \in \Omega$ . É dita *inteira* quando o domínio é todo o plano complexo, i.e. quando é derivável em  $\Omega = \mathbb{C}$ . É também útil dizer que  $f$  é holomorfa num domínio arbitrário  $D \subset \mathbb{C}$ , não necessariamente aberto nem fechado, se é holomorfa numa vizinhança aberta de  $D$ , i.e. num aberto  $\Omega$  que contém  $D$ .

Os pontos onde  $f'(p) = 0$ , i.e. onde  $f(p+z) = \alpha + o(z)$ , são chamados *pontos críticos* de  $f$ .

A definição de derivada complexa é formalmente igual à definição de derivada real, logo todas as regras de derivação usuais continuam válidas. Em particular, combinações lineares  $(\alpha f + \beta g)(z) := \alpha f(z) + \beta g(z)$  de funções holomorfas são holomorfas, e têm derivadas

$$(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z).$$

Portanto, o espaço  $\mathcal{O}(\Omega)$  das funções holomorfas definidas numa região  $\Omega$  é um espaço linear complexo. Também produtos (pontuais)  $(fg)(z) := f(z)g(z)$  de funções holomorfas são holomorfos, a derivada sendo dada pela regra de Leibniz

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

e portanto  $\mathcal{O}(\Omega)$  é um anel. Se  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , então  $g(z) = 1/f(z)$  é holomorfa em  $\Omega$  exceto nos pontos  $p$  onde  $f(p) = 0$ , chamados *zeros* da função  $f$ , e a sua derivada é

$$g'(z) = -f'(z)/f(z)^2.$$

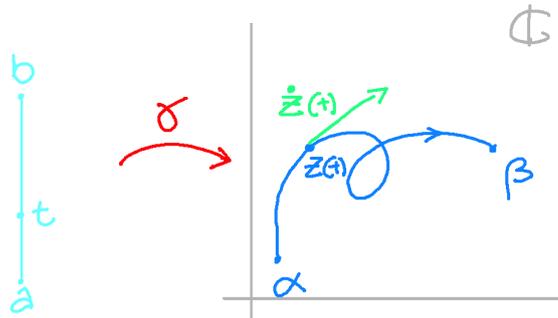
Composições  $(f \circ g)(z) := f(g(z))$  de funções holomorfas são também holomorfas, e a derivada é dada pela regra da cadeia

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

### 2.4 Curvas e conexidade

Domínios naturais da funções complexas são abertos que “não podem ser divididos em pedaços disjuntos e abertos”.

**Caminhos e curvas.** Um *caminho* na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  do plano complexo é uma função contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  definida num intervalo fechado e limitado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Em coordenadas, um caminho é dado por uma equação paramétrica  $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \approx (x(t), y(t))$  no plano  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ . A imagem  $\bar{\gamma} := \gamma([a, b])$  (ou simplesmente  $\gamma$ , com abuso de linguagem) é uma *curva*, do ponto “inicial”  $\alpha = \gamma(a)$  até o ponto “final”  $\beta = \gamma(b)$ . Se o caminho, definido por  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , é diferenciável, a derivada  $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$  é chamada *velocidade*. É importante observar que uma curva é compacta, sendo a imagem de um compacto por uma função contínua.



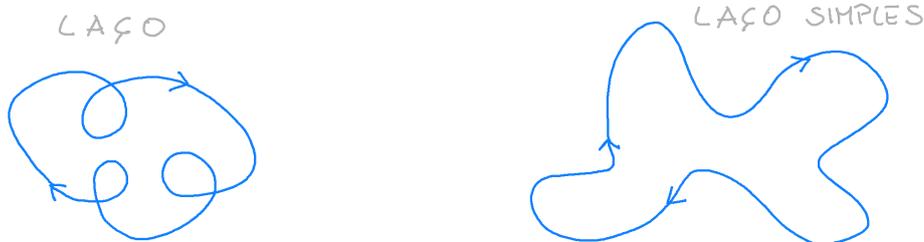
Uma *reparametrização* do caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  crescente e derivável, com derivada  $dt/d\tau > 0$ , que induz o contorno  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ , definido por  $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t(\tau))$ . A escolha  $t(\tau) = a + \tau(b - a)$  mostra que é sempre possível reparametrizar um caminho de forma a ter  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ .

Se  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \Omega$  são dois caminhos com  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , então a *justaposição* é o caminho  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \Omega$ , definido por  $\gamma(t) = \gamma_1(t)$  se  $a \leq t \leq b$  e por  $\gamma(t) = \gamma_2(t)$  se  $b \leq t \leq c$ . Por indução, é possível definir uma justaposição  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$  de um número finito de caminhos. Por exemplo, se  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  é uma partição do intervalo  $[0, 1]$ , então é possível representar uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  como justaposição  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$  das restrições  $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \Omega$  de  $\gamma$  aos sub-intervalos  $[t_{k-1}, t_k]$ .

O caminho *inverso* de  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  é o caminho  $-\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ , definido por  $-\gamma(t) := \gamma(1 - t)$ . Representa o caminho  $\gamma$  percorrido no sentido contrário.



O caminho/curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é dito (*caminho*) *fechado*, ou simplesmente *laço/lacete*, se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . A menos de reparametrizações, um laço é portanto uma função contínua  $\gamma : \mathbb{S} \rightarrow \Omega$  da circunferência  $\mathbb{S} = \{e^{2\pi it} : 0 \leq t \leq 1\}$  em  $\Omega$ . Um laço é *simples* quando  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$  se  $t \neq s$  (com exceção dos pontos inicial e final), ou seja, quando é uma função injetiva  $\gamma : \mathbb{S} \rightarrow \Omega$ .



**Segmentos e linhas quebradas.** A equação paramétrica  $\gamma(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ , com  $t \in [0, 1]$ , descreve o segmento  $[\alpha, \beta] := \gamma([0, 1])$  de  $\gamma(0) = \alpha$  até  $\gamma(1) = \beta$ , percorrido com velocidade constante  $\dot{\gamma}(t) = \beta - \alpha$ .

Uma justaposição de um número finito de segmentos  $[\alpha_k, \beta_k]$ , com  $k = 0, 1, \dots, n$ , e  $\alpha_{k+1} = \beta_k$  se  $1 \leq k \leq n-1$ , parametrizados com velocidade constante (por exemplo, segmentos horizontais e verticais) é chamada *contorno poligonal* (ou *linha quebrada*).



**Conexidade.** Um aberto  $A \subset \mathbb{C}$  (ou de um espaço métrico como  $\mathbb{R}^n$ ) é *conexo* se não é uma reunião disjunta de dois abertos não-vazios. Por exemplo, é elementar verificar que os abertos conexos da reta real são os intervalos abertos.

Equivalentemente, um aberto  $A \subset \mathbb{C}$  é conexo sse é *conexo por arcos*, ou seja, se cada dois pontos  $\alpha, \beta \in A$ , pode ser unidos por uma curva contida em  $A$ , um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  tal que  $\gamma(0) = \alpha$  e  $\gamma(1) = \beta$ . De fato, a curva  $\gamma$  pode ser escolhida diferenciável, ou até poligonal. A prova da equivalência consiste em mostrar que, fixado um ponto  $p \in A$ , os subconjuntos  $A_+ \subset A$  e  $A_- \subset A$  dos pontos de  $A$  que podem ou não podem, respectivamente, ser unidos a  $p$  por uma curva poligonal contida em  $A$  são os dois abertos, pois se  $A_{\pm}$  contêm um ponto  $z$  então também contêm um pequeno disco centrado em  $z$  (todos os pontos de um disco podem ser unidos ao centro usando um segmento). Sendo  $A_+$  não vazio, pois  $p \in A_+$ , é claro que  $A$  é conexo sse  $A_- = \emptyset$ .

Um aberto arbitrário  $A$  é uma reunião disjunta  $A = \bigcup_i A_i$  de abertos conexos  $A_i$ , chamados *componentes conexas*. A componente conexa de um ponto  $p \in A$  sendo o conjunto dos pontos  $p' \in A$  que podem ser unidos a  $p$  por uma curva contida em  $A$ .

**Convexos.** Por exemplo, um aberto *convexo*, i.e. tal que se  $\alpha, \beta \in A$  então também  $z(t) = (1-t)\alpha + t\beta \in A$  para todo  $t \in [0, 1]$ , é conexo. Exemplos de convexos são discos abertos  $D_\rho(p)$ , retângulos  $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; a < x < b \text{ e } c < y < d\}$ , ...



**Regiões.** Uma *região* é um subconjunto  $\Omega$  não-vazio, aberto e conexo de  $\mathbb{C}$ , ou de  $\overline{\mathbb{C}}$ . As regiões do plano  $\mathbb{C}$ , ou da esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ , são os domínios naturais das funções que queremos compreender.

Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  com derivada identicamente nula, ou seja, com  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$ , é *localmente constante*, ou seja, é constante em cada disco  $D_\rho(p) \subset \Omega$ . De fato, cada ponto  $z \in D_\rho(p)$  pode ser unido ao centro  $p$  por um segmento  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D_\rho$ , definido por  $\gamma(t) = p + t(z - p)$ . A derivada da composição  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  é  $f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = 0$  para todos os tempos  $t$ , e portanto, pelo teorema do valor médio,  $f(z) = f(\gamma(1)) = f(\gamma(0)) = f(p)$ .

Cada dois pontos de um aberto conexo podem ser unidos por um caminho diferenciável, por exemplo uma justaposição de segmentos. Consequentemente,

**Teorema 2.8.** *Uma função holomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e com derivada nula  $f'(p) = 0$  em todos os pontos de uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é constante.*

## 2.5 Condições de Cauchy-Riemann

As funções holomorfas são soluções de uma equação às derivadas parciais, chamada “equação de Cauchy-Riemann”. A transformação definida por uma função holomorfa preserva os ângulos nos pontos onde a sua derivada não é nula.

**Condições de Cauchy-Riemann.** O limite em (2.2) deve ser independente da direção escolhida para fazer  $z \rightarrow 0$ . Em particular, podemos escolher  $z = \varepsilon$  ou  $z = i\varepsilon$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$  e real. Uma função holomorfa  $f(z)$ , pensada como uma função  $f(x + iy) \approx f(x, y)$  de duas variáveis reais,  $x$  e  $y$ , tem derivada

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon, y) - f(x, y)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

no primeiro caso e

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)}{i\varepsilon} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

no segundo caso. Consequentemente, as derivadas parciais de uma função holomorfa verificam a *equação de Cauchy-Riemann*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}} \quad (2.3)$$

Sejam  $u(x, y) = (\Re f)(x + iy)$  e  $v(x, y) = (\Im f)(x + iy)$  a parte real e a parte imaginária de  $f(z)$ , respetivamente, assim que  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , com  $u$  e  $v$  funções reais. A derivada da função holomorfa  $f = u + iv$  admite então as duas expressões

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

A equação (2.3) é portanto equivalente às duas equações diferenciais reais

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (2.4)$$

chamadas também *condições de Cauchy-Riemann*.

Uma consequência importante, que será analisada mais à frente, é que as funções reais de uma variável complexa  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , partes real e imaginária de uma função holomorfa  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , são funções harmônicas, i.e. satisfazem a equação de Laplace

$$\Delta u = 0$$

onde o *laplaciano* é o operador  $\Delta := \text{div} \circ \text{grad} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . Ou seja, uma função holomorfa produz “de borla” um par de soluções de uma equação diferencial parcial importante da física-matemática.

**Moralmente.** Na identificação  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  do plano complexo como sendo um espaço linear real de dimensão dois, uma função  $\mathbb{R}$ -linear genérica  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tem a forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

com  $a, b, c, d$  parâmetros reais, e portanto

$$f(z) = \lambda z + \mu \bar{z},$$

onde  $\lambda = (a + d - ib + ic)/2$  e  $\mu = (a - d + ib + ic)/2$  são parâmetros complexos. A função  $\mathbb{R}$ -linear  $f$  é derivável no sentido complexo sse  $\mu = 0$ , ou seja,  $a = d$  e  $b = -c$ , e portanto é da forma  $f(z) = \lambda z$ . Ou seja, uma função  $\mathbb{R}$ -linear é holomorfa se apenas depende de  $z$  e não de  $\bar{z}$ .

Sejam  $\partial$  e  $\bar{\partial}$  os operadores diferenciais definidos por

$$\partial := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Pensando em  $z$  e  $\bar{z}$  como se fossem coordenadas do plano  $x$ - $y$ , definidas pelas mudanças de coordenadas  $x = (z + \bar{z})/2$  e  $y = (z - \bar{z})/2i$ , o operador  $\partial$  pode ser interpretado como sendo o operador

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y},$$

e o operador  $\bar{\partial}$  pode ser interpretado como sendo o operador

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y}.$$

As condições de Cauchy-Riemann (2.3) para uma função genérica (i.e. não necessariamente linear)  $f(z)$  podem ser escritas

$$\boxed{\bar{\partial} f = 0}$$

e a derivada de  $f = u + iv$  pode ser escrita

$$f' = \partial f = 2 \partial u.$$

Moralmente, uma função holomorfa é uma função que apenas depende de  $z$  e não de  $\bar{z}$ .

**Vice-versa.** Vice-versa, é possível provar que

**Teorema 2.9.** *Se  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são funções reais de classe  $\mathcal{C}^1$  numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (2.3) ou (2.4), então  $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função holomorfa em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Pela derivabilidade de  $u$  e  $v$  nos pontos  $p \in \Omega$ , sabemos que, se  $z = x + iy$  é suficientemente pequeno,

$$u(p + z) = u(p) + \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + |z| \rho_u(z)$$

e

$$v(p+z) = v(p) + \frac{\partial v}{\partial x} x + \frac{\partial v}{\partial y} y + |z| \rho_v(z)$$

com  $\rho_u(z) \rightarrow 0$  e  $\rho_v(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow 0$ . Então, usando as condições de Cauchy-Riemann (2.4),

$$\begin{aligned} f(p+z) &= u(p+z) + iv(p+z) \\ &= u(p) + iv(p) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) y + |z| (\rho_u(z) + \rho_v(z)) \\ &= u(p) + iv(p) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) (x + iy) + |z| (\rho_u(z) + \rho_v(z)) \\ &= f(p) + f'(p)z + |z| \rho(z) \end{aligned}$$

onde  $f'(p) = 2\partial u(p) = \partial f(p)$  e  $\rho(z) := \rho_u(z) + \rho_v(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow 0$ .  $\square$

**ex:** Considere a função  $f(z) = \bar{z}$ , e calcule o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+t\lambda) - f(z)}{t\lambda}$$

na direção do vetor não nulo  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ . Verifique que depende do argumento de  $\lambda$ , e portanto  $f(z)$  não é holomorfa.

**ex:** Verifique se as seguintes funções são holomorfas, determine possíveis domínios, e calcule as derivadas  $f'(z)$ ,  $f''(z)$ , ...

$$f(z) = z \quad f(z) = \bar{z} \quad f(z) = z^2 \quad f(z) = |z|^2$$

$$f(z) = 1/z \quad f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \quad f(z) = \Re(z)$$

**ex:** Verifique que a função “exponencial”, definida por

$$e^z := e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

se  $z = x + iy$ , é inteira.

**ex:** Verifique que  $\partial$  e  $\bar{\partial}$  comutam, e que o laplaciano é  $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$ .

**ex:** Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)}$$

**ex:** Mostre que  $f(z)$  é holomorfa sse  $\overline{f(\bar{z})}$  é holomorfa.

**ex:** Considere a função  $f(z) = f(\rho e^{i\theta})$  enquanto função das coordenadas polares  $\rho$  e  $\theta$  do ponto  $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$ . Calcule a derivada de  $f \circ \gamma$  ao longo dos caminhos  $\gamma(t) = (\rho+t) e^{i\theta}$  ou  $\gamma(t) = \rho e^{i(\theta+t)}$ , passando pelo ponto  $z = \rho e^{i\theta}$  quando  $t = 0$ . Compare as duas derivadas  $f'(\rho e^{i\theta}) \gamma'(t)$  quando  $t = 0$ , e verifique que se  $f(z)$  é holomorfa então satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = -\frac{i}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

e, portanto, a sua derivada no ponto  $z$  pode ser calculada como

$$f'(\rho e^{i\theta}) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial \rho} (\rho e^{i\theta}) = -\frac{i}{\rho e^{i\theta}} \frac{\partial f}{\partial \theta} (\rho e^{i\theta})$$

**ex:** Mostre que se uma função holomorfa tem valores reais (i.e.  $\Im(f(z)) = 0$ ), ou imaginários puros (i.e.  $\Re(f(z)) = 0$ ), ou tem módulo constante (i.e.  $|f(z)| = c$ ), então tem derivada  $f' = 0$ , e portanto é localmente constante.

**Transformações conformes.** A matriz Jacobiana  $J = (\text{Jac}f)(p)$  de uma função diferenciável  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  num ponto  $p \in \Omega$  é uma matriz real  $2 \times 2$ , com 4 entradas independentes, que representa a parte linear de  $f(p+v) - f(p)$ , i.e.

$$f(p+v) = f(p) + J \cdot v + o(\|v\|).$$

As condições de Cauchy-Riemann (2.3) dizem que a matriz Jacobiana de uma função holomorfa  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , pensada como função real  $(x, y) \mapsto (u, v)$ , depende apenas de 2 números reais, pois é da forma

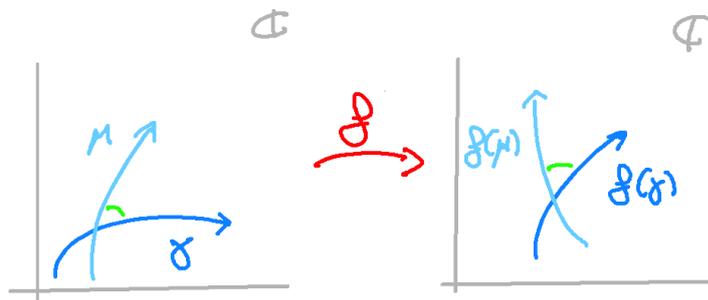
$$J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

onde  $a = \partial u / \partial x(p)$  e  $b = \partial v / \partial x(p)$ . Se  $p$  não é um ponto crítico de  $f$ , então o determinante da matriz jacobiana é  $\det J = a^2 + b^2 := \rho^2 > 0$ , e portanto a parte linear de  $f$  é

$$J = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \rho R_\theta,$$

uma rotação  $R_\theta \in \text{SO}(2, \mathbb{R})$  seguida por uma homotetia não trivial  $z \mapsto \rho z$ . Em termos complexos, a matriz Jacobiana representa a multiplicação pelo número complexo  $f'(p) = \rho e^{i\theta}$ . Em particular,  $f$  envia pequenos círculos à volta de  $p$  em pequenos círculos à volta de  $f(p)$  (e não elipses como uma transformação linear genérica!), e preserva os ângulos entre as curvas diferenciáveis que passam por  $p$ . De fato, sejam  $\gamma(t)$  e  $\mu(t)$  duas curvas que passam pelo ponto  $p = \gamma(0) = \mu(0)$  com velocidades não nulas  $v = \dot{\gamma}(0)$  e  $w = \dot{\mu}(0)$ , respetivamente. Então as curvas  $f(\gamma(t))$  e  $f(\mu(t))$  passam pelo ponto  $f(p)$  com velocidades  $Jv$  e  $Jw$ , respetivamente, e  $(Jv \cdot Jw) / (\|v\| \|w\|) = (v \cdot w) / (\|v\| \|w\|)$ , o que significa que o ângulo entre  $v$  e  $w$  é igual ao ângulo entre  $Jv$  e  $Jw$ .

Uma transformação que preserva os ângulos e também preserva a orientação do plano (i.e.  $\det(\text{Jac}f) > 0$ ) é chamada *conforme*. Portanto, uma função holomorfa define uma transformação conforme  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que não contém pontos críticos de  $f$  (i.e. uma região onde  $f' \neq 0$ ).



**Funções anti-holomorfas.** Uma função  $f(z)$  tal que

$$f(p+z) = f(p) + \lambda \cdot \bar{z} + o(z)$$

nos pontos de uma região  $D \subset \mathbb{C}$  é dita *anti-holomorfa*. Uma transformação anti-holomorfa preserva os ângulos mas não a orientação, pois  $\det(\text{Jac}f) < 0$  fora dos pontos críticos.

É imediato verificar que  $f = u + iv$  é anti-holomorfa sse  $\partial f = 0$ , e portanto sse a função conjugada  $\bar{f} = u - iv$  é holomorfa. Assim, o mundo das funções anti-holomorfas é uma imagem especular ao mundo das funções holomorfas.

## 2.6 Polinômios e funções racionais

As funções holomorfas mais simples são os polinômios, que dependem de um número finito de parâmetros, e cujos valores podem ser calculados usando um número finito de soma e multiplicações. O “teorema fundamental da álgebra” afirma que um polinômio de grau  $n$  possui exatamente  $n$  raízes no plano complexo, se contadas corretamente. Quocientes de polinômios são chamados funções racionais. Uma função racional envia a esfera de Riemann sobre a esfera de Riemann, e a imagem inversa de quase cada ponto é formada por um número finito e fixo de pontos, também chamado “grau” da função racional.

**Potências e raízes.** Se  $n = 0, 1, 2, \dots$ , a potência

$$f(z) = z^n$$

é uma função inteira, i.e. é holomorfa em  $\mathbb{C}$ . A sua derivada é  $f'(z) = n z^{n-1}$ , que também é inteira. O único ponto onde  $f(p) = 0$  é a origem  $p = 0$ , que é também o único ponto crítico (i.e. onde  $f'(p) = 0$ ) se  $n \geq 1$ . Em particular,  $f(z) = z^n$  define uma transformação conforme  $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . A imagem do ponto  $z = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho > 0$ , é o ponto  $w = \rho^n e^{in\theta}$ . Em particular, um setor angular  $A = \{\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi/n\}$  de “comprimento”  $2\pi/n$  é enviado bijectivamente sobre  $\mathbb{C} \setminus \{\arg(z) = \alpha\}$ . A imagem inversa de  $w = r e^{i\phi} \neq 0$  é composta pelos  $n$  vértices  $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\phi+2\pi k)/n}$ , com  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , de um polígono regular inscrito na circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$ .

As potências negativas  $f(z) = z^{-n} = 1/z^n$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , são holomorfa no plano perfurado  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e as suas derivadas são  $f'(z) = -n z^{-(n+1)}$ .

Observe que todas as potências são derivadas de outras potências, com a única exceção de  $f(z) = 1/z$ , a derivada de um hipotético logaritmo “log  $z$ ”. Este fato que vai ser crucial na teoria da integração.

**ex:** Seja  $f = u + iv : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  a função holomorfa  $f(z) = z^2$ , definida no semi-plano superior  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \Im(z) > 0\}$ . Descreva as curvas de nível das funções reais  $u$  e  $v$ .

**Polinômios.** Usando repetidamente somas e multiplicações, é possível construir os *polinômios*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (2.5)$$

com coeficientes  $a_k \in \mathbb{C}$ , sendo pelos menos um deles não nulo. O *grau* de um polinômio é o maior dos índices dos seus coeficientes não nulos. Assim, o grau do polinômio (2.5) é  $\deg(f) = n$  se  $a_n \neq 0$ . Por exemplo, uma função constante  $f(z) = \alpha$  é um polinômio de grau 0, uma função afim  $f(z) = \alpha z + \beta$  com  $\alpha \neq 0$  é um polinômio de grau 1, uma função quadrática  $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$  com  $\alpha \neq 0$  é um polinômio de grau 2, ...

Somas e produtos finitos de polinômios são polinômios. Portanto, o espaço  $\text{Pol}(\mathbb{C})$  dos polinômios forma um anel comutativo, cuja identidade é o polinômio constante  $f(z) = 1$ . É claro que todo polinômio de grau  $n$  é proporcional a um polinômio *mônico* de grau  $n$ , um polinômio cujo coeficiente de grau máximo é igual a  $b_n = 1$ , ou seja, do género

$$g(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0.$$

Observe também que  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ , desde que  $f$  e  $g$  sejam diferentes do polinômio nulo  $h(z) = 0$  (que portanto não convém chamar “polinômio”!).

**ex:** É possível dizer alguma coisa sobre o grau de uma soma de polinômios, ou seja,  $\deg(f + g)$  ?

**ex:** E sobre o grau de uma composição de polinômios, ou seja,  $\deg(f \circ g)$  ?

**Global & local.** Os polinômios são funções inteiras, infinitamente deriváveis (e com  $k$ -ésima derivada nula se  $k > \deg(f)$ ). Os coeficientes de um polinômio são determinados pelos valores de  $f$  e das suas derivadas na origem. De fato, é imediato verificar que  $a_0 = f(0)$ ,  $a_1 = f'(0)$ ,  $a_2 = f''(0)/2$ , ... e, em geral,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Informalmente, o comportamento “global” de um polinómio, os seus valores para todos os pontos do plano complexo, é determinado pelo seu comportamento “local”, as derivadas na origem, que dependem apenas dos valores do polinómio numa vizinhança arbitrariamente pequena da origem. Isto não é surpreendente, sendo um polinómio determinado por um número finito de parâmetros, os seus coeficientes. O que sim é surpreendente é que este fenómeno estende a todas as funções holomorfas ...

**Zeros e fatorização.** Os *zeros*, ou *raízes*, do polinómio (2.5) são os pontos  $p$  onde  $f(p) = 0$ , que formam o conjunto  $Z(f) := \{p \in \mathbb{C} \text{ t.q. } f(p) = 0\}$ . É claro que as raízes de  $f(z)$  são também raízes do polinómio mónico  $f(z)/a_n$ , e vice-versa.

Gauss provou em 1799 o que hoje é chamado “teorema fundamental da álgebra”.

**Teorema 2.10** (Gauss). *Todo polinómio de grau  $n \geq 1$  admite (pelo menos) uma raiz em  $\mathbb{C}$ .*

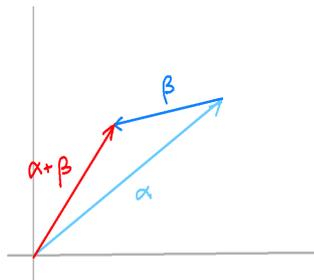
*Demonstração.* É claro que, a menos de dividir pelo coeficiente de grau máximo, basta provar o teorema para um polinómio mónico  $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  com  $n \geq 1$ . É também claro que se  $|z| = R$  é suficientemente grande então também  $|f(z)| \simeq R^n$  é grande, por exemplo superior ao valor de  $|f(0)| = |a_0|$ . Pelo teorema de Weierstrass, a função contínua  $z \mapsto |f(z)|$  atinge um mínimo no disco fechado  $|z| \leq R$ , e, pela observação anterior, este mínimo é atingido num ponto  $p$  com  $|p| < R$ , e é também um mínimo absoluto de  $|f(z)|$  no plano complexo. A menos de uma translação (ou seja de considerar o polinómio  $f(z - p)$ ) podemos assumir que o mínimo é atingido na origem, e portanto que o polinómio tem a forma

$$f(z) = \alpha + z^m(b_0 + b_1z + \dots + b_kz^k)$$

com  $b_0 \neq 0$ ,  $m \geq 1$ , e que o seu mínimo módulo é  $|f(0)| = |\alpha|$ . Queremos provar que  $\alpha = 0$ , ou seja, que a origem é uma raiz do polinómio  $f(z)$ . Seja então  $\alpha = \rho e^{i\theta} \neq 0$ . O polinómio é da forma  $\alpha + \beta(z)$ , onde  $\beta(z)$  é um polinómio de grau  $\geq m \geq 1$  que se anula na origem. Se o módulo de  $z$  é muito pequeno, então

$$\beta(z) = z^m(b_0 + b_1z + \dots + b_kz^k) \simeq z^m b_0.$$

Ao variar  $z$  numa circunferência suficientemente pequena à volta da origem,  $\beta(z)$  dá pelo menos uma volta (de fato,  $m$  voltas) em torno da origem, e portanto necessariamente o seu argumento assume valores próximos do oposto do argumento de  $\alpha$ . Então, se  $\alpha \neq 0$  e  $\beta$  é pequeno, é claro que  $|\alpha + \beta| < |\alpha|$ , como mostra a figura seguinte.



Mais precisamente, num ponto onde  $\beta(z) \simeq \varepsilon e^{-i\theta}$  com  $\varepsilon \ll \rho$ ,

$$|f(z)| = |\alpha + \beta(z)| \simeq |\rho e^{i\theta} + \varepsilon e^{-i\theta}| = \rho - \varepsilon < |\alpha|,$$

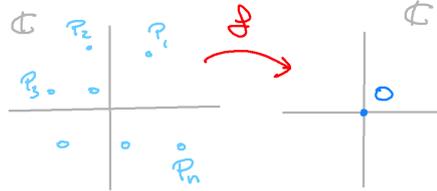
o que contradiz o fato de  $|\alpha|$  ser o mínimo absoluto de  $|f(z)|$ .  $\square$

Se  $p$  é uma raiz do polinómio  $f(z)$  de grau  $n \geq 1$ , então  $f(z) = (z - p)g(z)$  onde  $g(z)$  é um polinómio de grau  $n - 1$  (exercício). O teorema de Gauss 2.5 então implica o seguinte

**Teorema 2.11** (teorema fundamental da álgebra). *Um polinómio  $f(z) = a_nz^n + \dots + a_1z + a_0$  de grau  $n \geq 1$  fatoriza no produto*

$$f(z) = a_n(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n), \quad (2.6)$$

onde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são as suas  $n$  raízes (não necessariamente distintas).



A fatorização (2.6) é única, a menos de permutações dos fatores. Vice-versa, é evidente que existe um único polinómio mónico de grau  $n$  cujas raízes são  $n$  números complexos distintos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , pois basta multiplicar os  $(z - p_k)$ 's.

Se uma raiz  $p$  é repetida exatamente  $k$  vezes, ou seja, se

$$f(z) = (z - p)^k g(z)$$

com  $g(p) \neq 0$ , então o inteiro  $k \in \mathbb{N}$  é chamado *multiplicidade* da raiz  $p$ , ou também “*ordem* de  $f$  no ponto  $p$ ”, e denotado por  $\text{ord}(f, p) = k$ . É natural chamar os pontos  $p$  onde  $f(p) \neq 0$  pontos de ordem  $\text{ord}(f, p) = 0$ . A maneira correcta de “contar” o número de zeros de um polinómio é

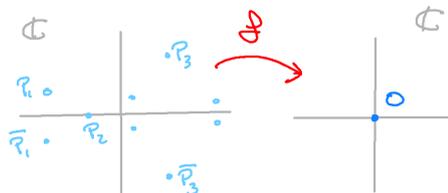
$$|Z(f)| := \sum_{p \in \mathbb{C}} \text{ord}(f, p)$$

(observe que a soma é finita porque apenas um número finito de pontos têm ordem  $\neq 0$ ). O teorema fundamental da álgebra diz então que esta soma é igual a  $|Z(f)| = \deg(f)$ .

**Raízes de polinómios reais.** Se  $p$  é uma raiz do polinómio  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ , então  $\bar{p}$  é uma raiz do polinómio  $\bar{f}(z) := \bar{a}_n z^n + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0$ , obtido de  $f(z)$  trocando cada coeficiente pelo seu conjugado. Se os coeficientes de  $f(z)$  são reais (i.e.  $a_k = \bar{a}_k$ ), então  $\bar{f} = f$ . Consequentemente,

**Teorema 2.12.** *As raízes não reais de um polinómio com coeficientes reais ocorrem em pares de números complexos conjugados,  $p$  e  $\bar{p}$ .*

Ou seja, o conjunto  $Z(f)$  das raízes de um polinómio real é simétrico em relação ao eixo real do plano complexo.



**ex:** Se  $p$  uma raiz do polinómio (2.5) de grau  $n \geq 1$ , então

$$f(z) - f(p) = a_n(z^n - p^n) + \dots + a_1(z - p).$$

Use a identidade

$$z^k - p^k = (z - p) (z^{k-1} + z^{k-2}p + \dots + zp^{k-2} + p^{k-1})$$

e deduza que  $f(z) = (z - p)g(z)$  onde  $g$  é um polinómio de grau  $n - 1$ .

**ex:** Seja  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  um polinómio de grau  $n \geq 1$  que possui as  $n$  raízes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (não necessariamente distintas). Mostre que

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - p_k) = c \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{p_k}\right)$$

e calcule a constante  $c$ . Deduza que a “derivada logarítmica”  $f'(z)/f(z)$  (que é moralmente a derivada de  $\log f(z)$ , fora dos zeros do polinómio) é dada por

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - p_k}.$$

**ex:** Determine um polinómio cujas raízes sejam as raízes  $n$ -ésimas da unidade, quando  $n = 2, 3, \dots$  ou no caso geral.

**ex:** Seja  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  um polinómio de grau  $n$ , portanto com  $a_n \neq 0$ . Mostre que, se  $R > 0$  é suficientemente grande (superior ao maior valor absoluto das raízes de  $f(z)$ ), existem constantes positivas  $c$  e  $C$  (que dependem de  $R$ ) tais que para todo ponto  $z$  com valor absoluto  $|z| \geq R$ , ou seja, no exterior do disco  $D_R(0)$ ,

$$c|z|^n \leq |f(z)| \leq C|z|^n.$$

(para provar a segunda desigualdade basta estimar o valor absoluto de  $p(z)/z^n$ ; para provar a primeira desigualdade, convém considerar a fatorização (2.6) do polinómio, e estimar o valor absoluto de cada fator  $(z - p_k)$  usando a desigualdade do triângulo ...)

**Polinómio interpolador de Lagrange.** Se  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são  $n$  pontos distintos de  $\mathbb{C}$ , então

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) \\ &= z^n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n) z^{n-1} + \dots + (-1)^n (p_1 p_2 \dots p_n) \end{aligned}$$

é um polinómio mónico de grau  $n$  que se anula nos  $p_k$ 's, e os

$$f_k(z) = f(z)/(z - p_k)$$

com  $k = 1, \dots, n$ , são polinómios mónicos de grau  $n - 1$  que se anulam nos  $p_j$  com  $j \neq k$  e tais que  $f_k(p_k) \neq 0$ . Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são  $n$  números complexos arbitrários (não necessariamente distintos), então

$$g(z) := \sum_k \frac{\alpha_k}{f_k(p_k)} f_k(z)$$

é um polinómio de grau  $\leq n - 1$  tal que  $g(p_k) = \alpha_k$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ , chamado *polinómio interpolador de Lagrange*.

**ex:** Mostre que o polinómio interpolador de Lagrange  $g(z)$  é o único polinómio de grau  $\leq n - 1$  cujo gráfico passa pelos  $n$  pontos  $(p_k, \alpha_k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .

**Funções racionais.** Uma *função racional* é o quociente

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad (2.7)$$

entre dois polinómios  $g, h \in \text{Pol}(\mathbb{C})$ . Podemos assumir que  $g$  e  $h$  não têm fatores (e portanto zeros) comuns, e que  $a_n \neq 0$  e  $b_m \neq 0$ , ou seja, que  $n = \deg(g)$  e  $m = \deg(h)$ . É evidente que  $f$  é uma função holomorfa, de fato infinitamente derivável, fora dos zeros do denominador  $h(z)$ . Somas, produtos e quocientes de funções racionais são funções racionais. Em particular, o espaço  $\text{Rat}(\mathbb{C})$  das funções racionais forma um corpo.

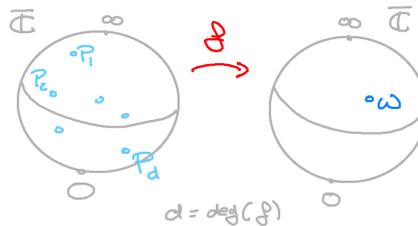
**Pólos.** É conveniente definir  $f(p) = \infty$  se  $p$  é uma raiz do denominador  $h(z)$  (e não do numerador!), e chamar este ponto  $p$  um *pólo* de ordem  $\text{ord}(h, p) =: -\text{ord}(f, p)$ . Para definir também um valor de  $f$  em  $\infty$ , uma possibilidade é definir a função  $F(z) := f(1/z)$ , e depois definir  $f(\infty) := F(0)$  e  $\text{ord}(f, \infty) := \text{ord}(F, 0)$ . Mas

$$F(z) = z^{m-n} \frac{a_n + a_{n-1}z + \dots + a_1z^{n-1} + a_0z^n}{b_m + b_{m-1}z + \dots + b_1z^{m-1} + b_0z^m}.$$

Portanto,  $\infty$  é um zero de  $f$  de ordem  $m - n$  se  $m > n$ , é um pólo de  $f$  de ordem  $n - m$  se  $n > m$ , ou é um ponto regular onde  $f(\infty) = a_n/b_m \neq 0, \infty$  se  $n = m$ . Assim, uma função racional pode, e deve!, ser pensada como uma função contínua

$$f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

(a topologia da esfera de Riemann  $\bar{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$  é induzida pela métrica euclidiana em  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ). Se definimos o seu grau  $\text{deg}(f) := \max\{n, m\}$ , então  $f$  possui exatamente  $\text{deg}(f)$  zeros e  $\text{deg}(f)$  pólos na esfera de Riemann. Resolver  $f(z) = w$ , com  $w \in \mathbb{C}$ , significa achar os zeros de  $f(z) - w$ . Mas é evidente que  $\text{deg}(f - w) = \text{deg}(f)$ . A conclusão é que para cada  $w \in \bar{\mathbb{C}}$  existem  $\text{deg}(f)$  pontos  $p \in \bar{\mathbb{C}}$  tais que  $f(p) = w$ . Informalmente, uma função racional (por exemplo, um polinómio) de grau  $n \geq 1$  define uma maneira de “embrulhar” (os matemáticos dizem *recobrir*) a esfera de Riemann com outra esfera de Riemann dando  $n$  voltas por cima de cada ponto genérico.



**ex:** Determine uma função racional cujos pólos são os pontos  $\pm 1$  e cujos zeros são os pontos  $\pm i$  (todos de ordem um).

**Transformações de Möbius.** As função racionais de grau 1 são chamadas *transformações lineares fraccionárias*, ou *transformações de Möbius*, e têm a forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.8}$$

onde os parâmetros  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  são tais que  $ad - bc \neq 0$  (caso contrário a fração não é reduzida, e  $f(z)$  é constante, logo de grau 0). Sendo  $\text{deg}(f) = 1$ , cada  $w \in \bar{\mathbb{C}}$  tem uma e uma única imagem inversa,

$$z = f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{a - cw}$$

Uma transformação de Möbius define portanto uma bijeção  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  da esfera de Riemann, tendo definido  $f(\infty) := a/c$  e  $f(-d/c) := \infty$  se  $c \neq 0$ , ou  $f(\infty) = \infty$  se  $c = 0$ . Observe que as transformações de Möbius que preservam o ponto  $\infty$  são as transformações afins  $f(z) = az + b$ , com  $a \neq 0$ .

Casos particulares são as translações  $T_\alpha(z) = z + \alpha$  com  $\alpha \in \mathbb{C}$ , as homotetias complexas  $M_\lambda(z) = \lambda z$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , e a *inversão*

$$I(z) := 1/z$$

(ao longo da circunferência unitária, pois  $|z| \cdot |I(z)| = 1$ ). De fato, uma transformação de Möbius genérica (2.8) é uma composição de estas três transformações elementares (quais?).

**ex:** Descreva a inversão  $f(z) = 1/z$  e a inversão  $g(z) = 1/\bar{z}$  (que não é holomorfa!) usando a forma polar.

**ex:** Verifique que a inversão  $f(z) = 1/z$  transforma circunferências e retas de  $\mathbb{C}$  em circunferências ou retas. Ou seja, transforma circunferências de  $\overline{\mathbb{C}}$  em circunferências.

**ex:** Determine as imagens e as imagens inversas dos pontos  $0, 1, \infty \in \overline{\mathbb{C}}$  pela transformação de Möbius (2.8). Mostre que a única transformação de Möbius que fixa estes três pontos (i.e. tal que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  e  $f(\infty) = \infty$ ) é a identidade  $f(z) = z$ .

### 3 Séries de potências e funções analíticas

Operações algébricas elementares produzem as funções holomorfas mais simples, os polinómios. Polinómios de “grau infinito”, chamados séries des potências, também são funções holomorfas dentro dos próprios discos de convergência. A série de potência que resolve a equação diferencial autónoma mais simples define a função exponencial, “a função mais importante da matemática” de acordo com Rudin, e que “contém” as funções trigonométricas.

#### 3.1 Séries

19 out 2020

**Séries.** Uma *série* é uma soma infinita formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

onde os  $a_n$ , com  $n \geq 0$ , são elementos de uma sucessão, real ou complexa. As *somas parciais* (ou “primitivas discretas”) dos  $a_n$ 's são os números  $A_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ , definidos pela equação recursiva  $A_n - A_{n-1} = a_n$  com condição inicial  $A_0 = a_0$ . Se a sucessão das somas parciais converge, e o seu limite é  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \alpha$ , então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é dita *convergente* (ou *somável*), e a sua *soma* é definida

$$\sum_{n \geq 0} a_n := \alpha.$$

De acordo com o critério de Cauchy 1.2 (aplicado à sucessão das somas parciais), a série  $\sum a_n$  é convergente se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tal que

$$|A_{n+k} - A_n| = |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

para todos  $n > \bar{n}$  e  $k \geq 1$ . Em particular, se  $\sum a_n$  é convergente então  $a_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  (um critério necessário para a convergência).

É claro que se as séries  $\sum a_n = \alpha$  e  $\sum b_n = \beta$  são convergentes, etnã também são convergentes combinações lineares das duas séries, e, em particular,  $\sum \lambda a_n = \lambda \alpha$  e  $\sum (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ , se  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Uma série que não é convergente é dita *divergente*.

**Convergência absoluta.** A série  $\sum_n a_n$  é *absolutamente convergente* se a série  $\sum_n |a_n|$ , formada pelos valores absolutos dos seus termos, é convergente. É evidente, pelo critério de Cauchy 1.2 e a desigualdade triangular

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|,$$

que a convergência absoluta implica a convergência.

**Série harmónica.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

é divergente (embora os seus termos satisfazam  $a_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ). De fato, o termo genérico  $1/n$  é superior ao integral  $\int_n^{n+1} dx/x$ , e portanto as somas parciais  $\sum_{k=1}^n 1/k$  são superiores a  $\log(n+1)$ .

**Série geométrica.** A mais importante é a *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (3.1)$$

A identidade  $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n)(z - 1) = z^{n+1} - 1$  implica que, se  $z \neq 1$ , a soma dos primeiros  $n + 1$  termos da progressão geométrica é

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

Em particular, quando  $|z| < 1$  a série geométrica é absolutamente convergente, e a sua soma é

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

Por outro lado, se  $|z| > 1$  então  $|1 + z + z^2 + \dots + z^n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Comparação.** Para decidir se uma série  $\sum a_n$  é absolutamente convergente, é possível “comparar” os seus termos  $a_n$ s com os termos  $b_n$ 's de uma série  $\sum b_n$  cujo comportamento é conhecido.

Se  $0 \leq |a_n| \leq b_n$  para todo  $n \gg 1$  (ou seja, suficientemente grande), então a convergência de  $\sum b_n$  implica a convergência de  $\sum |a_n|$ , ou seja, a convergência absoluta de  $\sum a_n$ .

Em particular, se  $|a_n| \leq C \lambda^n$  para alguma constante  $C > 0$  e todo o  $n \gg 1$ , então as somas parciais da série  $\sum_n |a_n|$  são limitadas por  $C$  vezes as somas parciais da série geométrica  $\sum_n \lambda^n$ . Se  $|\lambda| < 1$ , então a série  $\sum_n a_n$  é absolutamente convergente. Isto acontece quando

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1 \quad (\text{teste da raiz})$$

ou quando

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1 \quad (\text{teste da razão})$$

De fato, é tradição enunciar a dicotomia seguinte.

**Teorema 3.1** (teste da raiz). *Sejam  $\sum a_n$  uma série complexa e  $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ . Se  $r < 1$ , então a série é absolutamente convergente. Se  $r > 1$ , então a série é divergente.*

*Demonstração.* Se  $r < 1$ , então existe um  $r < \lambda < 1$  tal que  $|a_n|^{1/n} < \lambda$  para todo  $n \gg 1$ . Isto implica que  $|a_n| < \lambda^n$  para todo  $n \gg 1$ , logo que a série  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ , com  $N$  suficientemente grande, é limitada por uma série geométrica convergente.

Se  $r > 1$ , então existe  $\lambda > 1$  tal que  $|a_n|^{1/n} > \lambda$ , para infinitos tempos  $n$ . Mas se  $|a_n| > \lambda^n > 1$  para infinitos tempos  $n$ , então o termo genérico  $a_n$  não converge para zero.  $\square$

No segundo caso, o caso da divergência, é tipicamente mais fácil observar que  $a_n$  não converge para zero de que calcular o limsup da raiz  $n$ -ésima do seu valor absoluto!

**ex:** Dê um exemplo de uma série convergente que não seja absolutamente convergente.

**ex:** Dê exemplos de séries convergentes e divergentes tais que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1$ .

**Convergência condicional e rearranjos.** Séries convergente mas não absolutamente convergentes são ditas *condicionalmente convergentes*, e têm um comportamento que pode parecer “diabólico”<sup>3</sup> (podem consultar o último livro de Hardy, [Ha49]).

O exemplo típico é a série harmónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

que converge para  $\log 2$ . Como observado por Dirichlet, ao trabalhar com séries de Fourier (que são séries oscilantes) rearranjar os termos destas séries e tentar usar as regras algébrica produz

<sup>3</sup>De acordo com Abel (1828), “divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.”

aparentes paradoxos. O problema é que as regras algébrica falham com certas somas infinitas. De fato, de acordo com o *teorema do rearranjo de Riemann*<sup>4</sup>, os termos de uma série condicionalmente convergente podem ser rearranjados de forma a serem convergentes para qualquer número!

**Teorema 3.2** (teorema do rearranjo de Riemann). *Seja  $\sum x_n$  uma série real condicionalmente convergente. Dado qualquer número real  $\alpha$ , existe uma permutação  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dos naturais tal que*

$$\sum_n x_{\sigma(n)} = \alpha.$$

A ideia da prova é simples, embora escrever os detalhes pode parecer complicado. É claro que uma série real que não é absolutamente convergente deve ter infinitos termos positivos e infinitos termos negativos, e estas duas séries, formadas apenas pelos termos positivos ou pelos termos negativos, divergem. Fixado um número  $\alpha$ , por exemplo positivo, podemos somar os primeiros termos positivos da série até a soma ser  $> \alpha$ , depois somar os primeiros termos negativos até a soma ser  $< \alpha$ , depois somar os seguintes termos positivos até a soma ser  $> \alpha$ , ... e assim a seguir. Desta maneira, as somas parciais do rearranjo oscilam à volta de  $\alpha$ , com um erro limitado em valor absoluto pelo último  $x_n$  utilizado. Mas  $x_n \rightarrow 0$ , porque a série é convergente.

**ex:** Modifique o argumento e mostre que também existem rearranjos tais que as somas parciais da série têm limites  $\pm\infty$ .

### 3.2 Sucessões e séries de funções

**Sucessões de funções.** Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é o *limite pontual* das  $f_n$ 's, ou  $f_n \rightarrow f$  *pontualmente*, se  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  para todo o  $z \in \Omega$ . Isto significa que para cada  $z \in \Omega$  e cada  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  (que depende de  $\varepsilon$  e do ponto  $z$ ) tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  se  $n > \bar{n}$ .

Acontece que o limite pontual não herda necessariamente as boas propriedades das  $f_n$ 's. Por exemplo, o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas pode não ser uma função contínua

**ex:** Determine o limite pontual da sucessão  $f_n(x) = x^n$ , definida em  $[0, 1]$ , e verifique que não é contínuo.

**Convergência uniforme.** A sucessão de funções  $(f_n)$  converge *uniformemente* para  $f$  em  $\Omega$ , ou  $f_n \rightarrow f$  *uniformemente*, se para cada  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  (que depende de  $\varepsilon$  mas é independente do ponto  $z$ , ou seja, “uniforme”) tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para todo o  $z \in \Omega$  se  $n > \bar{n}$ .

É conveniente definir a *norma uniforme* no espaço das funções limitadas definidas em  $\Omega$  como

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

Então  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $\Omega$  sse  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

É claro que a convergência uniforme implica a convergência pontual. Mais importante é que preserva a continuidade das funções.

**Teorema 3.3.** *O limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas é uma função contínua.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Se  $n$  é suficientemente grande, então  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para todo o  $z \in \Omega$ . Pela continuidade de  $f_n$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon$  se  $|z - z'| < \delta$ . Então, pela desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z')| + |f_n(z') - f(z')| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

se  $|z - z'| < \delta$ . □

<sup>4</sup>B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Gesammelte Mathematische Werke* (Leipzig 1876), 213-253.

O análogo do teste de Cauchy 1.2 para a convergência uniforme é o seguinte.

**Teorema 3.4.** *A sucessão de funções  $(f_n)$  converge uniformemente em  $\Omega$  sse para todo o  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tal que  $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$  para todo o  $z \in \Omega$  (ou seja,  $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ ) quando  $n, m > \bar{n}$ .*

*Demonstração.* A implicação  $\Rightarrow$  é imediata, usando a desigualdade do triângulo. Para provar a implicação  $\Leftarrow$ , a primeira observação é que o critério de Cauchy 1.2 para sucessões numéricas implica a convergência  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  em cada ponto  $z$ . Passando ao limite quando  $m \rightarrow \infty$ , temos que

$$|f_n(z) - f(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon$$

se  $n > \bar{n}$ . □

**Séries de funções.** Uma *série de funções* é uma soma formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots$$

formada por funções  $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definidas num domínio comum, por exemplo uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . A série de funções  $\sum_n f_n(z)$  converge pontualmente/uniformemente para uma função  $F(z)$  num domínio  $\Omega$  se a sucessão das somas parciais  $F_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$  converge pontualmente/uniformemente para  $F$ . Pelo critério de Cauchy 3.4, isto acontece quando, para todo o  $\varepsilon > 0$ , existe um tempo  $\bar{n}$  tal que

$$|F_{n+m}(z) - F_n(z)| = |f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+m}(z)| < \varepsilon$$

para todo o  $z \in \Omega$  e todos os  $n > \bar{n}$  e  $m \geq 1$ . Se os termos da série são limitados pelos termos de uma série numérica  $\sum_n M_n$ , ou seja,  $|f_n(z)| \leq a_n$ , então

$$|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+m}(z)| \leq |M_{n+1} + \dots + M_{n+m}|$$

Em particular,

**Teorema 3.5** (*M*-teste de Weierstrass). *Se  $\sum_n M_n$  é uma série numérica convergente e se as funções  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  são limitadas por  $\|f_n\|_\infty \leq M_n$  (para todo o  $n$  suficientemente grande), então a série de funções  $\sum_n f_n(z)$  é uniformemente e absolutamente convergente.*

**Série geométrica.** A *série geométrica*

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge no disco unitário  $\mathbb{D}$  para a função

$$\frac{1}{1-z}.$$

Converge uniformemente em cada disco  $\overline{D_r(0)}$  de raio  $0 < r < 1$  (pois, se  $|z| < r$ , os termos da série são limitados por  $|z^n| \leq r^n$ ). É claro que diverge quando  $|z| > 1$ , ou seja, na região  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , embora a função  $1/(1-z)$  esteja definida em todo o plano exceto o ponto  $z = 1$ .

O que acontece na circunferência unitária, fronteira que separa as duas regiões? Se  $|z| = 1$ , a série diverge porque o termo genérico  $z^n$ , tendo módulo unitário, não tende para zero. Quando  $z = 1$ , a divergência é evidente, pois a soma cresce linearmente. Nos outros pontos  $z = e^{i\theta}$ , com  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , da circunferência unitária, as somas parciais da série geométrica são

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\theta} = \frac{e^{iN\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

Ao variar  $N$ , esta função oscila num intervalo de raio  $\leq 2/(e^{i\theta} - 1)$  em torno da origem (se  $\theta$  é irracional isto não é óbvio!).

### 3.3 Séries de potências e funções analíticas

**Séries de potências.** As séries de funções mais elementares são as *séries de potências*

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n,$$

com coeficientes  $c_k \in \mathbb{C}$ , cujas somas parciais são polinômios  $c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ . Usando translações na variável independente, podemos ainda construir séries de potências

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - p)^n = c_0 + c_1 (z - p) + c_2 (z - p)^2 + \dots \quad (3.2)$$

em torno de um ponto arbitrário  $p \in \mathbb{C}$ .

**Discos de convergência.** A primeira observação é que a cada série de potências está associado um disco de convergência, possivelmente trivial.

**Teorema 3.6** (Abel). *Se a série de potências  $\sum c_n (z - p)^n$  converge num ponto  $z = \zeta$ , então converge absolutamente no disco  $|z - p| < |\zeta - p|$ . Vice-versa, se diverge num ponto  $z = \zeta$ , então também diverge quando  $|z - p| > |\zeta - p|$ .*

*Demonstração.* Podemos assumir que  $p = 0$ . A convergência da série  $\sum a_n \zeta^n$  implica que a sucessão  $c_n \zeta^n$  converge para 0. Em particular,  $|c_n \zeta^n| < C$  para todo  $n$  suficientemente grande. Então, se  $|z/\zeta| = \lambda < 1$  e  $n$  é grande,

$$|c_n z^n| \leq |c_n \zeta^n| \lambda^n < C \lambda^n$$

Consequentemente, a série  $\sum |c_n z^n|$  é limitada por uma série geométrica convergente. A segunda afirmação é uma consequência da primeira.  $\square$

É natural portanto procurar o maior disco onde converge uma série de potência. A resposta é a seguinte. O *raio de convergência*  $R$  da série de potências (3.2) é definido pela *fórmula de Hadamard*

$$\boxed{1/R := \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}} \quad (3.3)$$

O *disco de convergência* é  $D := D_R(p)$  (se o “limsup” é  $\infty$ , então  $R = 0$  e o disco é vazio; se o “limsup” é 0, então  $R = \infty$ , e o disco é o próprio  $\mathbb{C}$ ).

**Teorema 3.7.** *A série de potências (3.2) converge absolutamente no disco de convergência  $D_R(p)$ , i.e. se  $|z - p| < R$ , e diverge se  $|z - p| > R$ . Em particular, a série (3.2) converge absolutamente e uniformemente em cada disco fechado  $\overline{D}_r(p)$  com  $r < R$ .*

*Demonstração.* Podemos assumir que  $p = 0$ . Se  $r < \rho < R$ , então  $1/\rho > \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$ , e portanto  $\rho^{-n} > |c_n|$  se  $n \gg 1$  (i.e. se  $n$  é suficientemente grande). Então, para estes  $n$ ,

$$\sup_{z \in D_r(p)} |c_n z^n| < (r/\rho)^n$$

Mas a série geométrica de razão  $r/\rho < 1$  é convergente. Pelo  $M$ -teste de Weierstrass ??, a série de potência converge absolutamente e uniformemente em  $D_r(p)$ .

Por outro lado, sejam  $|z| = r > R$  e  $R < \rho < r$  (desde que  $R < \infty$ , naturalmente). Então  $1/\rho < \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$ , e portanto  $\rho^{-n} < |c_n|$  se  $n \gg 1$ . Então, para estes  $n$ ,

$$|c_n z^n| > (r/\rho)^n$$

Os termos da série são ilimitados, e portanto a série não pode ser convergente.  $\square$

O raio de convergência de uma série de potência também pode ser calculado, nos casos em que o limite existe (eventualmente igual a  $\infty$ ), como  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ .

**ex:** Mostre que se o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$  existe, eventualmente infinito, então é igual ao raio de convergência da série  $\sum c_n(z-p)^n$ .

**Funções analíticas.** Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , é *analítica*, ou *representável por séries de potências*, se a cada disco  $D_r(p) \subset \Omega$  corresponde uma série de potências (3.2) que converge para  $f(z)$  para todos os  $z \in D_r(p)$ .

Acontece que toda série de potências é analítica dentro do seu disco de convergência, é também holomorfa, e as suas derivadas podem ser calculadas na maneira “óbvia”, derivando dentro do somatório.

**Teorema 3.8** (Abel). *Se  $f$  é analítica em  $\Omega$  então é também holomorfa em  $\Omega$ , i.e.  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , e a sua derivada  $f'$  também é analítica em  $\Omega$ . Em particular, se*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$$

num disco  $D_r(p) \subset \Omega$ , então neste mesmo disco a derivada  $f'$  é a soma da série de potências obtida derivando termo a termo a série de potências de  $f$ , ou seja,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-p)^{n-1}.$$

*Demonstração.* Podemos assumir que  $p = 0$ . É evidente, pela fórmula de Hadamard, que as séries  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  e  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  têm o mesmo disco de convergência  $D_r(0)$ . Falta provar que a segunda série representa a derivada da soma da primeira. Sejam  $z, \zeta \in D_\rho(0)$  com  $\rho < r$ . Então, usando duas vezes a identidade

$$\zeta^n - z^n = (\zeta - z)(\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2}z + \dots + \zeta z^{n-2} + z^{n-1})$$

(para as oportunas potências  $n$ ), observamos que, se  $\zeta \neq z$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{\zeta^n - z^n}{\zeta - z} - n z^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n (\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2}z + \dots + \zeta z^{n-2} + z^{n-1} - n z^{n-1}) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} z^k (\zeta^{n-1-k} - z^{n-1-k}) \right) \\ &= (\zeta - z) \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} z^k (\zeta^{n-2-k} + \zeta^{n-3-k}z + \dots + z^{n-2-k}) \right) \end{aligned}$$

Sendo  $|\zeta| < \rho$  e  $|z| < \rho$ , o valor absoluto da soma dentro das parênteses é limitado por  $n^2 \rho^{n-2}$ . Consequentemente,

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - g(z) \right| \leq |\zeta - z| \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^2 \rho^{n-2}$$

O critério da raiz diz que a última série é convergente, e portanto, passando ao limite quando  $\zeta \rightarrow z$ , a fórmula acima diz que  $g(z) = f'(z)$ .  $\square$

Por indução, se  $f$  é analítica em  $\Omega$ , então todas as suas derivadas são analíticas, e portanto holomorfas, em  $\Omega$ .

As séries de potências das derivadas, num disco  $D_r(p)$  onde  $f$  é dada por (3.2), são obtidas derivando termo a termo a séries de  $f$ , ou seja,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-p)^{n-k}$$

Em particular, os coeficientes  $c_k$  de uma série de potência (3.2) que representa uma função analítica  $f(z)$  numa vizinhança de um ponto  $p$  são únicos, pois

$$c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!} \quad (3.4)$$

Também interessante é observar que a série de potências

$$c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-p)^{n+1}$$

com  $c$  constante arbitrária, converge no mesmo disco  $D_r(p)$  onde converge a série de potências  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$ , e define uma função analítica  $F(z)$  que é uma primitiva de  $f(z)$ , pois  $F'(z) = f(z)$ . Ou seja, uma função analítica admite sempre primitivas locais.

**Derivadas da série geométrica.** Por exemplo, a série geométrica define a função analítica

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

no disco unitário  $\mathbb{D}$ . Então as suas derivadas são obtidas derivando termo a termo, por exemplo,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = 2 + 6z + 12z^2 + 20z^3 + \dots$$

...

**ex:** Determine o disco de convergência das seguintes séries de potências, e, se possível, uma expressão compacta para as funções que definem.

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n \quad \sum_{n \geq 0} n z^n \quad \sum_{n \geq 0} n^n z^n \quad 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

$$\sum_{n \geq 0} 2^n z^n \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} z^{2n} \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^n$$

**ex:** Mostre que, se  $|\zeta| = \rho$  e  $|z| < \rho$ ,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \left( 1 + \frac{z}{\zeta} + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^3 + \dots \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

### 3.4 Funções geradoras e teoremas de Abel e Tauber

Um ponto de vista diferente é o das funções geradoras, utilizado, por exemplo, em teoria de números ou em probabilidades (e portanto em mecânica estatística).

**Funções geradoras.** Dadas uma sucessão  $(a_n)_{n \geq 0}$ , podemos considerar a série de potências formal

$$G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < \infty$ , então o raio de convergência é  $R > 0$ , e portanto  $G(z)$  representa uma função analítica num disco não trivial  $D_R(0)$ . É chamada *função geradora*, porque gera os  $a_n$ 's, de acordo com a fórmula (3.4)

$$a_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Equações recursivas.** A maneira mais natural de gerar sucessões é usando equações recursivas homogêneas

$$a_{n+k} = c_{n+k-1}a_{n+k-1} + \cdots + c_{n+1}a_{n+1} + c_n a_n,$$

com coeficientes constantes  $c_k$ 's, dadas certas condições iniciais  $a_0, \dots, a_{n+k-1}$ . As soluções podem ser determinadas usando a conjectura  $a_n = z^n$ , que dá origem a uma equação polinomial para  $z$ . No caso genérico, este polinômio possui  $k$  raízes distintas  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , e portando a solução geral é uma sobreposição de  $k$  soluções independentes  $z_k^n$ . É interessante observar que estas sucessões correspondem a funções geradoras racionais

**Teorema 3.9.** *Uma série de potências define uma função racional sse os seus coeficientes satisfazem uma equação recursiva homogênea com coeficientes constantes.*

Podem procurar uma demonstração (a parte mais difícil é a notação) com a ajuda do seguinte exemplo de Fibonacci.

**Fibonacci, mais uma vez.** A sucessão de Fibonacci  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$  resolve a recursão  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  com condições iniciais  $f_0 = f_1 = 1$ . Duas soluções independentes são  $\varphi_{\pm}^n$ , onde  $\varphi_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$  ( $\varphi_+$  é a “razão” dos gregos, ou a “seção áurea” de Leonardo da Vinci). Os números de Fibonacci, portanto, podem ser representados explicitamente pela fórmula de Binet  $f_n = c_+ \varphi_+^n + c_- \varphi_-^n$ , onde  $c_{\pm}$  são certos coeficientes que dependem das condições iniciais.

Ao multiplicar os números de Fibonacci  $f_n$  por  $z^n$  e depois somar com  $n \geq 0$ , temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

e portanto, usando as condições iniciais  $f_0 = f_1 = 1$ ,

$$z^{-2}(G(z) - 1 - z) = z^{-1}(G(z) - 1) + G(z).$$

Assim, a função geradora dos números de Fibonacci é a função racional

$$G(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

As raízes do denominador são  $\varphi_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ , e portanto o pólo menor de  $G(z)$  é no ponto  $\varphi_- = 1/\varphi_+$ , que é de fato o raio de convergência da série de potências. De acordo com a fórmula de Hadamard,  $\limsup \sqrt[n]{|f_n|} = 1/\varphi_-$ , o que confirma o crescimento assintótico dos números de Fibonacci, que é  $f_n \asymp \varphi_+^n$ .

**Uma ideia geral.** A versão contínua da função geradora é chamada “transformada de Laplace”, e é muito apreciada pelos engenheiros que estudam equações diferenciais lineares, ou, em geral, sistemas lineares. A transformada de Laplace de um sinal contínuo  $a(t)$ , definido por tempos  $t \geq 0$ , é o integral  $A(\lambda) := \int_0^{\infty} a(t) e^{\lambda t} dt$ , definido numa região  $\Re(\lambda) > \rho$  onde o integral é absolutamente convergente. As potências  $z^n$ , utilizadas para construir soluções de equações recursivas homogêneas com coeficientes constantes, são substituídas por exponenciais  $e^{\lambda t}$ , utilizados para construir soluções de equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes.

**Comportamento na fronteira do disco de convergência.** Na fronteira do disco de convergência de uma série de potências podem acontecer muitas coisas diferentes, objeto de estudos mais profundos que relacionam as séries de potências e as séries de Fourier.

**Primitivas da série geométrica.** Por exemplo, a série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , que converge no disco unitário  $\mathbb{D}$ , diverge para todos os pontos da circunferência unitária, onde  $|z| = 1$  (porque o termo genérico não converge para 0). A série  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$  (formalmente uma primitiva da série geométrica!) diverge se  $z = 1$ , e converge, embora não absolutamente, nos outros pontos da circunferência unitária. A série  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$  (mais ou menos uma primitiva da primitiva da série geométrica) converge absolutamente em toda a circunferência unitária, sendo limitada pela série convergente  $\sum 1/n^2$ .

**Somatório por partes.** Um instrumento de importância independente é uma versão discreta da integração por partes. Sejam  $a = (a_n)$  e  $b = (b_n)$  duas sucessões, definidas para tempos  $n \geq 0$ . A soma parcial, ou “primitiva”, da sucessão  $(a_n)$  é a sucessão dos  $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ . A versão discreta do teorema fundamental do cálculo é a identidade trivial  $a_n = A_n - A_{n-1}$ , que diz que  $a$  é a “derivada discreta” de  $A$ . Um cálculo elementar mostra que a primitiva do produto  $ab$  é igual a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= a_0 b_0 - A_0 b_0 + A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $A_0 = a_0$ , temos o *lema de Abel*, ou *fórmula do somatório por partes*,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)}. \quad (3.5)$$

**ex:** Uma versão mais simétrica e mais geral da (3.5) é

$$\sum_{k=n}^m (a_{k+1} - a_k) b_k = (a_{m+1} b_m - a_n b_n) - \sum_{k=n+1}^m a_k (b_k - b_{k-1})$$

A prova é elementar, por exemplo por indução.

**Teorema de Abel.** A possibilidade de passar o limite dentro do somatório de uma série, para valores da variável na fronteira do disco de convergência, é objeto do famoso teorema de Abel <sup>5</sup>. A menos de uma homotetia, podemos assumir que o raio de convergência seja igual a um.

**Teorema 3.10 (Abel).** *Seja  $\sum a_n$  uma série convergente, com soma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$ . Então a série de potência  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  define uma função  $f(z)$  holomorfa no disco unitário  $\mathbb{D}$  e*

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \alpha$$

quando  $z \rightarrow 1$  dentro de um “sector de Stolz”, uma região do disco unitário onde  $|1-z| \leq M(1-|z|)$  para algum  $M > 0$ . Em particular, tomando  $z = x$  real, existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_n x^n = \alpha.$$

*Demonstração.* É claro que, a menos de redefinir  $a_0$ , podemos assumir que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ . Sejam  $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$  as somas parciais, assim que  $a_n = A_n - A_{n-1}$  (para todo  $n$  se definimos  $A_{-1} := 0$ ) e  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ . Pelo teorema 3.6, a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge no disco unitário  $\mathbb{D}$ , pois converge quando  $z = 1$ . Pelo lema de Abel (3.5), nos pontos  $z \in \mathbb{D}$  é igual a

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_n z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n z^n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (z^{k+1} - z^k) \\ &= (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \end{aligned}$$

<sup>5</sup>N. Abel, Untersuchungen über die Reihe, *Journal für Math.* 1 (1826), 311-339.

(ou seja, a função geradora dos  $a_n$ 's é  $(1-z)$  vezes a função geradora das somas parciais  $A_n$ 's). Como  $A_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um tempo  $n$  tão grande que  $|A_k| < \varepsilon$  se  $k \geq n$ . Então, se  $z \in \mathbb{D}$  satisfaz  $|1-z| \leq M(1-|z|)$ ,

$$\left| (1-z) \sum_{k=n}^{\infty} A_k z^k \right| \leq \varepsilon |1-z| \sum_{k=n}^{\infty} |z|^k \leq \varepsilon |1-z| \frac{1}{1-|z|} \leq \varepsilon M$$

Por outro lado, fixado  $n$ , e portanto o valor finito de  $C_n = |\sum_{k=0}^n A_k|$ , podemos escolher  $z \in \mathbb{D}$ , sempre dentro do sector de Stolz, tão próximo de 1 que

$$\left| (1-z) \sum_{k=0}^n A_k z^k \right| \leq |1-z| C_n \leq \varepsilon$$

Então,

$$|f(z)| = \left| (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \right| \leq \left| (1-z) \sum_{k=0}^n A_k z^k \right| + \left| (1-z) \sum_{k=n}^{\infty} A_k z^k \right| \leq \varepsilon (M+1)$$

Pela arbitrariedade de  $\varepsilon$ , isto quer dizer que o limite  $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$  quando  $z \rightarrow 1$  dentro do sector de Stolz é 0.  $\square$

**Somabilidade de Abel.** Uma série (real)  $\sum a_n$  tal que  $\sum a_n r^n$  converge quando  $r \rightarrow 1^-$  é dita *Abel somável*. Num certo sentido, o “operador de Abel” transforma um objeto possivelmente problemático, uma série  $\sum a_n$ , num objeto mais suave, uma função holomorfa  $f(z) = \sum a_n z^n$ . De fato, o teorema de Abel 3.10 diz que uma série convergente é Abel somável.

A afirmação contrária é, em geral, falsa, como mostra o exemplo da

**Série geométrica alternada.** A série geométrica alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

também tem raio de convergência 1, logo define uma função holomorfa  $f(z) = (1+z)^{-1}$  no disco unitário  $\mathbb{D}$ . O limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  existe e é igual a  $1/2$ . Por outro lado, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  não é convergente.

**Função geradora das probabilidades.** Seja  $X$  uma variável aleatória com valores inteiros não negativos  $0, 1, 2, 3, \dots$  e probabilidades  $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ . A *função geradora das probabilidades* é o valor esperado da varável  $z^X$ , ou seja,

$$f_X(z) := \mathbf{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

Sendo  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$  (fórmula da probabilidade total), o raio de convergência é  $\geq 1$ , ou seja, e série converge pelo menos no disco unitário  $\mathbb{D}$ . Pelo teorema de Abel 3.10, também  $f_X(1^-) = 1$ . A densidade de probabilidade pode ser reconstruída como  $p_k = f_X^{(k)}(0)/k!$ .

Por exemplo, uma variável de Bernoulli  $X$ , que assume apenas valores zero ou um, com probabilidades  $p_1 = p$  e  $p_0 = q := 1 - p$ , tem função geradora  $f_X(z) = q + pz$ . Então uma variável binomial  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , soma de  $n$  variáveis de Bernoulli independentes, tem função geradora igual ao produto

$$f_{S_n}(z) = (q + pz)^n.$$

Uma variável de Poisson  $P$ , que assume os valores inteiros  $k \geq 0$  com probabilidades  $p_k = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$  (com valor médio  $\lambda > 0$ ), tem função geradora

$$f_P(z) = e^{\lambda(z-1)}.$$

**Teoremas Tauberianos.** Critérios que dizem quais séries Abel somáveis são também convergentes (necessariamente para a mesma soma) são chamados “teoremas Tauberianos”, em homenagem ao protótipo, devido a Tauber.<sup>6</sup> São tipicamente teoremas mais difíceis, com consequências profundas, por exemplo em teoria de números (onde uma versão mais avançada implica o teorema dos números primos!) ou em probabilidades (onde estão relacionados com as “grandes desvios”).

**Teorema 3.11** (Tauber). *Se a série  $\sum a_n$  é Abel somável,  $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum a_n r^n = \alpha$ , e se  $na_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então a série é também somável e a sua soma é  $\sum a_n = \alpha$ .*

*Demonstração.* Observamos que, para  $|x| < 1$  e  $N$  arbitrário,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n - \alpha &= \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=0}^N a_n x^n - \alpha \\ &= \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \alpha \right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

e portanto

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \alpha \right| = \left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \alpha \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| \quad (3.6)$$

Fixado um  $\varepsilon > 0$  arbitrário, estimamos agora as três somas da (3.6) separadamente. Pela somabilidade de Abel, existe um  $\delta > 0$  tão pequeno que se  $1 - \delta < x < 1$  a segunda soma é

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \alpha \right| < \varepsilon \quad (3.7)$$

Escolhemos  $N$  tão grande que  $na_n < \varepsilon$  se  $n > N$  e que  $1/N < \delta$ , e escolhemos  $x = 1 - 1/N$ . Então a terceira soma é limitada por

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} na_n \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \\ &\leq \frac{\varepsilon}{N+1} \frac{1}{1-x} = \varepsilon \frac{N}{N+1} \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para estimar a primeira soma, usamos a desigualdade

$$1 - x^n \leq n(1 - x)$$

e observamos que o lema de Kronecker 1.3, aplicado a  $n|a_n|$ , diz que

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N n|a_n| < \varepsilon$$

se  $N$  é suficientemente grande. Então a primeira soma é limitada por

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) \right| &\leq \sum_{n=0}^N n|a_n| (1 - x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n|a_n| \\ &\leq \frac{N+1}{N} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N n|a_n| \leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad (3.9)$$

<sup>6</sup>A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **VIII** (1897), 273-277.

O teorema segue juntando as desigualdades (3.9), (3.7) e (3.8),

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \alpha \right| \leq 4\varepsilon,$$

pela arbitrariedade de  $\varepsilon$ . □

### 3.5 Exponencial e funções trigonométricas

Funções transcendentais são definidas por séries de potências (funções geradoras) cujos coeficientes não verificam equações recursivas homogêneas com coeficientes constantes. Outra fonte natural de funções transcendentais, não alternativa mais complementar, são as equações diferenciais da física-matemática. A equação diferencial mais básica,  $dx/dt = x$ , define a função exponencial. Uma “rotação de Wick”, a substituição do tempo real  $t$  pelo tempo imaginário puro  $\tau = it$ , transforma a equação diferencial do exponencial em  $dx/d\tau = ix$ , ou seja, em  $d^2x/d\tau^2 = -x$ , que é a equação do oscilador harmônico. Assim, o exponencial de uma variável complexa descreve/contém também os fenômenos oscilatórios elementares, ou seja, as funções trigonométricas.

**Exponencial.** A função exponencial  $\exp(z)$ , ou  $e^z$ , é a (única) solução da equação diferencial

$$f' = f \tag{3.10}$$

com condição inicial  $f(0) = 1$ . A conjectura  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é solução formal de  $f' = f$  se os coeficientes satisfazem a equação recursiva  $na_n = a_{n-1}$ . O valor inicial  $f(0) = 1$  determina  $a_0 = 1$ , e portanto todos os coeficientes, que são  $a_n = 1/n!$ . Portanto, a solução formal é definida pela série de potências

$$e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots \tag{3.11}$$

É imediato verificar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |n!|^{1/n} = \infty$ . Portanto, pela fórmula de Hadamard (3.3), o raio de convergência da série (3.11) é  $R = \infty$ , e pelo teorema de Abel 3.8, o exponencial é uma função inteira.

Um cálculo mostra que a derivada da função inteira  $h(z) = e^{z+a}e^{-z}$  é  $h' = 0$ . Pelo teorema 2.8,  $h(z)$  é constante e igual a  $h(z) = h(0) = e^a$ . Isto implica, substituindo  $a$  com  $z+w$  e  $z$  com  $-w$ , que o exponencial satisfaz a “fórmula de adição”

$$e^{z+w} = e^z e^w. \tag{3.12}$$

(que, com a hipótese de derivabilidade, implica à sua vez a equação diferencial (3.10)). Em particular,  $e^z e^{-z} = 1$ , e portanto  $e^z \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . A função exponencial define um homomorfismo  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  do grupo aditivo  $\mathbb{C}$  no grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^\times$ .

Se  $x \in \mathbb{R}$ , então  $e^x$  é real e positivo, com derivada  $(e^x)' = e^x > 0$ . De fato,  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ , e a restrição do exponencial define uma bijeção crescente  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ .

A fórmula (3.11) mostra que o conjugado de  $e^z$  é  $e^{\bar{z}}$ . Em particular, se  $t \in \mathbb{R}$ , então o conjugado de  $e^{it}$  é  $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ . Consequentemente,  $|e^{it}|^2 = e^{it}e^{-it} = 1$ , e portanto o exponencial envia o eixo imaginário na circunferência unitária, i.e.  $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$ . Observe também que a fórmula de adição então implica que  $|e^{x+iy}| = e^x$ . É possível então definir as funções reais de uma variável real “cos” e “sin” usando a fórmula de Euler (ao contrário)

$$\cos(t) + i \sin(t) := e^{it}, \tag{3.13}$$

quando  $t \in \mathbb{R}$ . Finalmente, se  $z = x + iy$ ,

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

A equação diferencial (3.10) que define o exponencial implica que  $\cos' = -\sin$  e  $\sin' = \cos$ . A unitariedade  $|e^{it}| = 1$  implica a identidade trigonométrica  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ .

A função complexa de uma variável real  $t \mapsto e^{it}$  é uma função periódica da reta real sobre a circunferência unitária (umas demonstrações estão em [Ah78, Ru87]). A prova consiste em procurar o primeiro zero da função  $\cos(t)$  quando  $t \geq 0$ , e observar que neste ponto  $t_0$ , onde  $\cos(t_0) = 0$  e portanto  $\sin(t_0) = 1$ , acontece que  $e^{it_0} = i$ . Então,  $e^{4it_0} = 1$ , ou seja,  $4t_0$  é um período da função  $e^{it}$ , e portanto também de  $\cos(t)$  e  $\sin(t)$ . Em particular, se definimos  $2\pi := 4t_0$ ,

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

O número  $i2\pi$  é também um período de  $e^z$ , ou seja,

$$e^{z+2\pi in} = e^z \quad \text{se } n \in \mathbb{Z}.$$

Então o exponencial  $z \mapsto w = e^z$  envia a faixa  $F = \{-\pi < \Im(z) \leq \pi\}$  sobre  $\mathbb{C}^\times$ , as imagens das retas  $\Re(z) = c$  sendo as circunferências  $|w| = e^c$ , e as imagens das retas  $\Im(z) = d$  sendo as semiretas  $\text{Arg}(z) = d$ . A imagem inversa de um ponto  $w = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$  é um conjunto numerável de pontos do plano complexo que diferem por múltiplos inteiros de  $2\pi i$ , ou seja, o conjunto dos pontos  $z = \log \rho + i(\theta + 2\pi n)$  com  $n \in \mathbb{Z}$ .

Em particular, a restrição  $t \mapsto e^{2\pi it}$  é um homomorfismo do grupo abeliano aditivo  $\mathbb{R}$  sobre o grupo abeliano multiplicativo  $\mathbb{S}$ , a circunferência unitária do plano complexo. O núcleo deste homomorfismo é o subgrupo  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ . Assim, a circunferência unitária  $\mathbb{S}$  é naturalmente isomorfa, enquanto grupo abeliano, ao espaço quociente  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , chamado *toro* de dimensão um.

**Funções trigonométricas e hiperbólicas.** Em geral, as *funções trigonométricas* complexas são definidas por

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

e

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Estas funções estendem as funções trigonométricas  $\cos(\theta)$  e  $\sin(\theta)$  a valores complexos do argumento. Também, resolvem a equação diferencial do oscilador harmónico  $\ddot{x} = -x$ , i.e.

$$\cos'' = -\cos \quad \sin'' = -\sin$$

com condições iniciais  $\cos(0) = 1$  e  $\cos'(0) = 0$ , e  $\sin(0) = 0$  e  $\sin'(0) = 1$ , respetivamente. Estão relacionadas pela identidade trigonométrica

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

e pelas fórmulas

$$\cos' = -\sin \quad \sin' = \cos.$$

As *funções hiperbólicas* são definidas por

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

e

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

e resolvem a equação diferencial do oscilador harmónico invertido  $\ddot{x} = x$ , i.e.

$$\cosh'' = \cosh \quad \sinh'' = \sinh$$

com condições iniciais  $\cosh(0) = 1$  e  $\cosh'(0) = 0$ , e  $\sinh(0) = 0$  e  $\sinh'(0) = 1$ , respetivamente. Estão relacionadas pela identidade hiperbólica

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

e pelas fórmulas

$$\cosh' = \sinh \quad \sinh' = \cosh .$$

As funções trigonométrica e hiperbólicas estão relacionadas por uma “rotação de Wick”, ou seja,  $\sin(z) = \sinh(iz)$  e  $\cos(z) = \cosh(iz)$ . Assim, até agora existe apenas uma função transcendente elementar, o exponencial, as outras sendo obtidas ao fazer somas, produtos e quocientes, e mudanças de coordenadas elementares.

**Oscilações.** A função  $t \mapsto z(t) = e^{i\omega t}$  descreve um ponto que percorre a circunferência unitária  $\mathbb{S}$  do plano complexo no sentido anti-horário com “frequência angular”  $\omega > 0$ , i.e. uma rotação cada período  $T = 2\pi/\omega$ , e portanto frequência  $\nu = \omega/(2\pi)$  (medida em Hertz, rotações por segundo). Satisfaz as equações diferenciais lineares

$$\dot{z} = i\omega z \quad \text{e} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z .$$

Em particular, a parte real (e também a parte imaginária) de  $z(t) = \alpha e^{i\omega t}$ , com  $\alpha = Ae^{i\varphi}$ ,

$$q(t) = \Re [z(t)] = A \cos(\omega t + \varphi)$$

é uma solução (real) do oscilador harmônico  $\ddot{q} = -\omega^2 q$ .

**Mais uma fórmula de Euler.** A equação diferencial  $f' = f$ , que define o exponencial, pode também ser resolvida numericamente. Por simplicidade, consideramos o problema de aproximar o valor de  $e^x$  com  $x$  real, e positivo. A ideia de Euler (o método mais simples para resolver numericamente equações diferenciais) consiste em dividir o intervalo  $[0, x]$  em  $n$  sub-intervalos de igual comprimento  $\varepsilon = x/n$ , pequeno, por meio dos pontos  $x_k = kx/n$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Os valores de  $f$  nestes pontos são obtidos por recursão, usando a aproximação linear

$$f(x_{k+1}) \simeq f(x_k) + f'(x_k) \cdot \varepsilon$$

e a equação diferencial, que diz que  $f'(x_n) = f(x_n)$ . A condição inicial  $f(0) = 1$  então implica

$$f(x_1) \simeq (1 - \varepsilon) \quad f(x_2) \simeq (1 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon) \cdot \varepsilon = (1 - \varepsilon)^2 \quad \dots \quad f(x_n) \simeq (1 - \varepsilon)^n$$

É natural esperar que o verdadeiro valor de  $e^x$ , ou em geral de  $e^z$  com  $z \in \mathbb{C}$ , seja obtido passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$ . Esta é mais uma famosa *fórmula de Euler*

$$\boxed{e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n} \quad (3.14)$$

Esta fórmula diz que, moralmente, “o exponencial é um polinômio com uma única raiz de ordem  $\infty$  no ponto  $\infty$ ”, ou seja, entre muitas outras,

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{\infty}\right)^{+\infty}$$

(onde o  $\infty$  no denominador deve ser pensado como o ponto  $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ , e o  $+\infty$  no expoente é a multiplicidade da raiz, ou seja, o grau, de  $e^z$  em  $z = \infty$ )

**ex:** Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ .

**ex:** Calcule

$$\cos(i) \quad \sin(i) \quad \sin(1+i)$$

**ex:** Resolva

$$e^z = 2 \quad \cos(z) = 2 \quad \sin(z) = 2$$

**ex:** Use a fórmula de Euler (3.13) e a fórmula de adição (3.12) para provar as fórmulas de adição trigonométricas

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) \mp \sin(\theta) \sin(\phi)$$

e

$$\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \sin(\phi) \pm \sin(\theta) \cos(\phi).$$

**ex:** Deduza fórmulas de adição para  $\cosh(z)$  e  $\sinh(z)$ .

## 4 Integração complexa e teorema de Cauchy

### 4.1 Integral de Riemann e aproximação

Pode ser útil, a esta altura, lembrar rapidamente a construção do integral de Riemann, o único que será utilizado nestas notas, e os teorema de aproximação que permitem “substituir” as funções integráveis por funções contínuas ou até infinitamente deriváveis.

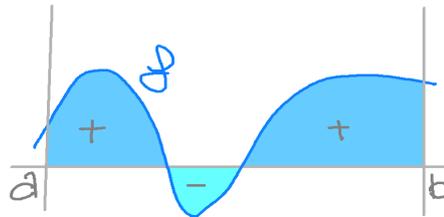
**Funções escada e partições.** A função característica de um intervalo limitado  $I$  da reta real, por exemplo  $[a, b]$  (mas não interessa se fechado ou aberto) é a função que vale  $\chi_I(x) = 1$  se  $x \in I$  e  $\chi_I(x) = 0$  se  $x \notin I$ . O “integral” da função  $\alpha\chi_I(x)$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , é a área, com sinal, do retângulo de base  $I$  e altura  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha \cdot |I| = \alpha \cdot (b - a)$ .

As *funções escada* são as combinações lineares finitas de funções características de intervalos limitados (não necessariamente disjuntos), e os seus “integrais” são definidos por lineardade:

$$\int \sum_k \alpha_k \chi_{I_k}(x) dx := \sum_k \alpha_k \cdot |I_k|$$

Uma *partição* do intervalo limitado  $[a, b]$  é uma coleção finita de pontos  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ , ordenados de acordo com  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ , que dividem o intervalo em um número finito de sub-intervalos  $[x_k, x_{k+1}]$ . É claro que a cada função escada  $f(x)$ , definida (ou suportada) no intervalo  $[a, b]$ , corresponde uma partição minimal  $P$  tal que  $f(x)$  é constante em cada sub-intervalo  $(x_k, x_{k+1})$  (e os valores nos pontos  $x_k$ 's não interessam).

**Somas de Darboux.** Dada uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , o objetivo é definir, se possível, a área com sinal da região do plano  $x$ - $y$  limitada entre o gráfico  $y = f(x)$ , o eixo dos  $x$ , e as linhas verticais  $x = a$  e  $x = b$ . Se  $f(x)$  é um campo de forças, dependente da posição  $x$ , então o seu integral será o trabalho feito para deslocar uma partícula de prova da posição  $a$  até a posição  $b$ .



Dada uma partição  $P$  de  $[a, b]$ , sejam  $m_k$  e  $M_k$  o mínimo e o máximo da função  $f(x)$  em cada sub-intervalo  $P_k = [x_k, x_{k+1}]$ . As *somas superiores* e as *somas inferiores* de  $f$  relativamente a partição  $P$  são os integrais

$$s(f; P) := \int_a^b \sum_k m_k \chi_{P_k}(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot |P_k|$$

e

$$S(f; P) := \int_a^b \sum_k M_k \chi_{P_k}(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot |P_k|,$$

respetivamente. É claro que a área procurada, se existir, está entre  $s(f; P) \leq \text{“área”} \leq S(f; P)$ , e de fato a diferença entre somas superiores e somas inferiores, se a partição contém muitos pontos, é uma medida do “comprimento” do gráfico de  $f$ . É também evidente que se a partição  $P'$  “refina” a partição  $P$ , ou seja, se  $P \subset P'$ , então  $s(f; P) \leq s(f; P')$  e  $S(f; P') \leq S(f; P)$ . Em particular temos que  $s(f; P) \leq S(f; Q)$  para todas as partições  $P$  e  $Q$  (basta considerar a partição  $P \cup Q$  na observação anterior).

**Integral de Riemann/Darboux.** Uma função  $f(x)$ , definida e limitada no intervalo  $[a, b]$ , é dita *Riemann integrável* se existir um único número  $A$  tal que

$$s(f; P) \leq A \leq S(f; Q)$$

para todas as partições  $P$  e  $Q$  do intervalo. Equivalentemente, se  $\sup_P s(f; P) = A = \inf_P S(f; P)$ . Equivalentemente, se para cada precisão  $\varepsilon > 0$  é possível encontrar duas partições  $P$  e  $Q$  tais que  $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ , logo uma partição  $R$  (por exemplo  $R = P \cup Q$ ) tal que  $S(f; R) - s(f; R) < \varepsilon$ . Equivalentemente, se para cada precisão  $\varepsilon > 0$  é possível encontrar funções escada  $s \leq f$  e  $S \geq f$  tais que

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b s(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Se isto acontecer, o número  $A$  é chamado “integral (de Riemann) de  $f(x)$  em  $[a, b]$ ”, e denotado por

$$A =: \int_a^b f(x) dx.$$

**Funções integráveis.** Determinar o espaço maximal das funções integráveis não é elementar. Basta saber que são integráveis as funções seccionalmente contínuas ou as funções seccionalmente monótonas, de acordo com os seguintes resultados.

**Teorema 4.1.** *Toda função contínua  $f(x)$  definida num intervalo fechado e limitado  $[a, b]$  é integrável.*

*Demonstração.* Pelo teorema de Cantor 2.7,  $f(x)$  é uniformemente contínua. Portanto, para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $|x - x'| < \delta$  implica  $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon/(b - a)$ . Consequentemente, se  $P$  é uma partição de  $[a, b]$  em  $n$  sub-intervalos de comprimentos limitados por  $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ , então  $S(f, P) - s(f, P) \leq n \cdot \delta \cdot \varepsilon/(b - a) \leq \varepsilon$ .  $\square$

É claro que é também integrável uma função limitada e seccionalmente contínua, ou seja, com apenas um número finito de descontinuidades (basta repetir o argumento em cada sub-intervalo onde a função é contínua, e depois escolher partições contendo os pontos de descontinuidade).

**Teorema 4.2.** *Toda função monótona  $f(x)$  definida num intervalo fechado e limitado  $[a, b]$  é integrável.*

*Demonstração.* Se  $f(a) = f(b)$  então a função é necessariamente constante, logo trivialmente integrável. Podemos então assumir que  $f(x)$  é não crescente e que  $f(a) < f(b)$  (caso contrário, consideramos  $-f(x)$ ). Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Se  $P$  é uma partição de  $[a, b]$  em  $n$  sub-intervalos de comprimentos limitados por  $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon/(f(b) - f(a))$ , então, como  $m_k = f(x_k)$  e  $M_k = f(x_{k+1})$ , temos

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \leq \varepsilon,$$

porque a soma  $\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))$  é telescópica, logo igual a  $f(b) - f(a)$ .  $\square$

**Somas de Riemann.** A definição do integral de Riemann não é prática se queremos calcular, ou pelo menos aproximar, o seu valor. Melhor é usar a ideia da “amostragem”. Fixado um inteiro  $n$ , podemos dividir o intervalo em  $n$  sub-intervalos de comprimentos iguais, ou seja, considerar a partição  $P_n$  definida por  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  com  $\delta = x_{k+1} - x_k = (b - a)/n$ . Então é natural aproximar o integral com as *somas Riemann*

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{k=1}^n f(x_k) (x_k - x_{k-1}),$$

onde o valor  $f(x_k)$  pode ser substituído por qualquer outro valor  $f(t_k)$  com  $t_k \in [x_k, x_{k-1}]$ . É claro que as somas de Riemann estão entre  $s(f; P_n)$  e  $S(f; P_n)$ . Argumentando como nas provas dos teoremas 4.1 e 4.2, é fácil ver que as somas de Riemann de uma função contínua ou monótona convergem para o seu integral quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Propriedades elementares.** As seguintes propriedades elementares são óbvias para funções escada, e portanto são herdadas pelo integral de Riemann de forma natural. O integral de Riemann é linear na função  $f$ . Também é claro que  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ , se  $a < c < b$ . Se definimos  $\int_a^a f(x) dx := 0$  e  $\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$ , então a fórmula anterior também é válida para todos  $a, b, c$ , independentemente da ordem.

O integral é claramente monótono, ou seja, se  $f(x) \leq g(x)$  então  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ . Em particular, integrais de funções não negativas são não negativos. Também, se  $m \leq f(x) \leq M$  então o seu integral está entre

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (4.1)$$

Em particular,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (4.2)$$

Uma consequência importante é o

**Teorema 4.3** (teorema do valor médio). *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então existe um ponto  $c \in [a, b]$  onde*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$

*Demonstração.* Sejam  $m$  e  $M$  o mínimo e o máximo de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , respectivamente. pela (4.1), existe um valor intermédio  $m \leq d \leq M$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = d \cdot (b-a)$ . Pela continuidade de  $f(x)$  (ou seja, pelo teorema de Bolzano), existe um ponto  $c \in [a, b]$  onde  $f(c) = d$ .  $\square$

O valor do integral  $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$  deve ser considerado a “média” de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ . Logo o teorema diz que uma função contínua atinge o seu valor médio.

**Teorema fundamental do cálculo.** Na prática, como todos aprendem num curso de Cálculo, o instrumento para calcular integrais de funções suficientemente simples é o *teorema fundamental do cálculo* de Newton e Leibniz, logo a fórmula de Barrow.

**Teorema 4.4** (teorema fundamental do cálculo). *Seja  $f(x)$  uma função contínua definida no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Dado um ponto  $a \in I$ , seja  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  se  $x \in I$ . Então  $F(x)$  é derivável, e a sua derivada é  $F'(x) = f(x)$ , ou seja,*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

*Demonstração.* A diferença  $F(x+\delta) - F(x)$  é igual ao integral  $\int_x^{x+\delta} f(t) dt$ . Portanto

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} - f(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} (f(t) - f(x)) dt. \quad (4.3)$$

Se  $f(x)$  é contínua no ponto  $x$  (apenas neste ponto!), então para cada  $\varepsilon > 0$  é possível escolher um  $\delta > 0$  tal que  $|t-x| < \delta$  implica  $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ . Pelas desigualdades (4.2), o valor absoluto do segundo membro da (4.3) é limitado  $\frac{1}{\delta} \varepsilon \delta = \varepsilon$ . Consequentemente,  $(F(x+\delta) - F(x))/\delta \rightarrow f(x)$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .  $\square$

Uma função derivável  $F(x)$  é chamada *primitiva* da função contínua  $f(x)$  se  $F'(x) = f(x)$  para cada  $x$  num intervalo onde as duas estão definidas.

Uma primitiva da função contínua  $f(x)$  é, de acordo com o teorema fundamental do cálculo 4.4,  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Se  $F(x)$  é uma outra primitiva, então a diferença  $F(x) - G(x)$  tem derivada nula, logo é constante, pelo teorema do valor médio. Portanto existe uma constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = G(x) + c$ . Em particular, se tomamos  $x = a$  e depois  $x = b$ , descobrimos que  $F(a) = c$ , pois  $G(a) = 0$ , e  $F(b) = G(b) + c$ , assim que  $G(b) = F(b) - F(a)$ . Consequentemente, uma receita para calcular integrais é a seguinte.

**Teorema 4.5** (fórmula de Barrow). *Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , então*

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}. \quad (4.4)$$

**Aproximação de funções integráveis.** As funções integráveis podem ser aproximadas com precisão arbitrária por funções contínuas, ou até infinitamente diferenciáveis, no seguinte sentido.

**Teorema 4.6.** *Seja  $f(x)$  uma função integrável e limitada por  $|f(x)| \leq M$  num intervalo  $[a, b]$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma função contínua  $\psi(x)$ , também limitada por  $|\psi(x)| \leq M$ , tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx \leq \varepsilon$$

*Demonstração.* Pela própria definição de integral de Riemann, para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon/2$ . Consequentemente, existe uma função escada  $\varphi(x)$  tal que

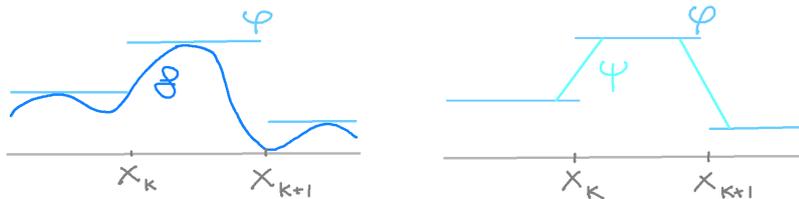
$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \varepsilon/2$$

Podemos assumir que esta função escada também é limitada por  $|\varphi(x)| \leq M$ , pois basta escolher uma partição  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  mais fina de  $P$ , e definir  $\varphi(x) = \sup_{t \in [x_k, x_{k+1}]} f(t)$  em cada sub-intervalo.

A função escada  $\varphi(x)$  pode ser aproximada por uma função contínua  $\psi(x)$ , também limitada por  $|\psi(x)| \leq M$ , de maneira tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) - \psi(x)| dx \leq \varepsilon/2$$

Basta substituir os saltos por funções afins definidas em vizinhanças suficientemente pequenas dos pontos de descontinuidade, como na figura.



Pela desigualdade do triângulo,

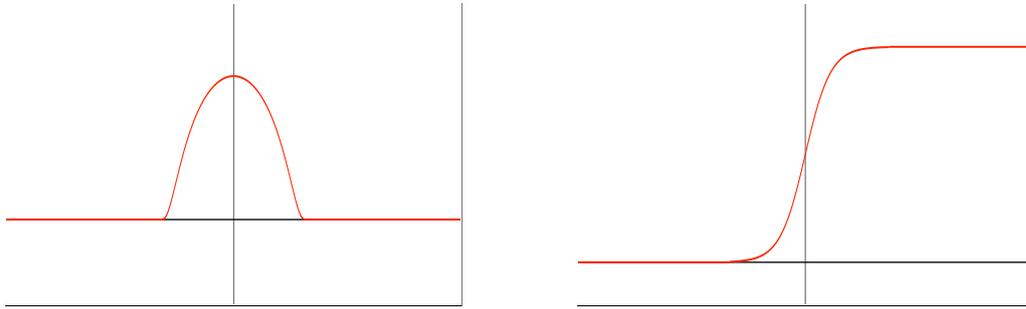
$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \int_a^b |\varphi - \psi(x)| dx \leq \varepsilon$$

□

De fato, a ligação entre dois valores sucessivos de uma função escada pode ser feita por meio de uma função infinitamente derivável com suporte num intervalo arbitrariamente pequeno em torno do ponto de descontinuidade. Por exemplo, a função  $b(x)$ , definida por

$$b(x) := e^{1/(1-x^2)}$$

se  $|x| < 1$  e nula fora deste intervalo (chamada *bump function* em inglês), é infinitamente diferenciável e não negativa. A sua primitiva  $B(x) := \int_{-\infty}^x b(y) dy$  é então uma função infinitamente diferenciável e não decrescente que vale  $B(x) = 0$  se  $x \leq -1$  e  $B(x) = \int_{-1}^1 b(x) dx =: \gamma$  se  $x \geq 1$ .



Então uma função do género  $\alpha + \beta B(x/\delta)/\gamma$  é uma função infinitamente derivável que faz um salto entre  $\alpha$  e  $\beta$  crescendo apenas num intervalo de raio  $\delta$  em torno da origem. Escolhendo oportunamente os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , é claro que é possível aproximar arbitrariamente bem as funções escada  $\varphi(x)$  da prova do teorema 4.6 com funções infinitamente deriváveis.

## 4.2 Integrais de contorno

Os integrais de linha da física-matemática, que calculam, por exemplo, um trabalho, generalizam como integrais de contorno de uma função complexa. Se uma função complexa admite uma primitiva, ou seja, é a derivada complexa de uma função holomorfa, então os seus integrais de contorno podem ser calculados usando o teorema fundamental do cálculo, como no caso real.

**Contornos.** Um caminho na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é uma função contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ . É definido por uma equação paramétrica  $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ , onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções contínuas definidas para tempos  $t \in [a, b]$ . A derivada/velocidade do caminho  $\gamma$  é a função  $\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , definido pela equação paramétrica

$$t \mapsto \dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$$

nos pontos onde as derivadas de  $x(t)$  e  $y(t)$  existem. Um caminho com derivada contínua (e limites laterais  $\dot{\gamma}(a^+)$  e  $\dot{\gamma}(b^-)$  finitos nos extremos) e com velocidade  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  para todos os tempos  $t \in [a, b]$  é chamado *regular* (em inglês, *smooth*).

Um *contorno* é uma justaposição  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$  de um número finito de caminhos regulares. Em outras palavras, é um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  tal que é possível dividir  $[a, b]$  em um número finito de sub-intervalos  $[t_k, t_{k+1}]$  onde o caminho tem derivada contínua e não nula com limites laterais finitos e também não nulos.

**Comprimento.** O *comprimento* do contorno  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é o integral

$$|\gamma| := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

O comprimento de um contorno é independente da parametrização. De fato,

$$\int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_c^d \left| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right| d\tau = \int_c^d \left| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} \right| d\tau.$$

Uma definição alternativa do comprimento, válida para caminhos não necessariamente diferenciáveis, é o  $\sup \sum_{k=0}^n |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|$  sobre todas as partições  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  do intervalo  $[a, b]$  em um número finito de sub-intervalos.

**Segmentos e linhas quebradas.** O caminho  $z(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ , com  $t \in [0, 1]$ , descreve o segmento  $[\alpha, \beta]$  de  $z(0) = \alpha$  até  $z(1) = \beta$ , percorrido com velocidade constante  $\dot{z}(t) = \beta - \alpha$ .

Uma justaposição de um número finito de segmentos  $[\alpha_k, \beta_k]$ , com  $k = 0, 1, \dots, n$ , e  $\alpha_{k+1} = \beta_k$  se  $1 \leq k \leq n-1$ , parametrizados com velocidade constante (por exemplo, segmentos horizontais e verticais) é chamada *contorno poligonal* (ou *linha quebrada*). O seu comprimento é  $\sum_k |\beta_k - \alpha_k|$ , a soma dos comprimentos dos segmentos que formam o caminho.

26 out 2020

**Circunferências.** O caminho  $z(t) = p + \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , descreve a circunferência  $S_\rho(p)$  de raio  $\rho > 0$  centrada no ponto  $p$ , percorrida no sentido anti-horário. A sua velocidade é  $\dot{z}(t) = i\rho e^{it}$ , que é um “vetor” tangente à circunferência no ponto  $z(t)$ . O comprimento da circunferência é, naturalmente,  $2\pi\rho$ .

**Integrais de contorno.** Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  um contorno e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua (não necessariamente holomorfa!) definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  contendo a curva  $\gamma([a, b])$ . O “integral da função  $f$  ao longo do contorno  $\gamma$ ” é o número complexo definido pelo integral de Riemann

$$\int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

(observe que a função  $f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$  é seccionalmente contínua, logo Riemann integrável)

Se  $\gamma$  é um contorno fechado, i.e.  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , então é usada a notação

$$\oint_\gamma f(z) dz$$

O integral de contorno não depende da parametrização, mas apenas da orientação do contorno. De fato, se  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é diferenciável, com derivada  $dt/d\tau > 0$ , e se  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \Omega$  é o contorno  $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t(\tau))$ , então

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_c^d f(\tilde{\gamma}(\tau)) \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} d\tau = \int_c^d f(\gamma(t(\tau))) \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_\gamma f(z) dz \end{aligned}$$

É também evidente que integral de contorno é aditivo, ou seja, o integral ao longo de uma justaposição  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ , é igual a soma

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz$$

Em particular, não depende da parametrização de cada  $\gamma_k$ .

Por outro lado, ao mudar a orientação do contorno, acontece que

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_\gamma f(z) dz$$

Em particular, o integral ao longo do contorno  $\gamma + (-\gamma)$  (ou seja, a curva  $\bar{\gamma}$  percorrida num sentido e depois no sentido oposto) é nulo.

**Integral ao longo de um segmento.** Por exemplo, o integral de  $f(z)$  ao longo do segmento  $[\alpha, \beta]$ , parametrizado por  $z(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$  com  $t \in [0, 1]$ , é

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(z) dz = (\beta - \alpha) \int_0^1 f(\alpha + t(\beta - \alpha)) dt$$

Em particular, se  $f(z) = c$  é constante, este integral vale

$$\int_{[\alpha, \beta]} c dz = \int_0^1 c(\beta - \alpha) dt = c(\beta - \alpha).$$

Se  $f(z) = \lambda z$  é linear, então este integral vale

$$\int_{[\alpha, \beta]} \lambda z dz = \lambda \int_0^1 (\alpha + t(\beta - \alpha))(\beta - \alpha) dt = \lambda \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2},$$

É claro que, se  $\alpha = \beta$ , ou seja, se o contorno é o contorno trivial reduzido a um ponto, então o integral é nulo, independentemente do valor da função no ponto.

**Integral ao longo de uma circunferência.** O integral de  $f(z)$  ao longo da circunferência  $S_\rho(p)$ , parametrizada por  $z(t) = p + \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , é

$$\oint_{|z-p|=\rho} f(z) dz = i\rho \int_0^{2\pi} f(p + \rho e^{it}) e^{it} dt$$

**Aproximação, estimação e consequências.** A restrição de uma função contínua  $f(z)$  a uma curva  $\bar{\gamma}$ , que é compacta, é uniformemente contínua. Portanto, se  $P$  é uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  do intervalo  $[a, b]$  em um número finito de sub-intervalos de comprimento limitado por  $|P| := \sup_k |t_{k+1} - t_k|$ , e se os  $z_k = \gamma(t_k)$ 's são os correspondentes pontos de  $\gamma$ , então

$$\int_\gamma f(z) dz = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k f(z_k) (z_{k+1} - z_k)$$

Isto significa que é possível aproximar  $\int_\gamma f dz$ , com precisão arbitrária, pelo integral ao longo de uma linha quebrada. Ou seja, para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma linha quebrada  $\ell$ , com vértices em  $\gamma$ , tal que

$$\left| \int_\gamma f dz - \int_\ell f dz \right| < \varepsilon.$$

Em particular,

**Teorema 4.7.** Se o valor absoluto da função contínua  $f(z)$  é limitado por  $M$  nos pontos de  $\bar{\gamma}$ , e  $|\gamma|$  denota o comprimento do contorno  $\gamma$ , então

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq M |\gamma|. \quad (4.5)$$

Uma consequência importante é que o limite uniforme comuta com o integral, ou seja,

**Teorema 4.8.** Se  $(f_n)$  é uma sucessão de funções contínuas definidas na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que converge uniformemente para a função (contínua)  $f$ , e se  $\gamma$  é um contorno em  $\Omega$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz.$$

*Demonstração.* Pela desigualdade (4.5),

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f_n dz - \int_\gamma f dz \right| &= \left| \int_\gamma (f_n - f) dz \right| \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty |\gamma| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . □

Em particular, se a série de funções contínuas  $\sum_n f_n(z)$  converge uniformemente (numa região que contém a curva  $\bar{\gamma}$ ), então é possível trocar a ordem de soma e integral, ou seja,

$$\int_\gamma \left( \sum_n f_n(z) \right) dz = \sum_n \int_\gamma f_n(z) dz.$$

**Integrais dependendo de parâmetros.** Outra consequência importante é a possibilidade de “derivar em ordem a um parâmetro dentro do um integral”. Seja  $f(z, t)$  uma função contínua das duas variáveis  $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$  e  $t \in (a, b)$  (ou num aberto de um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ). Seja  $\gamma : [c, d] \rightarrow \Omega$  um contorno. A função

$$F(t) = \int_\gamma f(z, t) dz$$

é um integral que depende do parâmetro  $t$ . É claro, pela compacidade da curva  $\gamma$ , que  $F(t)$  é uma função contínua de  $t$ .

**Teorema 4.9** (regra de Leibniz). *Seja  $f(z, t)$  uma função contínua das duas variáveis  $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$  e  $t \in (a, b)$ , com derivada parcial contínua  $(\partial f / \partial t)(z, t)$ . Se  $\gamma$  é um contorno em  $\Omega$ , então o integral de contorno  $\int_{\gamma} f(z, t) dz$  é derivável em ordem a  $t$ , e a sua derivada é*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\gamma} f(z, t) dz = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) dz}$$

para todo  $t \in (a, b)$ .

*Demonstração.* Fixados  $t \in (a, b)$  e  $h > 0$  suficientemente pequeno, pelo teorema do valor médio e a linearidade do integral,

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_{\gamma} \frac{f(z, t+h) - f(z, t)}{h} dz = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial t}(z, t+\theta) dz$$

onde  $\theta = \theta(z, h) \in [0, h]$ , e portanto

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) dz = \int_{\gamma} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(z, t+\theta) - \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) \right) dz$$

Pela continuidade de  $(\partial f / \partial t)(z, t)$  e a compacidade da curva  $\bar{\gamma}$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $h < \delta$  então

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(z, t+\theta) - \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) \right| \leq \sup_{|t-t'| < \delta} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(z, t') - \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) \right| < \varepsilon / |\gamma|$$

para todo  $z \in \gamma$ . Então, pelo teorema 4.5,

$$\left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) dz \right| \leq \varepsilon.$$

O teorema segue pela arbitrariedade de  $\varepsilon$ .  $\square$

A regra de Leibniz também se aplica às derivadas parciais de funções dependentes de mais parâmetros.

**Covariância, ou mudança de variável.** A leitura correcta (mas não utilizada!) de  $\int_{\gamma} f(z) dz$  é “integral da forma  $f(z) dz$  ao longo do contorno  $\gamma$ ”, devido à seguinte “covariância”, ou regra de “mudança de variável”. Seja  $g : \Omega' \rightarrow \Omega$  uma função holomorfa com derivada contínua (esta hipótese é desnecessária, pois mostraremos que as funções holomorfas são infinitamente deriváveis!), que envia  $z \mapsto \zeta = g(z)$ . Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega'$  um contorno, e  $g^* \gamma := g \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  o contorno imagem. Então, se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua,

$$\int_{g^* \gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_a^b f(g(\gamma(t))) g'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) g'(z) dz$$

e portanto, na notação de Leibniz,

$$\boxed{\int_{g^* \gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta(z)) \frac{d\zeta}{dz} dz} \quad (4.6)$$

Ou seja, o integral da forma  $f(\zeta) d\zeta$  ao longo do contorno imagem  $g^* \gamma$  é igual ao integral da forma “pull-back”  $g_*(f(z) dz) := (f \circ g) g'(z) dz$ , obtida ao substituir  $\zeta$  por  $g(z)$  e  $d\zeta$  por  $g'(z) dz = \frac{d\zeta}{dz} dz$ , ao longo do contorno  $\gamma$ .

**ex:** Calcule, se possível,

$$\int_{\gamma} z dz \quad \int_{\gamma} (i - z^2) dz \quad \int_{\gamma} x dz \quad \int_{\gamma} z^n dz \quad \int_{\gamma} \bar{z} dz$$

quando  $\gamma$  é o segmento  $t \mapsto t(3+i)$ , com  $t \in [0, 1]$ , quando  $\gamma$  é o arco de parábola  $t \mapsto t + it^2$ , com  $t \in [-1, 1]$ , quando  $\gamma$  é o arco de circunferência  $\theta \mapsto re^{i\theta}$ , com  $\theta \in [0, \pi]$  e  $r > 0$ , e quando  $\gamma$  é a espiral  $t \mapsto e^{(i-1)t}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ .

**ex:** Calcule (as circunferências são orientadas positivamente e parametrizada da forma natural: a circunferência  $|z - a| = \rho$  é a imagem de  $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ )

$$\oint_{|z|=3} z^2 dz \quad \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1} \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \quad \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z-i}.$$

**Primitivas.** A função holomorfa  $F \in \mathcal{O}(\Omega)$  é dita *primitiva* da função contínua  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$  se  $F'(z) = f(z)$  (nos pontos da região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  onde estão definidas).

É imediato calcular que, se  $F' = f$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é um contorno de  $\gamma(a) = \alpha$  até  $\gamma(b) = \beta$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha) \quad (4.7)$$

Ou seja,  $\int_{\gamma} f dz$  apenas depende dos pontos inicial e final de  $\gamma$ . De fato, se  $G(t) := F(\gamma(t))$ , então a fórmula de Barrow 4.5 implica que

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a).$$

Esta fórmula generaliza a fórmula de Barrow, ou seja, o teorema fundamental do cálculo de Newton e Leibnitz. Em particular,

**Teorema 4.10.** *Uma função contínua  $f(z)$  admite uma primitiva  $F(z)$  em uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  sse*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para todos os contornos fechados  $\gamma$  em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Se  $f(z)$  admite uma primitiva em  $\Omega$ , então os integrais de contorno são nulos cada vez que o ponto final é igual ao ponto inicial, pela (4.7).

Vice-versa, fixamos um ponto  $p \in \Omega$ , e definimos, para cada ponto  $z \in \Omega$ ,

$$F(z) = \int_p^z f(\zeta) d\zeta := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

onde  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  é um caminho arbitrário de  $\gamma(0) = p$  até  $\gamma(1) = z$  (que existe porque uma região é conexa por arcos). Este integral apenas depende dos pontos  $p$  e  $z$ , e não do contorno escolhido. De fato, se  $\eta$  é um outro contorno de  $p$  até  $z$ , então  $\gamma - \eta$  é um contorno fechado, logo  $\int_{\gamma - \eta} f(z) dz = 0$ , e portanto  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(z) dz$ . A diferença  $F(z+w) - F(z)$ , se  $|w|$  é suficientemente pequeno, é igual ao integral de  $f$  ao longo, por exemplo, do segmento  $t \mapsto z + tw$ , com  $t \in [0, 1]$ , ou seja,

$$F(z+w) - F(z) = \int_{[z, z+w]} f(\zeta) d\zeta = w \int_0^1 f(z+tw) dt.$$

Pela continuidade de  $f$ , este integral é igual a  $f(z)w + o(w)$ , e portanto  $F$  é derivável em  $z$  e a sua derivada é  $F'(z) = f(z)$ .  $\square$

**ex:** Usando a derivação de um produto, a mudança de variável (4.6) e a (4.7), verifique a seguinte fórmula de *integração por partes*: se  $f(z)$  e  $g(z)$  são holomorfas em  $\Omega$ , e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  é um contorno de  $\gamma(0) = \alpha$  até  $\gamma(1) = \beta$ , então

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z) dz = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\gamma} f'(z)g(z) dz$$

**ex:** Calcule

$$\int_{\gamma} e^z dz \quad \int_{\gamma} (z^3 - iz^2 + 7 - i) dz \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$$

quando  $\gamma$  é o contorno  $t \mapsto \sin(\pi t) + ie^t$ , com  $t \in [0, 1]$ .

**ex:** Calcule

$$\oint_{|z|=\rho} z^n dz \quad \oint_{|z|=\rho} e^z dz \quad \oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a}$$

**ex:** Mostre que se  $\gamma$  é o arco de circunferência  $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$  com  $t \in [\theta_1, \theta_2]$ , então

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = i(\theta_2 - \theta_1).$$

**ex:** Mostre que

$$\oint_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ i2\pi & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

**ex:** A função  $f(z) = 1/z$ , definida em  $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , admite primitivas? E  $f(z) = \bar{z}$ ?

### 4.3 Teorema de Cauchy-Goursat e primitivas locais

As funções holomorfas admitem primitivas locais.

**Campos conservativos e teorema de Green-Stokes.** O diferencial  $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$  é dito *exato* no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  se existe uma função  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , dita *primitiva*, tal que  $dU = pdx + qdy$ , ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = q.$$

Uma primitiva pode ser pensada como um *potencial* do campo de vetores  $\mathbf{F} := -\nabla U = -(p, q)$ . Se  $c$  é um valor regular de  $U$  (ou seja, se  $\nabla U \neq 0$  nos pontos onde  $U(x, y) = c$ ), então a curva de nível

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } U(x, y) = c\},$$

ortogonal ao campo de vetores  $\mathbf{F}$ , é uma solução implícita da *equação diferencial exata*

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0.$$

O *teorema de Euler-Poincaré* diz que

**Teorema 4.11** (Euler-Poincaré). *O diferencial  $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ , definido num domínio simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (por exemplo convexo) é exato se e só se é fechado, ou seja, se*

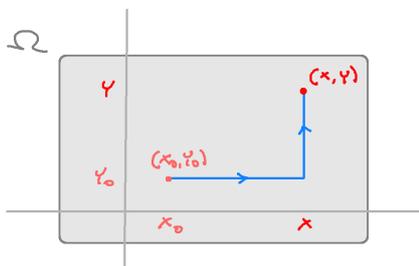
$$d\omega := \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0 \quad \text{ou seja, se} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Neste caso, um potencial é dado pelo integral de linha

$$U(x, y) = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um contorno entre um ponto fixado  $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0) \in \Omega$  e o ponto genérico  $\mathbf{r}(1) = (x, y)$ . Fisicamente,  $U(x, y)$  é trabalho feito pela força  $\mathbf{F}$  para deslocar uma partícula de prova do ponto  $(x_0, y_0)$  até ao ponto  $(x, y)$ . Por exemplo, se  $\Omega$  é um retângulo, é possível escolher um caminho horizontal de  $(x_0, y_0)$  até  $(x, y_0)$ , e depois um caminho vertical de  $(x, y_0)$  até  $(x, y)$ , e definir um potencial

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x p(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y q(x, t) dt.$$



Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  uma região do plano limitada por um contorno fechado simples  $\partial\Omega$ . Então o teorema de Green-Stokes diz que o integral  $\oint_{\partial\Omega} \omega$  ao longo da curva  $\partial\Omega$ , orientada positivamente, é igual ao integral  $\int_{\Omega} d\omega$ , ou seja,

**Teorema 4.12** (Green-Stokes). *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é uma região limitada pelo contorno fechado simples  $\partial\Omega$ , e  $pdx + qdy$  é uma forma diferencial com derivadas parciais contínuas em  $\Omega$ , então*

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} pdx + qdy = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy}$$

Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região limitada pelo contorno fechado simples  $\gamma$ . O integral de uma função contínua  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ao longo da fronteira  $\partial\Omega = \gamma$  é definido pelo integral de linha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} (u + iv) dx + (iu - v) dy,$$

Se  $f$  é holomorfa em  $\Omega$ , e assumimos também que  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  (esta é consequência da derivabilidade complexa, mas ainda não sabemos!), então as equações de Cauchy-Riemann (2.4) implicam o seguinte milagre:

$$\begin{aligned} d(fdz) &= d((u + iv)(dx + idy)) \\ &= d((u + iv)dx + (iu - v)dy) \\ &= \left( i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

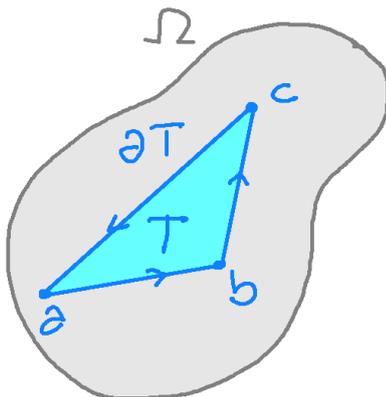
Pelo teorema de Green-Stokes 4.12, o integral de  $fdz$  ao longo de  $\partial\Omega$  é zero.

**Teorema de Cauchy-Goursat.** Os matemáticos andam muito orgulhosos de ter sido capazes de demonstrar o resultado anterior sem hipóteses adicionais sobre a continuidade das derivadas parciais da função. A demonstração, de Goursat, usa apenas a diferenciabilidade de  $f(z)$ , ou seja, a aproximação linear  $f(p + z) \simeq \alpha + \lambda z$ , válida para  $z$  pequenos, e o integral elementar

$$\oint_{\gamma} (\alpha + \lambda z) dz = 0$$

se  $\gamma$  é um contorno fechado. Também problemático é o significado de expressões como “região limitada pela curva” no próprio enunciado do teorema de Green-Stokes. Por esta razão, uma primeira versão costuma ser enunciada para regiões muito simples, como triângulos ou retângulo (a prova é essencialmente a mesma).

Um *triângulo*  $T = T(a, b, c)$  é o menor convexo que contém três pontos do plano,  $a, b, c$ . A sua fronteira  $\partial T$  é a justaposição dos segmentos  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  e  $[c, a]$ , nesta ordem.



**Teorema 4.13** (Cauchy-Goursat). *Se  $f(z)$  é holomorfa na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , e  $T \subset \Omega$  é um triângulo, então*

$$\boxed{\oint_{\partial T} f(z) dz = 0} \quad (4.8)$$

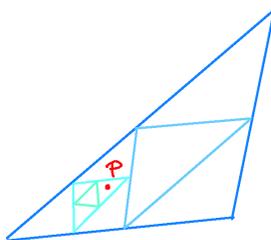
*Demonstração.* Seja  $|\oint_{\partial T} f(z) dz| = \eta$ . Os pontos médios dos lados dividem o triângulo  $T$  em 4 sub-triângulos, e a soma dos integrais de  $f$  ao longo destes 4 sub-triângulos é igual a  $\oint_{\partial T} f dz$ , por causa das cancelações nos lados comuns. Portanto, existe um destes sub-triângulos, que chamamos  $T_1$ , tal que

$$\left| \oint_{\partial T_1} f(z) dz \right| \geq \eta/4$$

Podemos iterar o processo, e construir a família decrescente de triângulos  $\dots \subset T_{n+1} \subset T_n \subset \dots$  tais que

$$\left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| \geq \eta/4^n$$

Se  $\ell$  é o diâmetro de  $T$  (i.e. o comprimento do lado maior), então o diâmetro dos  $T_n$  é  $\ell/2^n$ , que  $\rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja  $p \in T$  a interseção dos  $T_n$ 's (que existe pelo teorema de interseção de Cantor).



Como  $f(z)$  é holomorfa, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{f(z) - \alpha}{z - p} - \lambda \right| < \varepsilon \quad \text{logo} \quad |f(z) - \alpha - \lambda(z - p)| < \varepsilon |z - p|$$

se  $0 < |z - p| < \delta$ , onde  $\alpha = f(p)$  e  $\lambda = f'(p)$ . Se  $n$  é suficientemente grande, o triângulo  $T_n$  está contido no disco de raio  $\delta$  à volta de  $p$ . Como  $\oint_{\partial T_n} (\alpha + \lambda(z - p)) dz = 0$  (porque as funções afins têm primitivas),

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| &= \left| \oint_{\partial T_n} (f(z) - \alpha - \lambda(z - p)) dz \right| \\ &\leq \left| \oint_{\partial T_n} \varepsilon(z - p) dz \right| \end{aligned}$$

Neste último integral,  $|z - p|$  é limitado pelo diâmetro de  $T_n$ , que é  $\ell/2^n$ , e o comprimento (i.e. o perímetro) de  $\partial T_n$  é limitado por  $3\ell/2^n$ . Logo, pela desigualdade (4.5),

$$0 \leq \eta/4^n \leq \left| \oint_{\partial R_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon 3\ell^2/4^n$$

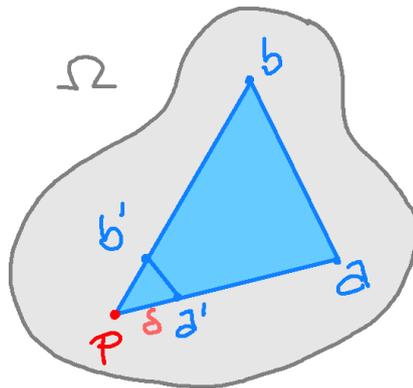
e portanto  $0 \leq \eta \leq 3\ell^2\varepsilon$ . A arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$  implica que  $\eta = 0$ .  $\square$

Será útil, para provar a fórmula integral de Cauchy, observar que o teorema continua válido com uma hipótese apenas (aparentemente) mais fraca.

**Teorema 4.14.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região e  $p \in \Omega$ . Seja  $f(z)$  é uma função contínua em  $\Omega$  e holomorfa em  $\Omega \setminus \{p\}$ . Então para todo triângulo  $T \subset \Omega$*

$$\oint_{\partial T} f(z) dz = 0$$

*Demonstração.* É claro que, a menos de dividir o triângulos em sub-triângulos, podemos assumir que  $p$  é um dos vértices de  $T = T(p, a, b)$ . Dado  $\delta > 0$ , sejam  $a'$  e  $b'$  pontos dos lados  $[p, a]$  e  $[p, b]$ , respetivamente, à distância  $\delta$  de  $p$ .



Então o integral de  $f(z)$  ao longo de  $\partial T$  é igual a soma

$$\oint_{\partial T} f(z) dz = \oint_{\partial T(p, a', b')} f(z) dz + \oint_{\partial T(a', a, b')} f(z) dz + \oint_{\partial T(a, b, b')} f(z) dz$$

Os últimos dois integrais são nulos pelo teorema 4.13. O primeiro integral é limitado por

$$\left| \oint_{\partial T(p, a', b')} f(z) dz \right| \leq 4\delta \cdot \sup_{|z-p| \leq \delta} |f(z)|$$

e portanto tende para zero quando  $\delta \rightarrow 0$ , pela continuidade de  $f(z)$ .  $\square$

Consequência imediata do teorema de Goursat 4.13 é que as funções holomorfas admitem sempre primitivas “locais”, ou seja, definidas em discos suficientemente pequenos.

**Teorema 4.15** (existência de primitivas locais). *Seja  $f(z)$  é uma função holomorfa num disco  $D = D_r(p)$ . Então  $f(z)$  admite uma primitiva  $F(z)$  em  $D$ , e, conseqüentemente,*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para todo contorno fechado  $\gamma \subset D$ .

Uma primitiva é dada explicitamente pela *fórmula de Poincaré*

$$F(z) = \int_{[p,z]} f(\zeta) d\zeta = z \int_0^1 f(p + t(z-p)) dt \quad (4.9)$$

ou seja, é obtida ao integrar  $f(z)$  ao longo do segmento que une um ponto arbitrário  $p$  (por exemplo, o centro do disco) ao ponto variável  $z$ .

*Demonstração.* Se  $z \in D_r(p)$  e  $w$  é suficientemente pequeno, o triângulo  $T = T(p, z, z+w)$  está contido no disco  $D_r(p)$ . Pelo teorema de Goursat 4.13,

$$\oint_T f(\zeta) d\zeta = \int_{[p,z]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z,z+w]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z+w,p]} f(\zeta) d\zeta = 0$$

Então, se  $F(z)$  é definida pela (4.9),

$$\begin{aligned} \frac{F(z+w) - F(z)}{w} - f(z) &= \frac{1}{w} \left( \int_{[z,z+w]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z,z+w]} f(z) d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{w} \int_{[z,z+w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \end{aligned}$$

Pela continuidade de  $f(z)$ ,

$$\left| \frac{F(z+w) - F(z)}{w} - f(z) \right| \leq \sup_{|\zeta-z| \leq |w|} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0$$

quando  $w \rightarrow 0$ . □

**ex:** Determine uma primitiva da função inteira  $f(z) = \alpha z + \beta$  usando a fórmula de Poincaré (4.9).

#### 4.4 Homotopias e teorema de Cauchy global

Considerações topológicas permitem estender a existência de primitivas locais. É possível evitar as dificuldades topológicas (e portanto a necessidade de “acreditar” no teorema da curva de Jordan ou no significado de “percorrer uma curva observando uma região à esquerda” ...) e restringir as possíveis regiões “simplesmente conexas” a triângulo, retângulos, discos, semi-planos, ... No entanto, é importante ter uma ideia do alcance da teoria, sendo que usa ideias “fisicamente” intuitivas, embora de difícil formalização.

**Integral ao longo de curvas.** Uma primeira consequência da existência de primitivas locais é a possibilidade de dar um sentido ao integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  quando  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  é apenas uma curva contínua, não necessariamente diferenciável, e  $f(z)$  é holomorfa em  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Pela compacidade da imagem  $\bar{\gamma}$ , é claro que existe uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  do intervalo em  $n$  sub-intervalos, tal que a imagem  $\bar{\gamma}_k$  da restrição  $\gamma_k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \Omega$  da curva  $\gamma$  ao  $k$ -ésimo sub-intervalo

está contida num disco  $D_k \subset \Omega$ . Se  $F_k(z)$  é uma primitiva local de  $f(z)$  em  $D_k$ , podemos então definir

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz := F_k(p_{k+1}) - F_k(p_k)$$

onde  $p_k = \gamma(t_k)$ , e portanto definir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_{n-1}} f(z) dz.$$

É possível provar que esta definição não depende da escolha da partição com estas propriedades nem das escolhas das primitivas locais. Esta construção equivale a dizer que o integral de  $f(z)$  ao longo da curva  $\gamma$  é igual ao integral de  $f(z)$  ao longo do caminho poligonal passando pelos pontos  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , pois, sempre pela existência de primitivas locais,  $\int_{\gamma_k} f(z) dz = \int_{[p_k, p_{k+1}]} f(z) dz$ .

**Invarância do integral por variações do caminho.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região do plano complexo, e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  um caminho entre os pontos  $\gamma(0) = \alpha$  e  $\gamma(1) = \beta$ . Uma *variação* de  $\gamma$  (ou uma *deformação*, ou uma *homotopia* que preserva/fixa os extremos) é uma função contínua  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  tal que  $\Gamma(s, 0) = \alpha$  e  $\Gamma(s, 1) = \beta$  para todo  $s \in [0, 1]$ , e tal que  $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Em outra palavra, uma variação é uma família contínua de curvas  $\gamma_s := \Gamma(s, \cdot)$  (definidas por  $\gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$ ), parametrizada por  $s \in [0, 1]$ , com os mesmos pontos inicial e final. O caminho “final”  $\eta := \Gamma(1, \cdot)$  é também chamado “variação” do caminho “inicial”  $\gamma$ .

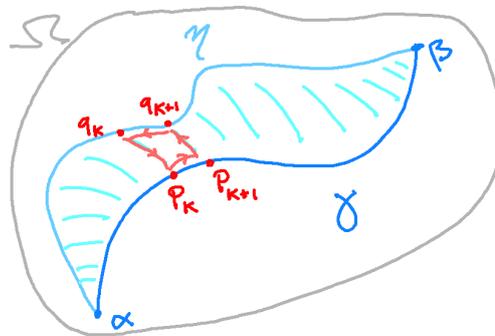
**Teorema 4.16** (invariância por variações). *Seja  $f(z)$  uma função holomorfa na região  $\Omega$ . Se  $\eta : [0, 1] \rightarrow \Omega$  uma variação do caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  em  $\Omega$ , então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(z) dz$$

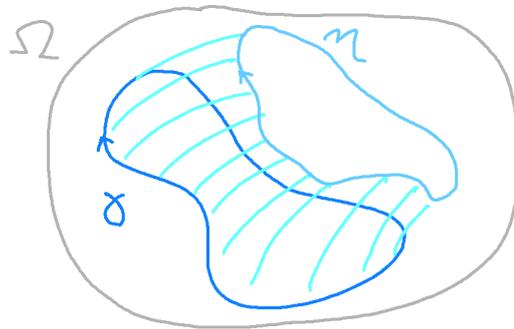
*Demonstração.* A ideia é que, pela compacidade da imagem  $\bar{\Gamma} := \Gamma([0, 1] \times [0, 1])$ , toda variação pode ser pensada como uma sucessão finita (num sentido óbvio) de variações “pequenas”, e é portanto suficiente provar o teorema para tais variações. Uma variação é *pequena* se existe uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  tal que, para cada  $k$ , as imagens  $\bar{\gamma}_k$  e  $\bar{\eta}_k$  das restrições de  $\gamma$  e  $\eta$  ao sub-intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  estão contidas num disco  $D_k \subset \Omega$ . Sejam  $\xi_k$  os laços  $\gamma_k + [p_{k+1}, q_{k+1}] - \eta_k - [p_k, q_k]$ , onde  $p_k = \gamma(t_k)$  e  $q_k = \eta(t_k)$ . Pelo teorema 4.15, cada integral  $\oint_{\xi_k} f(z) dz$  é nulo. Mas, por causa das cancelações nos segmentos intermédios,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \oint_{\xi_k} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\eta} f(z) dz.$$

□



**Homotopias de laços.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região do plano complexo. Os laços  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  e  $\eta : [0, 1] \rightarrow \Omega$  são *homotópicos* em  $\Omega$  se existe uma função contínua  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ , tal que  $\gamma_s := \Gamma(s, \cdot) : [0, 1] \rightarrow \Omega$  (definido por  $\gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$ ) é um laço para todo o  $s \in [0, 1]$ , e tal que  $\gamma_0 = \gamma$  e  $\gamma_1 = \eta$ . A função  $\Gamma$  é chamada *homotopia* entre  $\gamma$  e  $\eta$ . Ou seja, uma homotopia é uma “deformação contínua do laço  $\gamma$  no laço  $\eta$ ”. É claro que “ser homotópicos” é uma relação de equivalência no espaço dos laços (definidos numa região fixada  $\Omega$ ), denotada por  $\gamma \sim \eta$ .

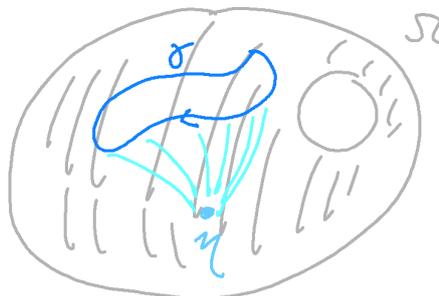


Essencialmente o mesmo argumento da prova do teorema 4.16, tendo em conta que as condições sobre os extremos dos contornos são substituídas pela periodicidade dos laços, mostra que

**Teorema 4.17** (invariância por homotopias). *Seja  $f(z)$  uma função holomorfa na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  e  $\eta : [0, 1] \rightarrow \Omega$  são dois laços homotópicos em  $\Omega$ , então*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\eta} f(z) dz$$

Um laço homotópico a um laço constante (i.e. ao laço  $\eta(t) = p$  para todo o  $t$ ) é dito *contratível*. É intuitivamente claro que um laço não é contratível se dá uma volta em torno de um “buraco” da região  $\Omega$ .

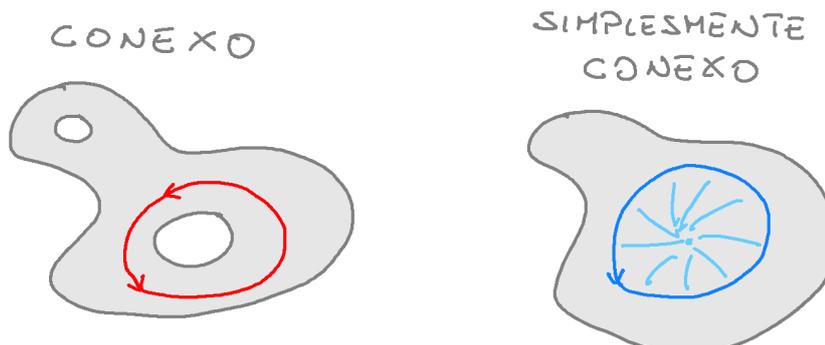


Consequência imediata do teorema 4.17 é

**Teorema 4.18.** *Sejam  $f(z)$  uma função holomorfa na região  $\Omega$ . Se o laço  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  é homotópico em  $\Omega$  a um laço constante, então*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Regiões simplesmente conexas.** Uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  do plano complexo é *simplesmente conexa* se é conexa (por arcos, sendo um aberto) e se todo o laço em  $\Omega$  é contratível. Em palavras do dia a dia, estas são as regiões que “não têm buracos”.



Exemplos são as regiões *convexas*, regiões  $C \subset \mathbb{C}$  que contêm o segmento entre cada par de seus pontos, i.e. tais que se  $\alpha, \beta \in C$  então também  $[\alpha, \beta] := \{\alpha + t(\beta - \alpha), t \in [0, 1]\} \subset C$ . De fato, se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  é um laço com  $\gamma(0) = p$ , então  $\Gamma(t, s) = sp + (1 - s)\gamma(t)$  é uma homotopia entre  $\gamma$  e o laço constante igual a  $\eta(t) = p$  para todo  $t$ .

Exemplos mais gerais são regiões *estreladas* (em inglês, *star-shaped*)  $S \subset \mathbb{C}$ , tais que existe um ponto  $p \in S$  tal que para todo  $z \in S$ , o segmento  $[p, z] \subset S$ .

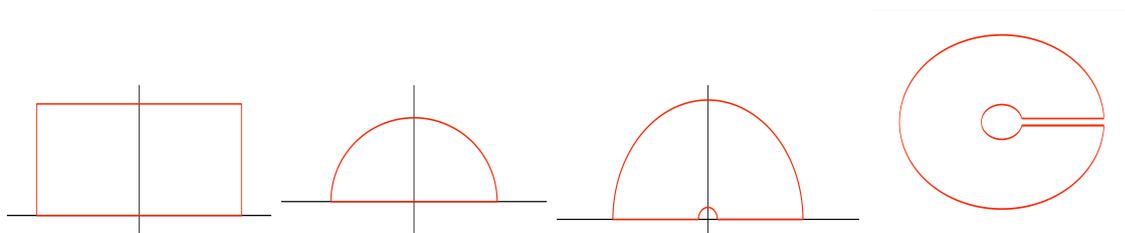
Consequência do teorema 4.18 é a seguinte versão do teorema de Cauchy.

**Teorema 4.19** (Cauchy). *Se  $f$  é holomorfa na região  $\Omega$  simplesmente conexa, por exemplo, convexa, então*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

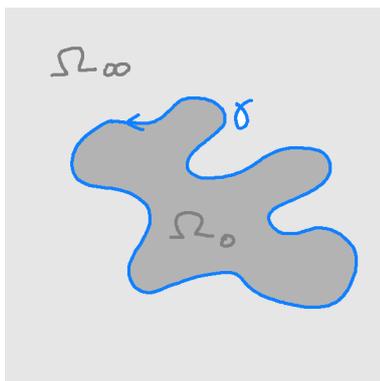
para todos os laços  $\gamma \subset \Omega$ .

Na prática, será útil aplicar o teorema a regiões particularmente simples, como retângulos, circunferências, semi-circunferências, setores angulares, “keyholes” . . . , como estas limitadas pelas curvas esboçadas em baixo e outras que irão aparecendo nas aplicações. Para estas regiões, não é difícil construir explicitamente (ou pelo menos imaginar como construir explicitamente) umas homotopias que reduzam a um ponto todo caminho fechado.



**Curvas de Jordan.** Uma curva genérica, a imagem do intervalo  $[0, 1]$  por uma função contínua  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pode ser um objeto complicado. Nem é claro que seja uma figura “unidimensional” (seja qual for a definição de dimensão). Por exemplo, existem funções contínuas de  $[0, 1]$  sobre o quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$  (hoje chamadas *curvas de Peano*<sup>7</sup>, ou *space filling curves*). Tais curvas não são injetivas. Por outro lado, uma curva fechada e simples “divide o plano em duas partes”. Este é o conteúdo do famoso *teorema da curva de Jordan*<sup>8</sup>, cuja prova (elementar mas difícil!) pode ser encontrada, por exemplo, em [Sm03a].

**Teorema 4.20** (Jordan). *Seja  $\gamma$  uma curva fechada e simples. O seu complementar  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  é a reunião disjunta de dois subconjuntos abertos e conexos: uma região limitada  $\Omega_0$  e uma região ilimitada  $\Omega_\infty$ , cuja fronteira comum é a curva  $\gamma$ .*



<sup>7</sup>G. Peano, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, *Mathematische Annalen* **36** (1890), 157-160.

<sup>8</sup>C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.

Uma curva fechada e simples é chamada *curva de Jordan*. A região limitada  $\Omega_0$  é chamada *interior* da  $\gamma$ , e a região ilimitada  $\Omega_\infty$  é chamada *exterior* de  $\gamma$ . A *orientação positiva* de um caminho fechado simples é a orientação tal que “ao deslocarmos-nos ao longo do caminho observamos o interior à nossa esquerda”.

É claro que as curvas esboçadas acima são curvas de Jordan, e para estas curvas não é difícil provar o teorema de Jordam com métodos elementares. Curvas deste género são suficientes para todas as aplicações elementares da teoria das funções holomorfas presentes nestas notas.

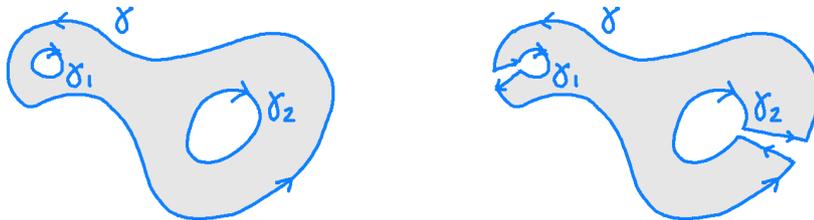
É possível provar que uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é simplesmente conexa quando o interior de todo o caminho fechado simples  $\gamma$  em  $\Omega$  está contido em  $\Omega$ , ou quando o seu complementar  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  é conexo.

Por outro lado, uma curva de Jordan  $\gamma$ , e umas outras curvas de Jordan  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , contidas no interior de  $\gamma$ , e cada uma no exterior das outras, formam a fronteira de uma região multiplamente conexa (informalmente, o interior de  $\gamma$  com  $n$  buracos). A versão do teorema de Cauchy para regiões multiplamente conexa é então a seguinte.

**Teorema 4.21** (Cauchy). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região limitada, cuja fronteira é uma reunião disjunta  $\partial\Omega = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$  de contornos fechados simples. Se  $f$  é holomorfa numa vizinhança de  $\Omega$ , então*

$$\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = 0 \tag{4.10}$$

A ideia da prova é fazer “cortes” que juntem a curva “exterior”  $\gamma$  com as curvas “interiores”  $\gamma_k$ ’s, como ilustrado na figura, até representar o integral como um integral ao longo da fronteira de uma região simplesmente conexa.



**ex:** Calcule

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z-3} dz & \quad \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i} dz & \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z+2} \\ \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+4} dz & \quad \oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

**Integrais gaussianos.** Uma *gaussiana* é uma função do género  $C e^{-\lambda x^2}$ , onde  $C$  e  $\lambda > 0$  são parâmetros reais. O cálculo

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

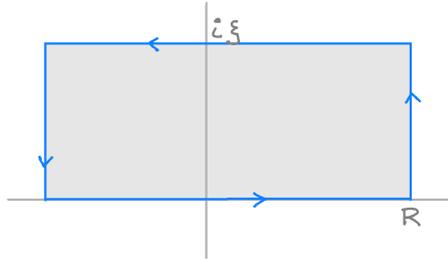
mostra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Mais uma mudança de variáveis mostra que  $g(x) = e^{-\pi x^2}$  é uma gaussiana normalizada (ou seja, é uma densidade de probabilidades), pois

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.} \quad (4.11)$$

A função  $f(z) = e^{-\pi z^2}$  é inteira. Portanto, o seu integral  $\oint_{\gamma} e^{-\pi z^2} dz$  ao longo do retângulo  $\gamma$  de vértices  $\pm R$  e  $\pm R + i\xi$  (com  $\xi$  real) é nulo.



Mas este integral é a soma dos integrais

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx + i \int_0^{\xi} e^{-\pi(R+iy)^2} dy - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx - i \int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+iy)^2} dy$$

No limite quando  $R \rightarrow \infty$ , os dois integrais ao longo dos lados verticais tendem para 0, pois o valor absoluto do integrando é limitado por  $e^{-\pi(R^2 - \xi^2)}$  e o comprimento do contorno é  $|\xi|$ . O resultado é que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}} \quad (4.12)$$

Ou seja, “a gaussiana  $g(x) = e^{-\pi x^2}$  é um ponto fixo da transformada de Fourier”.

**ex:** Calcule o integral gaussiano genérico

$$\int_{-\infty}^{\infty} c e^{-\lambda x^2} dx.$$

**ex:** Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 / \lambda} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \lambda \xi^2}$$

**Integrais de Fresnel.** Os integrais de Fresnel são as funções transcendentais

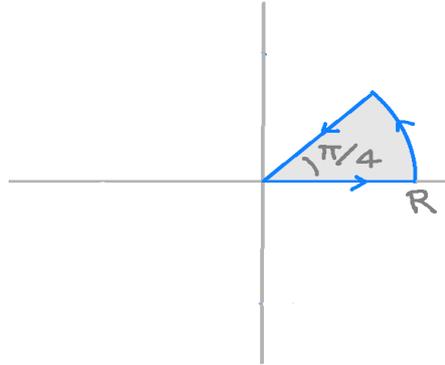
$$C(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

$$S(x) := \int_0^x \sin(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

(as séries de potências são obtidas integrando as séries de potências das partes real e imaginária de  $e^{it^2}$ ). A função

$$e^{iz^2} = \cos(z^2) + i \sin(z^2)$$

é inteira. Portanto, o seu integral  $\oint_{\gamma} e^{iz^2} dz$  ao longo do setor angular  $\gamma$  formado pelos segmentos de 0 até  $R > 0$ , pelo arco de circunferência  $Re^{it}$  com  $t \in [0, \pi/4]$  e pelo segmento de  $Re^{i\pi/4}$  até 0, é nulo.



Mas este integral é igual a

$$\int_0^R e^{it^2} dt + i \int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} R dt - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt$$

No limite quando  $R \rightarrow \infty$ , o segundo integral tende para 0. De fato, usando a desigualdade elementar

$$\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi} \theta$$

válida para ângulos  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , é possível ver que o valor absoluto da função integranda é limitado por

$$\left| e^{iR^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} R \right| \leq R e^{-R^2 \sin(2t)} \leq R e^{-(4R^2/\pi)t}$$

sendo  $0 \leq t \leq \pi/4$ . Então, o valor absoluto do segundo integral é limitado por

$$R \int_0^{\pi/4} e^{-(4R^2/\pi)t} dt = R \frac{1 - e^{-R^2/\pi}}{4R^2/\pi} \leq \frac{\pi}{4R}.$$

O limite quando  $R \rightarrow \infty$  do terceiro integral é proporcional ao integral gaussiano  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ , e é dado por  $e^{-i\pi/4} \sqrt{\pi}/4$ . O resultado é que os limites dos integrais de Fresnel  $C(x)$  e  $S(x)$  quando  $x \rightarrow \infty$  são

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \sqrt{\pi/8}.$$

**Integrais tipo Fresnel.** Uma generalização são integrais do género

$$\int_0^\infty e^{i\lambda x^n} dx$$

com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . A função  $e^{i\lambda z^n}$  é inteira. Se  $\gamma$  denota o contorno que limita um setor angular de amplitude  $\pi/2n$  e raio  $R$ , então

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_\gamma e^{i\lambda z^n} dz \\ &= \int_0^R e^{i\lambda r^n} dr + \int_0^{\pi/2n} e^{i\lambda R(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))} iR e^{i\theta} d\theta - e^{i\pi/2n} \int_0^R e^{-\lambda r^n} dr \end{aligned}$$

O limite quando  $R \rightarrow \infty$  do primeiro integral é o que queremos calcular. Quando  $R \rightarrow \infty$ , o segundo integral tende para zero, porque na região de integração  $\sin(n\theta)$  é positivo. O limite do terceiro integral quando  $R \rightarrow \infty$  pode ser calculado usando a substituição  $t = \lambda r^n$ ,

$$\int_0^R e^{-\lambda r^n} dr = \frac{\lambda^{-1/n}}{n} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{\lambda^{-1/n}}{n} \Gamma(1/n) = \lambda^{-1/n} \Gamma(1 + 1/n)$$

onde a função *Gama*, que estende o fatorial, é definida pelo integral impróprio

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

e satisfaz a equação funcional  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  se  $\Re(z) > 0$ . A conclusão é que

$$\int_0^{\infty} e^{i\lambda r^n} dr = e^{i\pi/2n} \lambda^{-1/n} \Gamma(1 + 1/n)$$

Em particular, os integrais de Fresnel são

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda r^2} dr = \sqrt{\pi/\lambda} e^{\pm i\pi/4} \quad (4.13)$$

## 4.5 Logaritmos

Um logaritmo complexo, ou seja, uma função inversa do exponencial, não pode existir, sendo o exponencial uma função periódica de período  $2\pi i$ . É possível definir “ramos do logaritmo”, ao integrar o seu diferencial  $dz/z$  em oportunas regiões simplesmente conexas.

**Logaritmos.** Um *logaritmo* do número complexo  $z \neq 0$  é um número complexo  $w$  tal que  $e^w = z$ . Se  $w = r + i\theta \neq 0$ , com  $r \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , então  $e^w = z$  sse

$$e^r = |z| \quad \text{e} \quad e^{i\theta} = \frac{z}{|z|},$$

e portanto sse  $r = \log |z|$  é o logaritmo do número positivo  $|z|$  (definido pelo integral  $\log x := \int_1^x dt/t$ ), e  $\theta$  é um argumento de  $z$ , ou seja, um ângulo tal que  $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = z/|z|$ , definido a menos de múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Ou seja, o logaritmo complexo pode ser definido como sendo a “função multivalorada” (em inglês, “multivalued function”) que envia um número complexo  $z = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho > 0$ , no conjunto enumerável de pontos

$$\log(\rho e^{i\theta}) = \log(|z|) + i \arg(z) = \log(\rho) + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z}).$$

É possível definir um *logaritmo principal*  $\text{Log} : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ , escolhendo o argumento principal  $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ . Então, se  $z = \rho e^{i\theta}$  com  $\rho > 0$  e  $\theta \in (-\pi, \pi]$ ,

$$\text{Log}(\rho e^{i\theta}) := \log(|z|) + i \text{Arg}(z) = \log(\rho) + i(\theta).$$

Observe que o logaritmo principal não é contínuo nos pontos da semireta  $\mathbb{R}_- \subset \mathbb{C}$  dos números reais  $x \leq 0$ .

**Potências.** É natural então definir *potências (não inteira)*  $z^\alpha$ , com  $z \in \mathbb{C}^\times$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , por meio da fórmula

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log(z))$$

Quando o argumento é um número real  $z = x > 0$ , esta é uma função bem definida se  $\log$  é o logaritmo natural de uma variável real positiva. Em geral, se  $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$ , então  $z^\alpha$  é a função multivalorada que assume o conjunto de valores

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log \rho + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z}))}$$

Por exemplo,  $i^\alpha = e^{i\alpha\pi/2} e^{i\alpha 2\pi n}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Se  $\alpha$  é real e irracional, um teorema famoso de Kronecker<sup>9</sup> ([HW59] XXIII, Theorems 438, 439 and 440) diz que os pontos  $e^{i\alpha 2\pi n}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , formam um conjunto denso na circunferência unitária!

Uma alternativa é definir potências usando o valor principal do logaritmo, ou seja, como

$$z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log}(z))$$

É importante ter cuidado em manipular potências, pois a lei dos expoentes  $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$  é, em geral, falsa.

<sup>9</sup>L. Kronecker, Die Periodensysteme von Funktionen Reeller Variablen, *Berliner Sitzungsberichte* (1884), 1071-1080.

L. Kronecker, Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, *Monatsber. Königlich. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1884), 1179-1193, 1271-1299.

**Ramos do logaritmo.** Uma função holomorfa e inversa do exponencial  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  não pode existir. De fato, esta seria uma função holomorfa  $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$  do plano perfurado  $\mathbb{C}^\times$  sobre o plano complexo  $\mathbb{C}$ , com derivada  $f'(z) = 1/z$  (porque  $(f(e^w))' = w$  implica, pela regra da cadeia,  $f'(e^w) e^w = 1$ , e portanto  $f'(z) z = 1$ ). Mas o cálculo

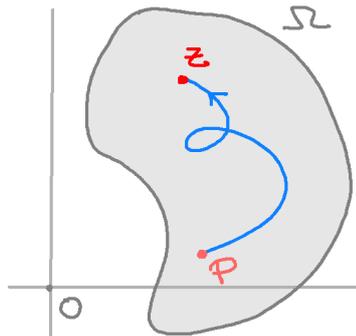
$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

(o período do exponencial!) mostra que  $1/z$  não admite primitiva na região  $\mathbb{C}^\times$ . O problema é que  $\mathbb{C}^\times$ , a imagem do exponencial, não é uma região simplesmente conexa.

Se  $\Omega \subset \mathbb{C}^\times$  é uma região simplesmente conexa (que não contém a origem), então, pelo teorema de Cauchy,  $\oint_\gamma dz/z = 0$  para todos os contornos fechados  $\gamma \subset \Omega$ . Portanto, fixado um ponto  $p = e^\alpha \in \Omega$ , podemos definir uma primitiva de  $1/z$  como o integral

$$L(z) := \alpha + \int_p^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

ao longo de um contorno arbitrário  $\gamma$  de  $p$  até  $z$  em  $\Omega$ .



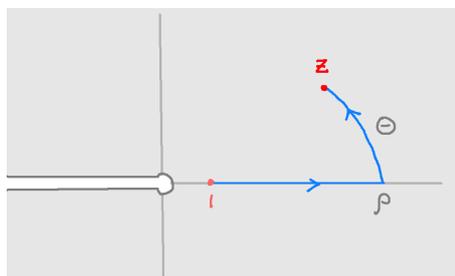
Então  $L'(z) = 1/z$  e  $L(p) = \alpha$ . A função  $e^{L(z)}/z$  tem derivada nula, logo é constante e igual a  $e^{L(z)}/z = e^{L(p)}/p = 1$ . Portanto

$$e^{L(z)} = z$$

e é natural chamar  $L$  um *ramo do logaritmo*. É então possível definir os correspondentes ramos das potências, usando a fórmula  $z^\alpha := \exp(\alpha L(z))$ .

Uma possibilidade é cortar o plano ao longo de uma semi-reta  $\ell$  saindo da origem, e considerar a região simplesmente conexa  $\Omega = \mathbb{C}^\times \setminus \ell$ . Uma escolha natural é  $\Omega = \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_-$  (i.e. retirar do plano a semi-reta dos reais não positivos) e o ponto  $p = 1 = e^0$  onde  $L(1) = 0$ . Então  $L$  é o logaritmo principal. De fato, se  $z = \rho e^{i\theta}$  com  $\rho > 0$  e  $\theta \in (-\pi, \pi)$ , então podemos escolher um caminho que é a justaposição do segmento  $[1, \rho]$  da reta real e o arco de circunferência  $\rho e^{it}$ , com  $t \in [0, \theta]$ . Então

$$L(z) = \int_1^\rho \frac{dx}{x} + \int_0^\theta \frac{d(\rho e^{it})}{\rho e^{it}} = \log(\rho) + i\theta.$$



**Funções trigonométricas inversas.** Se  $z = \sin(w)$ , então  $W := e^{iw}$  satisfaz a equação quadrática  $W^2 - 2izW - 1 = 0$ . As raízes são  $W_{\pm} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ , e satisfazem  $W_+W_- = -1$ . Então  $\pm iw = \log(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$ . Em particular,

$$\arcsin(z) = -i \operatorname{Log}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

é o ramo do arco seno tal que  $\arcsin(1) = \pi/2$ .

Se  $z = \tan(w)$ , então  $W := e^{iw}$  satisfaz a equação quadrática  $W^2(1 - iz) = 1 + iz$ . Então  $\pm iw = \log((1 + iz)/(1 - iz))$ . Em particular,

$$\arctan(z) = \frac{i}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

é o ramo do arcotangente tal que  $\arctan(1) = \pi/4$ .

**ex:** Calcule

$$\log(i) \quad \operatorname{Log}(-i) \quad 2^{1+i} \quad i^{-i} \quad (-1)^{2i}$$

**ex:** Compare  $(-1)^{2i}$  com  $((-1)^2)^i$ .

**ex:** Resolva as equações

$$\sin(z) = 2 \quad \log(z + 1) = i \quad e^z = 2 \quad e^z = i \quad \cosh(z) = 1$$

**ex:** Determine uma fórmula para  $\arccos(z)$ .

**ex:** Verifique que

$$\arctan'(z) = \frac{1}{1 + z^2} \quad \arcsin'(z) = \arccos'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

## 5 Fórmula integral de Cauchy e séries de Taylor

### 5.1 Fórmula de Cauchy

Uma “fórmula integral” relaciona os valores de uma função holomorfa num ponto com os seus valores nas curcunferências de raio suficientemente pequeno em torno deste ponto.

2 nov 2020

**Fórmula integral de Cauchy.** Todas as potências  $z^n$  admitem uma primitiva, exceto quando  $n = -1$ . De fato, se a circunferência  $|z| = \rho$  é parametrizada por  $z(t) = \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , então  $dz/z = i dt$  (ou seja,  $dz/z$  é  $i$  vezes o diferencial do argumento de  $z$ ), e portanto

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \quad (5.1)$$

Seja  $f(z)$  é uma função holomorfa numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que contém um disco fechado  $\overline{D}_\rho(p)$ . Seja  $\gamma(t) = p + \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , a circunferência de raio  $\rho$  centrada em  $p$  percorrida no sentido anti-horário. Então a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-p}$$

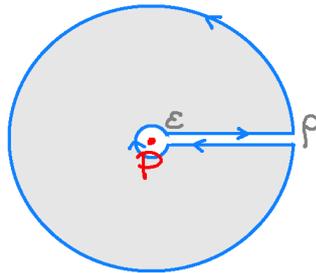
é holomorfa na região perfurada  $\Omega \setminus \{p\}$ . Pelo teorema 4.17, o integral

$$\oint_{|z-p|=\rho} g(z) dz$$

é igual ao integral

$$\oint_{|z-p|=\varepsilon} g(z) dz,$$

onde  $\varepsilon < \rho$  é arbitrariamente pequeno, pois as duas circunferências são homotópicas em  $\Omega \setminus \{p\}$ . Outra maneira de ver isto, consiste em juntar as duas circunferências por meio de dois raios muito próximos, e observar que o caminho resultante  $\eta$ , aqui esboçado e chamado “keyhole” em inglês, é um laço contratível em  $\Omega \setminus \{p\}$ .



É claro então que, com as orientações convencionais,

$$0 = \oint_{\eta} g(z) dz \rightarrow \int_{|z-p|=\rho} g(z) dz - \oint_{|z-p|=\varepsilon} g(z) dz$$

no limite quando os dois raios coincidem. Mas, pela continuidade de  $f$  e o cálculo (5.1),

$$\oint_{|z-p|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz \simeq f(p) \oint_{|z-p|=\varepsilon} \frac{dz}{z-p} = 2\pi i f(p)$$

se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno. A conclusão é a seguinte fórmula integral, que é o resultado central da teoria das funções holomorfas.

**Teorema 5.1** (fórmula de Cauchy). *Se  $f$  é holomorfa numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , então o seu valor em cada ponto  $p \in \Omega$  é dado pelo integral*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{z-p} dz \quad (5.2)$$

se  $D_\rho(p) \subset \Omega$ .

*Demonstração.* A função definida por  $h(z) := (f(z) - f(p))/(z - p)$  se  $z \neq p$  e por  $h(p) = f'(p)$  no ponto  $z = p$  é holomorfa em  $\Omega \setminus \{p\}$  e contínua em  $\Omega$ , pela derivabilidade de  $f(z)$ . Pelo teorema 4.14, o seu integral ao longo de  $\gamma$  é nulo. Então

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-p} dz - \frac{f(p)}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z-p}$$

e o último integral é igual a  $-f(p)$ .  $\square$

Pelo teorema 4.17, o mesmo acontece para todo contorno fechado  $\gamma$  homotópico à circunferência  $\{|z-p|=\rho\}$  em  $\Omega \setminus \{p\}$ . A fórmula de Cauchy diz que o valor de uma função holomorfa num ponto é uma média pesada dos valores numa circunferência à volta do ponto. Em particular, uma vez fixados os valores de  $f(z)$  numa circunferência, a própria função resulta definida em todos os pontos do seu interior.

**ex:** Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \oint_{|z|=2\pi} \frac{ze^z}{z-\pi} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z^2-4)}$$

**ex:** Mostre que, se  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$$

e deduza que

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

## 5.2 Índice

A integração do diferencial do logaritmo, a forma  $dz/z$ , permite “contar o número de voltas” que um laço dá em torno de um ponto do plano.

**Índice.** Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  um contorno fechado, não necessariamente simples. A sua imagem, a curva  $\bar{\gamma}$ , divide o plano, ou melhor, o aberto  $\mathbb{C} \setminus \bar{\gamma}$ , em um certo número de componente conexas, duas ou mais. Seja  $p \in \mathbb{C}$  um ponto situado fora da curva  $\bar{\gamma}$ . O *índice* de  $p$  relativamente a  $\gamma$ , ou o *número de rotações/voltas* (em inglês, “winding number”) de  $\gamma$  em torno de  $p$ , é o inteiro

$$\text{Ind}(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z-p} \quad (5.3)$$

Informalmente, é “o número de voltas”, positivo se no sentido anti-horário e negativo se no sentido horário, que o vetor entre  $\gamma(t)$  e  $p$  dá quando o tempo  $t$  percorre o intervalo  $[0, 1]$ .

**Teorema 5.2.** *Para cada  $p \notin \bar{\gamma}$ , o índice é um número inteiro, i.e.  $\text{Ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$ . Enquanto função do ponto  $p$ ,  $\text{Ind}(\gamma, p)$  é constante em cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \bar{\gamma}$ . Se  $p$  está na componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C} \setminus \bar{\gamma}$  (i.e. se  $|p|$  é suficientemente grande), então  $\text{Ind}(\gamma, p) = 0$ .*

*Demonstração.* Para  $t \in [0, 1]$ , seja  $\phi(t) := \int_0^t (\dot{\gamma}(\tau)/(\gamma(\tau) - p)) d\tau$ , assim que  $\phi(1) = 2\pi i \text{Ind}(\gamma, p)$ . Um cálculo mostra que a derivada de  $\Phi(t) = e^{\phi(t)}/(\gamma(t) - p)$  é igual a zero nos pontos de continuidade de  $\dot{\gamma}$ . Portanto,  $\Phi(1) = \Phi(0)$ , e, sendo  $\gamma(1) = \gamma(0)$  e  $e^{\phi(0)} = 1$ , isto implica que  $e^{\phi(1)} = 1$ , e portanto que  $\phi(1) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ .

Fixado  $\gamma$ , a função  $p \mapsto \text{Ind}(\gamma, p)$  é contínua em  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ . Sendo uma função com valores inteiros, é localmente constante, ou seja, constante em cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ .

Seja  $R = \max_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)|$ . Se  $|p| > R$ , podemos estimar

$$|\text{Ind}(\gamma, p)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|\gamma|}{|p| - R} < 1$$

se  $|p|$  é suficientemente grande. Sendo um inteiro,  $\text{Ind}(\gamma, p)$  deve ser igual a zero. □



O índice  $\text{Ind}(\gamma, p)$  é invariante para homotopias de laços em  $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ . Isto permite calcular índices, pelo menos em casos simples. Por exemplo, se  $\gamma$  é a circunferência  $S_\rho(p)$ , percorrida no sentido anti-horário, então  $\text{Ind}(\gamma, p') = 1$  para todo  $p' \in D_\rho(p)$  e  $\text{Ind}(\gamma, p'') = 0$  para todo  $p'' \notin \overline{D_\rho(p)}$ . Também fácil é calcular índices de semi-circunferências, triângulos, retângulos, ... relativamente a pontos no complementar das curvas.

A fórmula de Cauchy então generaliza assim.

**Teorema 5.3.** *Sejam  $f(z)$  uma função holomorfa na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , e  $\gamma$  um contorno fechado em  $\Omega$ . Então*

$$f(p) \cdot \text{Ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - p} dz$$

*Demonstração.* A função definida por  $g(z) := (f(z) - f(p))/(z - p)$  se  $z \neq p$  e  $g(p) = f'(p)$  no ponto  $z = p$  é holomorfa em  $\Omega \setminus \{p\}$  e contínua em  $\Omega$ , pela derivabilidade de  $f(z)$ . Pela versão forte do teorema de Cauchy-Goursat 4.14, o seu integral ao longo de  $\gamma$  é nulo. Então

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - p} dz - \frac{f(p)}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - p}$$

e o primeiro integral é o índice de  $p$  relativamente a  $\gamma$ . □

### 5.3 Séries de Taylor

As funções holomorfas são analíticas, ou seja, são representadas localmente por séries de potências convergentes, chamadas séries de Taylor. Os coeficientes destas séries são determinados pelos valores das derivadas da função no ponto onde as séries estão centradas. Existem fórmulas integrais para todas as derivadas de uma função holomorfa.

**Integrais de Cauchy** A fórmula de Cauchy (5.2) diz que o valor de uma função holomorfa num ponto  $p$  é uma média pesada dos valores de  $f(z)$  numa circunferência centrada em  $p$ . O “peso”  $1/(z-p)$  é uma função infinitamente diferenciável de  $p$ , desde que  $p \neq z$ . Derivando a fórmula de Cauchy dentro do integral é portanto possível obter fórmulas integrais para as derivadas de  $f$ ,

$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^2} dz \quad , \quad f''(p) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^3} dz \quad , \quad \dots$$

É possível justificar esta passagem, como, por exemplo, em [Ah78]. No entanto, tendo já introduzido as séries de potências, é mais simples seguir outro caminho, que usa a convergência da série geométrica.

A fórmula de Cauchy (5.2) pode ser pensada como uma maneira de “produzir” funções analíticas. Mais em geral, um *integral de Cauchy* é uma função  $f(z)$  definida por

$$f(z) := \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{5.4}$$

onde  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  é um contorno, e  $\varphi(\zeta)$  é uma função (apenas) contínua definida na curva  $\bar{\gamma}$  (de fato, muito menos é necessário, a forma  $\varphi(\zeta) d\zeta$  pode ser substituída por uma medida arbitrária). A definição faz sentido para  $z$  no complementar da curva  $\bar{\gamma}$ . Tecnicamente, um integral de Cauchy é uma “convolução” (uma sobreposição de translações) do *núcleo de Cauchy*  $1/\zeta$  com a função  $\varphi(\zeta)$ .

**Teorema 5.4.** *Seja  $\varphi(\zeta)$  uma função contínua definida na curva  $\bar{\gamma}$ . O integral de Cauchy (5.4) é uma função analítica em  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bar{\gamma}$ . Em particular, se  $z \in D_{\rho}(p)$  e  $\bar{D}_{\rho}(p) \subset \Omega$ , então  $f(z)$  é a soma da série convergente*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$$

onde os coeficientes são dados por

$$c_n = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-p)^{n+1}} d\zeta$$

*Demonstração.* A menos de translações e homotetias, podemos assumir que  $p = 0$  e  $\rho = 1$ , ou seja, que  $\Omega$  contém a aderência do disco unitário  $\mathbb{D}$ . Por definição, os valores de  $f(z)$  quando  $z \in \mathbb{D}$  são dados por

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{5.5}$$

Pelas desigualdades  $|z| < 1 \leq |\zeta|$ , o “núcleo” de este integral é dado pela série

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - (z/\zeta)} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

que converge uniformemente em  $\zeta$  para cada  $z \in \mathbb{D}$  fixado. Ao substituir esta expressão na (5.5), e usando o teorema 4.8, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n .$$

□

**Analiticidade das funções holomorfas.** Aplicando o teorema 5.4 a uma função holomorfa temos então

**Teorema 5.5** (Taylor). *Se  $f(z)$  é holomorfa numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  então é também analítica em  $\Omega$ . Em particular, se  $\Omega$  contém a aderência do disco  $D_\rho(p)$ , então  $f(z)$  é igual a uma série de potência*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$$

nos pontos  $z \in D_\rho(p)$ , onde os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz$$

Pela unicidade dos coeficientes de uma série de potência convergente, os coeficientes acima são  $c_n = f^{(n)}(p)/n!$ . Em particular, temos a seguinte generalização da fórmula de Cauchy para as derivadas de uma função holomorfa.

**Teorema 5.6** (fórmulas de Cauchy par as derivadas). *Uma função holomorfa  $f(z)$  numa região  $\Omega$  é infinitamente diferenciável, e todas as suas derivadas são funções holomorfas. As derivadas de  $f(z)$  em  $p \in \Omega$  admitem a representação integral*

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz \quad (5.6)$$

onde  $\rho$  é suficientemente pequeno.

O contorno de integração nas fórmulas de Cauchy (5.6) pode ser, naturalmente, substituído por outro laço homotópico à circunferência  $C_\rho(p)$  na região  $\Omega \setminus \{p\}$ .

**ex:** Calcule

$$\oint_{|z|=2\pi} \frac{ze^z}{(z-\pi)^2} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)}$$

**ex:** Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

**Desigualdades de Cauchy.** Mais útil é a possibilidade de estimar as derivadas de  $f(z)$  num ponto fixado  $p \in \Omega$  em função do máximo de  $|f(z)|$  em  $\partial\Omega$  e da distância  $\text{dist}(p, \partial\Omega)$ . Em particular, se  $f(z)$  é holomorfa no disco  $D_R(p)$ , e se

$$M(R) := \sup_{z \in \partial D_R(p)} |f(z)|$$

denota o máximo dos valores do módulo de  $f(z)$  na circunferência de raio  $R$ , então das (5.6) obtemos a *desigualdade de Cauchy*

$$\left| f^{(n)}(p) \right| \leq \frac{n! M(R)}{R^n} \quad (5.7)$$

para o valor absoluto da  $n$ -ésima derivada de  $f(z)$  em  $p$ .

**Teorema de Morera.** O teorema de Cauchy 4.19 admite um recíproco parcial<sup>10</sup>, consequência das fórmulas de Cauchy.

**Teorema 5.7** (Morera). *Seja  $f(z)$  uma função contínua na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Se  $\oint_\gamma f(z) dz = 0$  para todos os contornos fechados  $\gamma \subset \Omega$ , então  $f(z)$  é uma função holomorfa.*

<sup>10</sup>G. Morera, Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* **19** (1886), 304-307.

*Demonstração.* De acordo com o teorema 4.10, a hipótese é equivalente à existência de uma primitiva  $F(z)$ . Mas, pelo teorema 5.6, se  $F(z)$  é holomorfa, então também a sua derivada  $F'(z) = f(z)$  é holomorfa.  $\square$

Uma consequência importante é que limites uniformes de sucessões de funções holomorfas são holomorfos.

**Teorema 5.8.** *Seja  $(f_n)$  é uma sucessão de funções holomorfas definidas numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , que converge uniformemente para uma função  $f$  em cada compacto  $K \subset \Omega$ . Então o limite  $f$  é holomorfa em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Todo o ponto  $p \in \Omega$  é centro de um disco  $D = D_\rho(p)$  com aderência  $\bar{D} \subset \Omega$ . Os integrais das  $f_n$  ao longo de cada contorno  $\gamma \subset D$  são nulos, i.e.  $\oint_\gamma f_n dz = 0$ , pelo teorema de Cauchy-Goursat. Pela continuidade uniforme, também são nulos os integrais de  $f$ , pois  $\oint_\gamma f_n dz \rightarrow \oint_\gamma f dz$ . O teorema de Moreira então diz que  $f$  é holomorfa em  $D$ .  $\square$

O teorema 5.8 é um instrumento para “produzir” funções holomorfas. Por exemplo, somas

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

de séries de funções holomorfas  $f_n(z)$  que convergem uniformemente em certos domínios.

**Séries de Taylor.** Seja  $f(z)$  uma função holomorfa numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que contém o ponto  $p$ . A *série de Taylor*<sup>11</sup> de  $f$  (ou também *série de Maclaurin* quando  $p = 0$ , em alguns manuais) é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - p)^n \quad (5.8)$$

com coeficientes (chamados *coeficientes de Taylor* de  $f$  no ponto  $p$ )

$$c_n := \frac{f^{(n)}(p)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz$$

onde  $\rho$  é suficientemente pequeno. Esta série de potência define uma função holomorfa numa vizinhança de  $p$ . De fato, seja  $D_R(p)$  um disco cuja aderência está contida em  $\Omega$ , e seja  $M(R) = \sup_{z \in \partial D_R(p)} |f(z)|$ . Pelas desigualdades de Cauchy (5.7) os coeficientes são limitados por

$$|c_n| \leq \frac{M(R)}{R^n}.$$

Sendo  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \leq 1/R$ , o raio de convergência da série é  $\geq R$ , e portanto, pelo teorema 3.8, a série define uma função holomorfa, no disco  $D_R(p)$ .

Resumindo, o teorema 5.5 diz que uma função holomorfa admite uma expansão em série de Taylor em torno de cada ponto do seu domínio, ou seja, é uma função analítica, e o teorema de Abel 3.8 diz que uma função analítica é também holomorfa. Em particular, “holomorfa” e “analítica” podem ser considerados sinónimos.

**Teoremas de Liouville e Gauss.** Uma consequência surpreendente e importante das desigualdades de Cauchy é o

**Teorema 5.9** (Liouville). *Uma função inteira e limitada é constante.*

<sup>11</sup>B. Taylor, *Methodus incrementorum*, Londini, 1715.

*Demonstração.* Se  $f$  é inteira e  $|f(z)| \leq M$ , então (5.7) implica que  $|f'(p)| \leq M/R$  para todos os pontos  $p \in \mathbb{C}$  e todos os raios os  $R > 0$ . Portanto  $f' = 0$ , e, conseqüentemente,  $f$  é constante.  $\square$

O teorema de Liouville fornece mais uma prova, elegante, do teorema de Gauss 2.10.

**Teorema 5.10** (Gauss). *Todo o polinômio  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  de grau  $n \geq 1$  (i.e. não constante) com coeficientes complexos possui uma raiz em  $\mathbb{C}$ .*

*Demonstração.* Se  $f(z) \neq 0$  para todos os  $z \in \mathbb{C}$ , então  $g(z) = 1/f(z)$  é uma função inteira e limitada (pois  $|f(z)| \rightarrow \infty$  quando  $|z| \rightarrow \infty$ ), logo constante pelo teorema de Liouville 5.9.  $\square$

O teorema de Liouville 5.9 admite a seguinte generalização, consequência das desigualdade de Cauchy (5.7) e da unicidade dos coeficientes da série de Taylor.

**Teorema 5.11.** *Uma função inteira  $f$  tal que*

$$\sup_{|z|=R} |f(z)| = \mathcal{O}(R^n)$$

*é um polinômio de grau  $\leq n$ .*

**Analicidade real.** Tudo isto falha para funções reais de uma variável real! Por exemplo, a “gaussiana invertida”  $h(x)$ , definida por

$$h(x) = e^{-1/x^2}$$

se  $x \neq 0$  e por  $h(0) = 0$ , é infinitamente diferenciável e limitada na reta real  $\mathbb{R}$ . Todas as suas derivadas na origem são nulas, assim que a sua série de Taylor centrada na origem é a série identicamente nula. No entanto,  $h(x) \neq 0$  para todo  $x \neq 0$ .

**ex:** Determine as séries de Taylor em torno de  $p = 0$ , e os respectivos raios de convergência, das seguintes funções:

$$\frac{1}{1+z} \quad \frac{1}{1 \pm z^2} \quad \frac{z}{z^4 + 4} \quad e^{2z} \quad ze^{-z} \quad (1+z)e^z \quad z^2 e^z \quad e^{-z^2}$$

**ex:** Determine as séries de Taylor em torno dos pontos  $p = 1$  e  $p = i$ , e os respectivos raios de convergência, das seguintes funções:

$$1/z \quad 1/z^2 \quad e^z$$

**ex:** Determine os primeiros termos da expansão em série de Taylor em torno de  $p = 0$  das seguintes funções:

$$e^z \sin(z) \quad \cos(z) \sin(z) \quad \frac{e^z}{\cos(z)} \quad \frac{\sin(z)}{z}$$

**Série de Mercator.** A série geométrica

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

pode ser integrada termo a termo no seu disco de convergência. Mas  $1/(1-z)$  é a derivada de  $-\text{Log}(1-z)$ . O resultado é a série de Taylor do logaritmo principal  $\text{Log}(1-z)$  em torno de  $p = 0$ , dada pela *série de Mercator*

$$\text{Log}(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \dots$$

em  $|z| < 1$ .

**ex:** Calcule também a série de Taylor de  $\text{Log}(1+z)$  em torno de  $p=0$ .

**Série binomial.** Dado  $\alpha \in \mathbb{C}$  não inteiro, seja

$$f(z) = (1+z)^\alpha := e^{\alpha \text{Log}(1+z)}$$

(Log denota o logaritmo principal), holomorfa na região tal que  $1+z \in \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_-$ . Observe que  $f(0) = 1$ . Um cálculo mostra que a derivada de  $f(z)$  é dada pela fórmula óbvia  $f'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$ . Por indução, a  $k$ -ésima derivada em  $z=0$  vale

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$

Portanto a série de Taylor de  $f(z)$  centrada na origem é

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \\ &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} z^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde os coeficientes binomiais  $\binom{\alpha}{k}$ , com  $k$  inteiro e  $\alpha$  complexo, são definidos por

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

A série converge no disco unitário  $\mathbb{D}$ . É chamada *série binomial*, pois generaliza a fórmula do *binômio de Newton*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

válida para expoentes inteiros  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Funções trigonométricas inversas.** A derivada de  $\arctan(z)$  é  $1/(1+z^2)$ , e

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$$

se  $|z| < 1$ . Integrando termo a termo, temos que

$$\arctan(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

no disco de convergência  $|z| < 1$ .

**ex:** A derivada de  $\arcsin(z)$  é  $1/\sqrt{1-z^2}$ . Use a série binomial (5.9), com  $\alpha = -1/2$ , para deduzir que a série de Taylor do arco-seno é

$$\begin{aligned} \arcsin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \\ &= z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

no disco de convergência  $|z| < 1$ .

**ex:** Verifique que se  $|x| < 1$

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \dots$$

O que acontece ao fazer  $x = \cos \theta$  com  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ?

## 5.4 Zeros isolados e princípio do máximo

O comportamento global das funções holomorfas é determinado pelo comportamento local.

**Zeros isolados.** Se uma função

$$f(z) = c_0 + c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots$$

é holomorfa numa vizinhança de  $p$ , se anula em  $p$  (i.e.  $c_0 = 0$ ), mas não é identicamente nula (e portanto  $\text{ord}(f, p) = n < \infty$ ), então fatoriza como produto

$$f(z) = (z-p)^n g(z)$$

do polinómio  $(z-p)^n$  vezes uma função holomorfa  $g(z) = c_n + c_{n+1}(z-p) + \dots$  diferente de zero em  $p$  (i.e. com  $c_n \neq 0$ ). Por continuidade, a função  $g(z)$ , e portanto  $f(z)$ , não se anulam se  $z \neq p$  está suficientemente próximo de  $p$ . Uma consequência é que

**Teorema 5.12.** *As funções holomorfas e não constantes numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  (aberta e conexa) têm zeros isolados.*

*Demonstração.* Seja  $\Omega_0 \subset \Omega$  o maior aberto onde a função se anula. Pela observação acima, os zeros de  $f$  em  $\Omega \setminus \Omega_0$  são isolados. Isto implica que  $\Omega_0$  não tem pontos de acumulação em  $\Omega \setminus \Omega_0$ , e portanto  $\Omega \setminus \Omega_0$  é também aberto. Sendo  $\Omega$  um aberto conexo, ou  $\Omega \setminus \Omega_0 = \Omega$ , e portanto os zeros de  $f$  são isolados, ou  $\Omega_0 = \Omega$ , e portanto  $f$  é constante.  $\square$

Uma primeira consequência é que uma função holomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  só pode ter um número finito de zeros em cada compacto  $K \subset \Omega$  (pois toda sucessão num compacto admite uma subsucessão convergente).

Uma segunda consequência, ainda mais profunda, é que “o comportamento global de uma função holomorfa é determinado pelo seu comportamento local”, numa vizinhança arbitrariamente pequena de um ponto do seu domínio. Por exemplo, seja  $p \in \Omega$ , e seja  $(z_n)$  uma sucessão de pontos distintos de  $\Omega$  tal que  $z_n \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $f(z_n) = 0$  para todo  $n$ , então  $f(z)$  é necessariamente constante e igual a zero em toda a região  $\Omega$ .

**Unicidade da extensão analítica.** Aplicando esta observação à diferença entre duas funções holomorfas, temos o seguinte teorema de unicidade.

**Teorema 5.13** (teorema de unicidade). *Se duas funções  $f(z)$  e  $g(z)$ , holomorfas numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , coincidem numa sucessão  $(z_k)$  de pontos distintos de  $\Omega$  tais que  $z_n \rightarrow p \in \Omega$  (ou, a fortiori, numa curva não constante  $\gamma \subset \Omega$ ), então são iguais.*

Por exemplo, se uma função  $f(x)$ , definida num intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , admite uma extensão holomorfa  $f(z)$  numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  contendo o intervalo  $[a, b]$  da eta real, então esta extensão é única. Este é o caso das funções trigonométricas, como  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$ , e da função exponencial  $e^x$ .

O teorema de unicidade também costuma ser enunciado como

**Teorema 5.14** (princípio da extensão analítica). *Se duas funções holomorfas numa região  $\Omega$  coincidem num aberto não vazio  $U \subset \Omega$ , então são iguais.*

Por outro lado, os zeros de uma função holomorfa podem ter pontos de acumulação na fronteira do domínio  $\Omega$ . Este é o caso, por exemplo, da função

$$\sin(\pi/z)$$

que tem uma singularidade essencial em  $p = 0$ . Os zeros são os pontos  $p_n = \pi/n$ , e convergem para a singularidade quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Fórmula do valor médio e princípio do módulo máximo.** Seja  $f(z)$  uma função holomorfa na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , e seja  $p \in \Omega$ . Se  $\rho > 0$  é suficientemente pequeno, então  $D_\rho(p) \subset \Omega$ . Na fronteira  $S_\rho(p)$ , parametrizada por  $\gamma(t) = p + \rho e^{it}$  com  $t \in [0, 2\pi]$ , temos que  $dz/(z-p) = idt$ . Portanto a fórmula de Cauchy (5.2) tem como caso particular a seguinte representação.

**Teorema 5.15** (fórmula do valor médio). *O valor de uma função holomorfa  $f$  em um ponto  $p$  do seu domínio é igual à média dos valores de  $f$  em uma circunferência de raio  $\rho > 0$  suficientemente pequeno à volta de  $p$ , i.e.*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (5.10)$$

Uma consequência é o

**Teorema 5.16** (princípio do módulo máximo). *O valor absoluto de uma função holomorfa e não constante não pode atingir o seu máximo numa região (aberta e conexa)  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Em particular, se  $f$  é holomorfa na região limitada  $\Omega$ , então*

$$\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.$$

*Demonstração.* Se  $p \in \Omega$  é um máximo de  $|f(z)|$ , então  $|f(p + \rho e^{i\theta})| \leq |f(p)|$  para todo ângulo  $\theta$  e todo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno. Mas a fórmula do valor médio (5.10) implica que

$$|f(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(p + \rho e^{i\theta})| d\theta.$$

Isto claramente implica que o valor absoluto  $|f(p + \rho e^{i\theta})|$  é constante e igual a  $|f(p)|$  nas circunferências  $S_\rho(p)$  de raio  $\rho$  suficientemente pequeno. Pelas condições de Cauchy-Riemann,  $f(z)$  é também constante numa vizinhança de  $p$ . Pelo teorema de unicidade 5.13,  $f$  é constante.  $\square$

## Algumas séries de Taylor

função = série de Taylor-Maclaurin	disco de convergência
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ where $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$	$ z  < R = (\limsup  c_n ^{1/n})^{-1}$
$(1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$	$ z  < 1$
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$	$ z  < \infty$
$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \dots$	$ z  < \infty$
$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$	$ z  < \infty$
$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \dots$	$ z  < \infty$
$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$	$ z  < \infty$
$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$	$ z  < 1$
$(1 + z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}z^3 + \dots$	$ z  < 1$
$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} z^{2n+1}$	$ z  < 1$

## 6 Séries de Laurent e cálculo dos resíduos

### 6.1 Séries de Laurent

As funções holomorfas num anel podem ser representadas como séries de potências positivas e negativas, e os coeficientes destas séries são também dados por fórmulas integrais.

9 nov 2020

**Séries de potências em torno de  $\infty$ .** Uma função  $f(z)$  é “analítica em  $z = \infty$ ” se a função  $g(w) = f(1/w)$  é analítica em  $w = 0$ , ou seja, se admite a expansão

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^{-n}$$

num disco  $D_R(\infty) := \{|z| > R\} \subset \bar{\mathbb{C}}$  centrado em  $\infty$ , que corresponde a um disco  $|w| < 1/R$  na coordenada  $w = 1/z$  da esfera de Riemann. Os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1/\rho} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) z^{n-1} dz \end{aligned}$$

onde  $\rho > R$ , pois  $dz/z = -dw/w$  e o sentido horário no plan  $z$  é o sentido anti-horário no plano  $w$ .

**ex:** Determine, se existir, a expansão em série de potências em torno de  $\infty$  de

$$1/z^3 \quad e^z \quad \frac{1}{z^2+1} \quad e^{1/z^2}$$

**Séries de Laurent.** Sejam

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$$

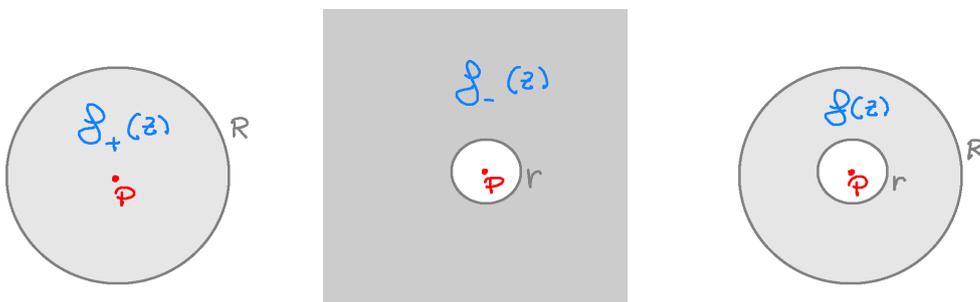
uma função analítica no disco  $|z-p| < R$  e

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-p)^{-n}$$

uma função analítica no disco  $|z-p| > r$ . Se  $r < R$ , então a soma  $f(z) := f_+(z) + f_-(z)$  é uma função analítica no anel  $A_{r,R}(p) := \{r < |z-p| < R\}$ , representada pela série de potências positivas e negativas

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-p)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n, \end{aligned}$$

chamada *série de Laurent*. A série que representa  $f_+(z)$  é chamada *parte regular* da série de Laurent, e a série que representa  $f_-(z)$ , que contém apenas expoentes negativos, é chamada *parte principal*.



Vice-versa,

**Teorema 6.1** (Laurent). *Uma função  $f(z)$  holomorfa no anel  $A_{r,R}(p)$  admite uma expansão em série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n \quad (6.1)$$

em torno de  $p$ . Os coeficientes  $c_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , são dados pelos integrais

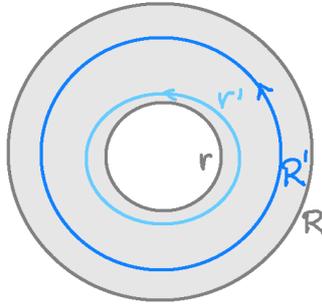
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz \quad (6.2)$$

onde  $r < \rho < R$ .

*Demonstração.* Para simplificar as fórmulas, podemos assumir, modulo uma translação, que  $p = 0$ . Se  $z \in A_{r,R}(0)$  e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, pela fórmula de Cauchy 5.2 e pelo teorema de Cauchy 4.19

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw \end{aligned}$$

onde os raios  $r < r' < R' < R$  são tais que  $D_\varepsilon(z) \subset A_{r',R'}(0)$  (fazer um desenho).



O primeiro integral, sendo  $|z/\omega| < 1$ , é igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{1}{\omega} \frac{f(\omega)}{1 - \frac{z}{\omega}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \left( \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega}\right)^n \right) f(\omega) d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega \right) z^n \end{aligned}$$

O segundo integral, sendo  $|\omega/z| < 1$ , é igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{1}{z} \frac{f(\omega)}{1 - \frac{\omega}{z}} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \left( \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{z}\right)^n \right) f(\omega) d\omega \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{f(\omega)}{\omega^{-n+1}} d\omega \right) z^{-n} \end{aligned}$$

(a troca entre integrais e somas é justificada pelo teorema 4.8). □

**Soma da série geométrica.** Por exemplo, a função  $f(z) = 1/(1-z)$ , holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , é representada pela série (de Taylor) geométrica

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

no disco unitário  $\mathbb{D}$ , e pela série de Laurent

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots \end{aligned}$$

no anel  $|z| > 1$  (o disco unitário na variável/coordenada  $w = 1/z$  da esfera de Riemann).

**Desigualdades de Cauchy.** Também os coeficientes da série de Laurent (6.1) podem ser estimados pelas desigualdades de Cauchy: se  $\sup_{z \in \partial D_\rho(p)} |f(z)| \leq M$ , então

$$\boxed{|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}} \quad (6.3)$$

**ex:** Determine séries de Laurent das seguintes funções em anéis oportunos

$$e^{1/z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{e^z}{z^2}$$

**ex:** Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 das seguintes funções

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} \quad \frac{1}{z(z-1)} \quad \frac{z-1}{z+1} \quad z \sin(1/z)$$

## 6.2 Singularidades isoladas

É conveniente classificar as singularidades isoladas de uma função holomorfa de acordo com o seu desenvolvimento em série de Laurent.

**Singularidades isoladas.** Um ponto  $p \in \mathbb{C}$  é uma *singularidade isolada* de  $f(z)$  se  $f(z)$  é uma função holomorfa em um disco perfurado  $D_R(p) \setminus \{p\}$  com  $\rho > 0$ . Pelo teorema de Laurent 6.1,  $f(z)$  admite a representação

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n \quad (6.4)$$

eml  $0 < |z-p| < \rho$ , sendo os coeficientes  $c_n$ 's dados pela (6.2).

Um ponto da região de analiticidade é trivialmente uma singularidade isolada, e não

A *ordem* de  $f$  na singularidade isolada  $p$  é

$$\text{ord}(f, p) := \inf \{k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } c_k \neq 0\},$$

onde, por definição, o ínfimo do subconjunto vazio dos números inteiros é  $+\infty$ .

**Singularidades essenciais.** A singularidade isolada  $P$  é *essencial* quando  $\text{ord}(f, p) = -\infty$ , ou seja, quando  $c_n \neq 0$  para infinitos  $n$  negativos.

Por exemplo,

$$e^{1/z} = \dots + \frac{1}{6} z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-2} + z^{-1} + 1$$

tem uma singularidade essencial na origem.

**Singularidades removíveis e zeros.** A singularidade isolada  $p$  é *removível* se  $\text{ord}(f, p) = n \geq 0$ , ou seja, se a série de Laurent (6.4) não contém expoentes negativos. Neste caso  $f(z)$  admite uma extensão holomorfa em todo o disco  $D_\rho(p)$ , definida por  $f(p) = c_0$  (o que explica a palavra “removível”).

Por exemplo, a função

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \dots$$

tem uma singularidade removível na origem.

Em particular, se  $0 < \text{ord}(f, p) = n < \infty$ , então  $f(z)$  tem um zero de multiplicidade  $n$  em  $p$ , pois a sua série de Laurent é da forma

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n(z-p)^n + c_{n+1}(z-p)^{n+1} + \dots \\ &= (z-p)^n (c_n + c_{n+1}(z-p) + \dots) \end{aligned}$$

e portanto a função fatoriza como produto

$$f(z) = (z-p)^n g(z) \tag{6.5}$$

onde  $g(z) = c_n + c_{n+1}(z-p) + \dots$  é holomorfa e não nula numa vizinhança de  $p$ . O caso  $\text{ord}(f, p) = \infty$  é o caso trivial da função constante e igual a zero.

Por exemplo, a função  $f(z) = z^k$  tem um zero de ordem  $k \geq 1$  na origem (chamado “zero simples” se  $k = 1$ , “zero duplo” se  $k = 2, \dots$ ).

As singularidades removíveis são detetadas pelo seguinte

**Teorema 6.2** (Riemann). *Uma singularidade isolada  $p$  de uma função holomorfa  $f(z)$  é removível sse  $f(z)$  é limitada numa vizinhança de  $p$ .*

*Demonstração.* Se  $|f(z)| < M$  numa vizinhança perfurada  $D_R(p) \setminus \{p\}$  de  $p$ , então pelas desigualdades de Cauchy (6.3)

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\varepsilon} (z-p)^{n-1} f(z) dz \right| \leq M\varepsilon^n$$

se  $n = 1, 2, \dots$ , e  $\varepsilon > 0$  é um raio arbitrariamente pequeno. Consequentemente, todos os coeficientes negativos da série de Laurent de  $f$  em torno de  $p$  são nulos. A série de Laurent  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$ , que é uma série de Taylor, define portanto uma extensão holomorfa de  $f$  no disco  $D_\rho(p)$ . A outra implicação é trivial.  $\square$

Um corolário surpreendente diz que uma função holomorfa assume “todos os valores” numa vizinhança de uma singularidade essencial, e, em particular, não admite limite. Mais precisamente, se  $p$  é uma singularidade essencial de  $f(z)$ , então para todo número complexo  $\alpha$  e toda precisão  $\varepsilon > 0$  existe um ponto  $z$  numa vizinhança arbitrariamente pequena de  $p$  tal que  $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ .

**Teorema 6.3** (Casorati-Weierstrass). *Se  $p$  é uma singularidade essencial de  $f(z)$ , e  $r > 0$  é suficientemente pequeno (assim que o disco perfurado  $D_r(p) \setminus \{p\}$  está no domínio de  $f$ ), então a imagem  $f(D_r(p) \setminus \{p\})$  é densa no plano complexo  $\mathbb{C}$ .*

*Demonstração.* Caso contrário, existem um ponto  $\alpha \in \mathbb{C}$  e um raio  $\varepsilon > 0$  tais que a imagem do disco perfurado omite uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $\alpha$ , i.e.  $f(D_r(p) \setminus \{p\}) \subset \mathbb{C} \setminus D_\varepsilon(\alpha)$ . Isto implica que a função  $g(z) := 1/(f(z) - \alpha)$ , holomorfa em  $D_r(p) \setminus \{p\}$ , é limitada por  $|g(z)| < 1/\varepsilon$ . Pelo teorema de Riemann 6.2,  $p$  é uma singularidade removível de  $g(z)$ , ou seja,  $\text{ord}(g, p) \geq 0$ . Consequentemente, a função  $f(z) = \alpha + 1/g(z)$  tem, no máximo, um pólo de ordem finito em  $p$ , contrariamente à hipótese.  $\square$

**Pólos e funções meromorfas.** Finalmente, a singularidade isolada  $p$  é um *pólo* de  $f(z)$  se a ordem  $\text{ord}(f, p)$  é finita e negativa. Em particular, é um pólo de *multiplicidade*  $m = 1, 2, 3, \dots$  (simples, dúplo, triplo, ...) quando  $-\infty < \text{ord}(f, p) = -m < 0$ , e portanto  $f(z)$  é representada por uma série de Laurent “finita” (contendo um número finito e não nulo de potências negativas)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-p)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n \\ &= \frac{1}{(z-p)^m} (c_{-m} + c_{-m+1}(z-p) + \dots) \end{aligned}$$

e conseqüentemente fatoriza como produto

$$f(z) = (z-p)^{-m} g(z) \quad (6.6)$$

onde  $g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-p) + \dots$  é uma função holomorfa numa vizinhança de  $p$  e não nula em  $p$  (pois  $g(p) = c_{-m} \neq 0$ ).

Em particular,  $p$  é um pólo de  $f(z)$  sse  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = \infty$  (pelo teorema 6.3).

Por exemplo,

$$f(z) = 1/z^k$$

com  $k \geq 1$  tem um pólo de multiplicidade  $k$  na origem.

Uma função que é holomorfa em uma região  $\Omega$  exceto em um certo número de pólos  $p_1, p_2, p_3, \dots$  (necessariamente isolados) é dita *meromorfa*. Exemplos são as funções racionais, que têm pólos nos zeros do denominador.

**ex:** Determine as singularidades isoladas e a natureza de

$$\frac{e^z}{z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{1}{z^2} \quad ze^{1/z} \quad \frac{e^{3z}}{z^2 - 2z - 3}$$

**ex:** Mostre que  $e^z$ ,  $\sin(z)$  ou  $\cos(z)$  têm singularidades essenciais em  $\infty$ .

**ex:** Mostre que uma função inteira com uma singularidade não essencial em  $\infty$  é um polinômio.

### 6.3 Teorema e cálculo dos resíduos

Os integrais de contorno das funções meromorfas podem ser calculados somando os coeficientes do termo de grau  $-1$  do desenvolvimento em séries de Laurent da função em torno das singularidade contidas no interior da curva.

**Resíduos.** Se  $p$  é uma singularidade isolada da função holomorfa  $f(z)$ , e

16 nov 2020

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n$$

em um disco perfurado suficientemente pequeno em torno de  $p$ , então o integral ao longo de uma circunferência de raio  $\rho$  suficientemente pequeno em torno de  $p$  é uma sobreposição de integrais de potências de  $(z-p)$

$$\oint_{|z-p|=\rho} f(z) dz = \oint_{|z-p|=\rho} \left( \dots + \frac{c_{-2}}{(z-p)^2} + \frac{c_{-1}}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots \right) dz$$

pois soma e integral comutam dentro do anel de convergência da série de Laurent. Todas as potências  $(z-p)^n$  têm primitiva, exceto quando  $n = -1$ . Portanto, na soma acima apenas sobrevive o integral do termo com expoente  $-1$  (a derivada do logaritmo), que vale

$$\oint_{|z-p|=\rho} \frac{c_{-1}}{z-p} dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Este cálculo justifica a seguinte definição. O *resíduo* da função holomorfa  $f(z)$  na singularidade isolada  $p$  é o coeficiente

$$\boxed{\text{Res}(f, p) := c_{-1}}$$

da sua série de Laurent (6.4) em torno de  $p$ . De acordo com o cálculo que fizemos, o resíduo é também igual ao integral

$$\boxed{\text{Res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} f(z) dz}$$

se  $\rho$  é suficientemente pequeno. O interesse está precisamente na possibilidade de calcular este integral apenas identificando um dos coeficientes do desenvolvimento de  $f(z)$  em série de Laurent. Naturalmente, o resíduo em uma singularidade removível é nulo.

**Cálculo dos resíduos.** O cálculo dos resíduos pode ser simplificado se a singularidade não é essencial, ou seja, se é um pólo (o caso de uma singularidade removível sendo trivial).

Se  $p$  é um pólo *simples* de  $f$ , i.e.  $\text{ord}(f, p) = -1$ , e portanto

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots$$

então é claro que

$$\boxed{\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} (z-p)f(z)}$$

Neste caso, é também útil observar que, se  $g(z)$  é uma função holomorfa em uma vizinhança de  $p$ , então

$$\boxed{\text{Res}(fg, p) = g(p) \text{Res}(f, p)}$$

Se  $p$  é um pólo *duplo* de  $f$ , i.e.  $\text{ord}(f, p) = -2$ , então

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-p)^2} + \frac{c_{-1}}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots$$

e portanto é imediato verificar que

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{d}{dz} ((z-p)^2 f(z)).$$

Em geral, se  $p$  é um pólo de multiplicidade  $m > 0$  de  $f(z)$ , i.e.  $\text{ord}(f, p) = -m$ , e portanto  $f(z)$  é da forma (6.6) numa vizinhança de  $p$ , então

$$\boxed{\text{Res}(f, p) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-p)^m f(z))}$$

Outra observação útil é a seguinte. Se  $f(z)$  tem um zero simples em  $p$ , i.e. é da forma

$$f(z) = c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots$$

com  $c_1 = f'(p) \neq 0$ , então a função  $h(z) = 1/f(z)$  tem um pólo simples em  $p$ . Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{z \rightarrow p} (z-p)h(z) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{z-p}{f(z)} = \frac{1}{f'(p)}.$$

Consequentemente,

$$\boxed{\text{Res}(1/f, p) = 1/f'(p)}$$

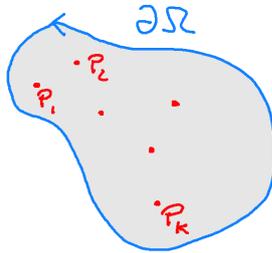
**Covariância.** De acordo com a fórmula (4.6), melhor seria dizer que o resíduo é um invariante da forma  $f(z) dz$ , e não da função  $f(z)$ , e portanto utilizar a notação  $\text{Res}(f(z) dz, p)$  para o resíduo. Lamentavelmente, esta não é a notação tradicional.

**Teorema dos resíduos.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região limitada, cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma curva de Jordan. Seja  $f$  uma função holomorfa numa vizinhança de  $\overline{\Omega}$  exceto num número finito de singularidades isoladas  $p_1, p_2, \dots \in \Omega$ . Então o teorema de Cauchy 4.21, aplicado ao domínio obtido ao retirar de  $\Omega$  uns discos suficientemente pequenos  $D_\rho(p_k)$  centrados nos  $p_k$ 's, implica o seguinte

**Teorema 6.4** (teorema dos resíduos). *Se  $f$  é holomorfa em  $\Omega \subset \mathbb{C}$  exceto em um número finito de singularidades isoladas  $p_1, p_2, \dots \in \Omega$ , então*

$$\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_k \text{Res}(f, p_k) \quad (6.7)$$

Ou seja, o cálculo dos resíduos nas singularidades isoladas permite calcular o integral de contorno. A fórmula integral de Cauchy (5.2) é um caso particular de (6.7).



**ex:** Calcule os resíduos das seguintes funções nos pontos singulares

$$\begin{array}{ccccc} \frac{e^z}{z} & \frac{1}{(z-1)(z-2)} & \frac{1}{z^2} & ze^{1/z} & \frac{e^{3z}}{z^2 - 2z - 3} \\ \frac{e^{\pi z}}{z-i} & \frac{\cos(z)}{z^2} & \frac{z^2}{\sin(z)} & \frac{\sin(z)}{z^3} & \end{array}$$

**ex:** Calcule os integrais

$$\begin{array}{ccc} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz & \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz & \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz \\ \oint_{|z|=R} e^{1/z^2} dz & \oint_{|z|=2} \frac{z-3}{z(z-1)} dz & \oint_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2-2z-3} dz \end{array}$$

**Resíduo no infinito.** Se  $f(z)$  é analítica em  $|z| > R$  e tem uma singularidade isolada em  $z = \infty$  (ou seja, se a função  $g(w) = f(1/w)$  tem uma singularidade isolada na origem), então o seu *resíduo no infinito* é definido por

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz$$

onde  $\rho > R$  (o sinal negativo não é um lapsos!). Portanto, se  $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$  é a série de Laurent que representa  $f(z)$  no disco  $|z| > R$  da esfera de Riemann, então  $\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$ . Observe que esta definição bate certo com o cálculo formal  $dz/z = -dw/w$ , sendo  $w = 1/z$  a coordenada local numa vizinhança do ponto  $z = \infty$  da esfera de Riemann e  $g(w) := f(1/w)$ . Ou seja, em uma notação correta mas infelizmente não tradicional,  $\text{Res}(f(z) dz, \infty) = \text{Res}(g(w) dw, 0)$ .

Por exemplo, o resíduo no infinito da função  $f(z) = e^{1/z}$  é igual a  $-1$ .

O teorema dos resíduos 6.4, aplicado a um disco suficientemente grande, então implica o seguinte

**Teorema 6.5.** *Se  $f(z)$  é uma função holomorfa em todo o plano complexo exceto em um número finito de singularidades isoladas  $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{C}$ , então*

$$\sum_k \text{Res}(f, p_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0$$

**ex:** Calcule os integrais

$$\oint_{|z|=10} \frac{dz}{1+z^{11}} \quad \oint_{|z|=7} \frac{6z}{1+z^{11}} dz$$

## 6.4 Princípio do argumento

O integral da derivada logarítmica de uma função permite calcular o número de voltas que o seu argumento dá em torno da origem.

**Princípio do argumento e teorema de Rouché.** Um corolário interessante do teorema dos resíduos é a possibilidade de contar zeros e pólos de uma função  $f$  integrando a sua derivada logarítmica  $f'/f$ . Se  $\gamma$  é um contorno fechado simples, e  $\Gamma = f \circ \gamma$  é sua imagem pela função  $f$ , então o integral da derivada logarítmica de  $f$  é

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \text{Ind}(\Gamma, 0),$$

onde  $w = f(z)$ . Informalmente, é “o número de voltas que o argumento de  $f(z)$  dá em torno da origem quando  $z$  percorre a curva  $\gamma$ ”.

**Teorema 6.6** (princípio do argumento). *Seja  $\Omega$  o interior do contorno fechado simples  $\gamma$ , e seja  $f(z)$  uma função meromorfa numa vizinhança de  $\Omega$ . Se  $f(z)$  não tem zeros nem polos na curva  $\gamma$ , e se  $z_1, z_2, \dots$  são os seus zeros e  $p_1, p_2, \dots$  são os seus pólos em  $\Omega$ , então*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k \text{ord}(f, z_k) + \sum_k \text{ord}(f, p_k).$$

*Demonstração.* A derivada logarítmica  $f'/f$  é holomorfa em todos os pontos de  $\Omega$  exceto nos zeros e nos pólos de  $f$ .

Se  $p$  é um zero de  $f$  de ordem  $k \geq 1$ , então  $f(z) = (z-p)^k g(z)$  com  $g$  holomorfa e não nula numa vizinhança de  $p$ . Consequentemente, a derivada logarítmica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

tem um pólo simples em  $p$  com resíduo  $k$ .

Se  $p$  é um pólo de  $f$  de ordem  $k \geq 1$ , então  $f(z) = (z-p)^{-k} g(z)$  com  $g$  holomorfa e não nula numa vizinhança de  $p$ . Consequentemente, a derivada logarítmica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

tem um pólo simples em  $p$  com resíduo  $-k$ .

O teorema segue aplicando o teorema dos resíduos 6.4. □

Uma consequência é o

**Teorema 6.7** (Rouché). *Seja  $\Omega$  o interior do contorno fechado simples  $\gamma$ , e sejam  $f(z)$  e  $g(z)$  duas funções holomorfas numa vizinhança de  $\Omega$  tais que*

$$|f(z)| > |f(z) - g(z)|$$

*nos pontos da curva  $\gamma$ . Então  $f$  e  $g$  têm o mesmo número de zeros em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* É claro que nem  $f$  nem  $g$  podem ter zeros em  $\gamma$ . Seja  $h(z) := g(z)/f(z)$ , cuja derivada logarítmica é  $h'/h = g'/g - f'/f$ . A hipótese também implica que

$$|h(z) - 1| < 1$$

nos pontos de  $\gamma$ , e portanto que a curva  $\Gamma = h \circ \gamma$  está contida no disco  $D_1(1)$ . Mas

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \oint_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \oint_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

e o primeiro integral é zero porque a curva  $\Gamma$  não contém a origem no seu interior. O teorema é portanto consequência do 6.6.  $\square$

Uma aplicação útil do teorema de Rouché é a seguinte, juntamente com o seu corolário.

**Teorema 6.8** (Hurwitz). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região e  $(f_n)$  uma sucessão de funções holomorfas  $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$  que converge para  $f$  uniformemente em cada compacto de  $\Omega$ . Seja  $\overline{D_\rho(p)} \subset \Omega$  um disco fechado tal que  $f(z)$  não se anula na fronteira  $\partial D_\rho(p)$ . Então  $f_n$  e  $f$  têm o mesmo número de zeros no disco  $D_\rho(p)$  se  $n$  é suficientemente grande.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  o mínimo de  $|f(z)|$  na circunferência  $\partial D_\rho(p)$ . Pela convergência uniforme existe  $\bar{n}$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/2$  se  $z \in \overline{D_\rho(p)} \subset \Omega$  e  $n \geq \bar{n}$ . Então  $|f(z) - f_n(z)| < |f(z)|$  em  $\partial D_\rho(p)$  se  $n \geq \bar{n}$ . O teorema segue do teorema de Rouché 6.7.  $\square$

Em particular, se as  $f_n$  não têm zeros e o limite  $f$  não é identicamente nulo (logo tem zeros isolados) então também  $f$  não tem zeros. Mas se de uma função injetiva retiramos um dos seus valores obtemos uma função sem zeros. Uma consequência é então o seguinte resultado importante, também conhecido como “teorema de Hurwitz”.

**Teorema 6.9** (Hurwitz). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região e  $(f_n)$  uma sucessão de funções holomorfas e injetivas  $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$  que converge para  $f$  uniformemente em cada compacto de  $\Omega$ . Então  $f$  é constante ou injetiva.*

**Raízes de polinômios, mais uma vez.** O teorema de Rouché pode ser usado para contar os zeros de uma função holomorfa dentro de regiões do plano, comparando com funções compreensíveis. Em particular para dar outra prova do teorema fundamental da álgebra.

Por exemplo, seja  $g(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0$  um polinômio mônico de grau  $n$ . O polinômio  $z^n$  tem exatamente  $n$  zeros, concentrados na origem, e o seu módulo na esfera  $S_R(0)$  vale  $|z^n| = R^n$ . É possível escolher o raio  $R$  tão grande que os  $n$  coeficientes  $c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$  são limitados por  $|c_k| < R^{n-k}/n$ . Então

$$|z^n - g(z)| \leq |c_{n-1}z^{n-1}| + \dots + |c_1z| + |c_0| < R^n = |z^n|$$

nos pontos da esfera  $S_R(0)$ . Pelo teorema de Rouché 6.7,  $g(z)$  tem também  $n$  raízes dentro do disco  $D_R(0)$ .

Um polinômio genérico  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  de grau  $n$  (e portanto com  $a_n \neq 0$ ) tem as mesmas raízes do polinômio mônico  $g(z) = f(z)/a_n = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$  com coeficientes  $c_k = a_k/a_n$ . Consequentemente, todo polinômio de grau  $n$  admite exatamente  $n$  raízes.

## 6.5 Cálculo de integrais reais

O teorema dos resíduos permite desenvolver uma série de técnicas e truques para calcular integrais definidos, ou impróprios, reais (mas não primitivas!).

**Integrais de funções racionais de cos e sin.** Se  $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$  é uma função racional de cos e sin, então a substituição  $z = e^{i\theta}$  transforma o integral de  $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$  entre 0 e  $2\pi$  no integral de contorno

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \oint_{|z|=1} F(z) \frac{dz}{iz}$$

onde  $F$  é a função racional

$$F(z) := f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right),$$

pois  $\cos(\theta) = (z+1/z)/2$ ,  $\sin(\theta) = (z-1/z)/2i$  e  $dz/iz = d\theta$ . O segundo integral pode então ser calculado somando  $2\pi i$  vezes os resíduos da função integranda  $g(z) = F(z)/iz$  nos pontos singulares no disco unitário  $\mathbb{D}$  (se  $f$  não tem pólos na circunferência unitária  $\partial\mathbb{D}$ ).

**ex:** Mostre que, se  $a > b > 0$ ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

**ex:** Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)} \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{3 - \cos(\theta)} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin(\theta)} \quad \text{com } a > b > 0$$

**ex:** O núcleo de Poisson no disco unitário  $\mathbb{D}$  é

$$P_r(\theta) := \Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$$

com  $0 \leq r < 1$ . Mostre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$$

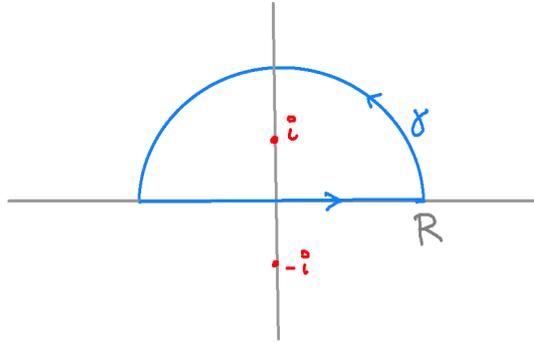
**Integrais impróprios de funções racionais.** Seja  $f(x) = g(x)/h(x)$  uma função racional, quociente entre os polinômios  $g(x)$  e  $h(x)$ , sem zeros comuns. Assumimos que o seu integral impróprio na reta real seja absolutamente convergente, ou seja,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ . O integral impróprio é convergente se  $f(z)$  não tem singularidades no eixo real, e se  $\deg(h) > \deg(g) + 1$ , ou seja, se  $\infty$  é um zero de ordem  $\text{ord}(f, \infty) > 1$  de  $f$ , e portanto

$$|f(z)| \leq \frac{C}{R^2} \tag{6.8}$$

se  $|z| = R$  é suficientemente grande. Então o integral impróprio de  $f$  pode ser calculado somando  $2\pi i$  vezes os resíduos de  $f$  no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , i.e.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, p)}$$

De fato, pelo teorema dos resíduos 6.4, o segundo membro é igual ao integral  $\oint_{\gamma} f(z) dz$  ao longo do contorno  $\gamma$  formado pelo segmento  $[-R, R] \subset \mathbb{R}$  e pela semi-circunferência  $S_R^+ = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$ , quando  $R$  é suficientemente grande. Mas o integral  $\int_{S_R^+} f(z) dz \rightarrow 0$  no limite quando  $R \rightarrow \infty$ , pois o integrando é limitado por  $|f(z)| \leq C/R^2$ , e o comprimento do contorno  $S_R$  é igual a  $\pi R$ .



**Integral do núcleo de Poisson.** A função racional  $f(z) = 1/(z^2 + 1)$  tem dois pólos simples nos pontos  $\pm i$ . Pelo teorema dos resíduos, o seu integral ao longo do contorno  $\gamma$  na figura, se  $R \gg 1$ , é igual ao seu resíduo em  $i$ , que é

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i}$$

O integral ao longo da semi-circunferência  $S_R^+$  tende para zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Consequentemente, passando ao limite quando  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi.$$

**ex:** O núcleo de Poisson no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  é

$$P_y(x) := \frac{y}{x^2 + y^2}$$

com  $y > 0$ . Deduza que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) dx = 1.$$

(os probabilistas chamam *distribuição de Cauchy* a função  $P_y(x)/\pi$ , que é a densidade de probabilidades de uma variável aleatória que é o quociente de duas variáveis normais independentes).

**Integrais impróprios de produtos de funções racionais e trigonométricas.** A mesma técnica pode ser utilizada para calcular integrais impróprios do género

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx \quad (6.9)$$

onde  $f(x)$  é uma função racional, parte real e parte imaginária do integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx.$$

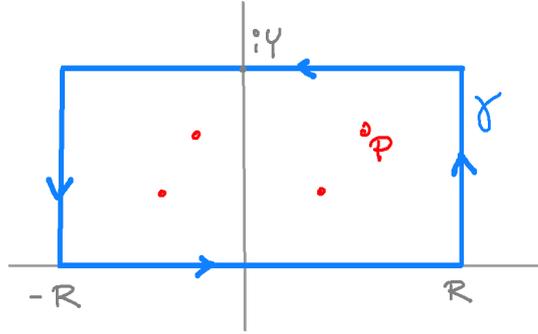
De fato,  $|f(z)e^{i\alpha z}| \leq |f(z)|$  se  $\Im(z) > 0$  e  $\alpha > 0$ .

Menos óbvio é que estes integrais podem ser calculados também quando  $\infty$  é um zero simples de  $f$ , i.e. quando  $\text{ord}(f, \infty) = 1$ , e portanto podemos apenas estimar

$$|f(z)| \leq \frac{C}{R}$$

quando  $|z| = R$  é suficientemente grande. O que ajuda, neste caso, são as oscilações das funções trigonométricas.

Uma possibilidade é integrar a função meromorfa  $F(z) := f(z) e^{i\alpha z}$  ao longo de um retângulo  $\gamma$  de vértices  $-R, R, R + iY, -R + iY$ .



Se  $R$  e  $Y$  são suficientemente grandes, então o interior do retângulo contém todos os pólos de  $F(z)$  no semi-plano superior (estamos a assumir que não há pólos no eixo real!). Por outro lado, os valores absolutos dos integrais ao longo dos lados verticais e do lado superior do retângulo são limitados por

$$\left| \int_0^Y f(\pm R + iy) e^{i\alpha(\pm R + iy)} dy \right| \leq \frac{C}{R} \int_0^Y e^{-\alpha y} dy \leq \frac{C}{R} \frac{1 - e^{-\alpha Y}}{\alpha}$$

ou

$$\left| \int_{-R}^R f(x + iY) e^{i\alpha(x + iY)} dx \right| \leq e^{-\alpha Y} \frac{C}{Y} 2R \leq \frac{e^{-\alpha Y}}{Y} 2R,$$

respetivamente. Passando ao limite quando  $Y \rightarrow \infty$  e depois quando  $R \rightarrow \infty$ , o resultado é que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(F, p)}$$

As partes real e imaginária deste integral são os integrais impróprios (6.9).

Se  $\alpha < 0$ , é necessário escolher o retângulo oposto, i.e. com  $Y < 0$ , e portanto somar os resíduos nos pólos contidos no semi-plano inferior.

A mesma conclusão pode ser obtida usando a seguinte observação, de interesse independente.

**Teorema 6.10** (lema de Jordan). *Sejam  $\alpha > 0$  e  $S_R^+ = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$  a semi-circunferência superior. Se  $f(z)$  é holomorfa no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  exceto, possivelmente, em um número finito de singularidades isoladas, e  $M(R) := \sup_{z \in S_R^+} |f(z)| \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ , então*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S_R^+} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

*Demonstração.* A concavidade da função  $\sin(t)$  no intervalo  $[0, \pi/2]$  implica a desigualdade

$$\frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq 1, \quad \text{se } 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Então, usando a simetria  $\sin(t) = \sin(\pi - t)$  no intervalo  $[0, \pi]$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_R^+} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq R M(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin(t)} dt = 2 R M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin(t)} dt \\ &\leq 2 R M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi} t} dt = M(R) \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \end{aligned}$$

Portanto, se  $\alpha > 0$  e  $M(R) \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ , este integral tende para 0.  $\square$

Se  $\alpha < 0$ , o teorema se aplica à semi-circunferência inferior  $S_R^- = \{Re^{it} : t \in [-\pi, 0]\}$ . Também, ao multiplicar por  $i$ , ou seja, ao fazer uma rotação de  $\pi/2$  e passando de  $\alpha \mapsto \beta = i\alpha$ , o teorema pode ser aplicado às semi-circunferências direita  $S_R^d = \{Re^{it} : t \in [-\pi/2, \pi/2]\}$  ou esquerda  $S_R^e = \{Re^{it} : t \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$ , dependendo do sinal de  $\beta$ .

**ex:** Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + \beta^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx$$

**ex:** Mostre que, se  $a > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx = \pi \frac{e^{-a}}{a} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}.$$

**ex:** Integre a função  $f(z) = e^{az}/(1 + e^z)$  ao longo do retângulo de vértices  $\pm R$  e  $\pm R + 2\pi i$ , e mostre que, se  $0 < a < 1$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

**ex:** Integre a função  $f(z) = e^{-2\pi i \xi z} / \cosh(\pi z)$  ao longo do retângulo de vértices  $\pm R$  e  $\pm R + 2i$ , e mostre que, se  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi \xi)}$$

(ou seja, a secante hiperbólica  $\operatorname{sech}(\pi x)$  é auto-dual para a transformada de Fourier).

**Valor principal de Cauchy.** Se a função  $f(x)$  tem pólos simples na reta real, então o integral impróprio

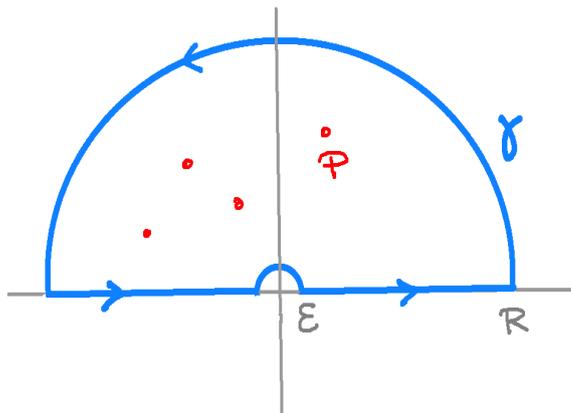
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

não é absolutamente convergente. No entanto, é possível e útil, por exemplo na teoria da transformada de Hilbert, definir e calcular os integrais “no sentido do valor principal”.

Por exemplo, se  $0 \in \mathbb{R}$  é o único pólo de  $f(z)$  na reta real, e é um pólo simples, então o *valor principal (de Cauchy)* do integral  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  é definido por

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |z| < R} f(x) dx$$

Seja  $\gamma$  o contorno obtido unendo os segmentos  $\varepsilon < |z| < R$  da reta real com as semi-circunferências  $S_R^+ = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$  e  $S_\varepsilon^+ = \{\varepsilon e^{it} : t \in [0, \pi]\}$ .



Assumimos que a função admite uma extensão  $f(z)$  que é holomorfa no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  exceto num número finito de singularidades isoladas. Se  $R$  é suficientemente grande e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, o teorema dos resíduos diz que

$$2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, p) = \int_{S_R^+} f(z) dz + \int_{\varepsilon < |z| < R} f(x) dx - \int_{S_\varepsilon^+} f(z) dz$$

O primeiro integral tende para 0 quando  $R \rightarrow \infty$  se  $f(z)$  satisfaz as hipóteses do lema de Jordan 6.10. O limite do último integral quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  pode ser calculado explicitamente. Se 0 é um pólo simples de  $f(z)$  com resíduo  $\text{Res}(f, 0) = c$ , então  $f(z) = c/z + g(z)$  onde  $g(z)$  é holomorfa numa vizinhança da origem. Então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^+} f(z) dz = c \int_{S_\varepsilon^+} \frac{dz}{z} = \pi i c,$$

pois o integral da parte holomorfa é limitado por  $M\pi\varepsilon \rightarrow 0$ , se  $M = \max_{|z| \leq \varepsilon} |g(z)|$ .

É evidente como generalizar esta fórmula ao caso de mais pólos simples na reta real: cada pólo na reta real conta “metade”, ou seja,  $\pi i$  vezes, o resíduo. O resultado é que, se  $f(x)$  admite uma extensão  $f(z)$  que é holomorfa no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  exceto num número finito de singularidades isoladas e que satisfaz as hipóteses do lema de Jordan 6.10, então

$$\boxed{\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, p) + \pi i \sum_{p \in \mathbb{R}} \text{Res}(f, p)}$$

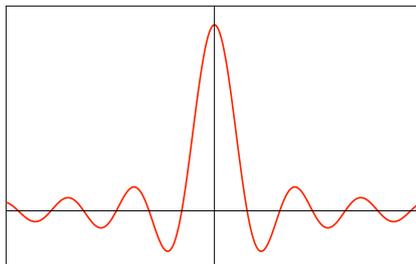
**ex:** Calcule

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x - a} dx \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x - a} dx$$

**Integral da função sinus cardinalis.** A função de Shannon, ou *sinus cardinalis*,

$$\text{sinc}(z) := \frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \dots$$

joga um papel importante em análise de Fourier (é a transformada de Fourier de uma função característica), em particular nas aplicações à teoria da informação e ao processamento de sinais digitais.



A origem é uma singularidade removível, e sinc é uma função inteira se o seu valor na origem for definido  $\text{sinc}(0) := 1$ . Os seus zeros são os múltiplos não triviais de  $\pi$ , e Euler provou que sinc é um produto infinito

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (6.10)$$

O seu integral impróprio

$$I := \int_0^{\infty} \text{sinc}(x) dx$$

não é absolutamente convergente. Por outro lado, o resíduo da função  $f(z) = e^{iz}/z$  em  $p = 0$  é  $\text{Res}(f, 0) = 1$ . Então

$$I = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{4i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (6.11)$$

**Resíduos e séries: alguns valores da função zeta de Riemann.** A função  $f(z) = \pi \cot(\pi z)$  tem pólos simples nos inteiros  $n \in \mathbb{Z}$ , com resíduos  $\text{Res}(f, n) = 1$ , e é uniformemente limitada nos lados do quadrado  $Q_R \subset \mathbb{C}$  de vértices  $\pm R \pm iR$  e  $\pm R \mp iR$ , com  $R \in \mathbb{N} + 1/2$ . Pelo teorema dos resíduos 6.4, se  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial Q_R} \frac{f(z)}{z^{2k}} dz = \text{Res}(f/z^{2k}, 0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

e portanto os valores da função zeta de Riemann  $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  (holomorfa no semi-plano  $\Re(s) > 1$ ) quando  $s = 2k = 2, 4, 6, \dots$  são

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{2} \text{Res}(f(z)/z^{2k}, 0)$$

Para calcular o resíduo de  $f(z)/z^{2k}$  em 0 é necessário calcular a série de Laurent da cotangente em um disco perfurado em torno da origem:

$$\begin{aligned} \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{1 - z^2/2 + z^4/24 - \dots}{z(1 - z^2/6 + z^4/120 - \dots)} \\ &= z^{-1}(1 - z^2/2 + z^4/24 - \dots)(1 + z^2/6 - 7z^4/360 + \dots) \\ &= z^{-1} - z/3 - z^3/45 - \dots \end{aligned}$$

Por exemplo,  $\text{Res}(f(z)/z^2, 0) = -\pi^2/3$ , e portanto

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (6.12)$$

(a solução do *problema de Basel*).

**ex:** Compare o coeficiente de  $z^2$  na série de Laurent de  $\sin(\pi z)/\pi z$  e o coeficiente de  $z^2$  no produto infinito em (6.10), e deduza a prova (original de Euler) da fórmula (6.12).

## 7 EDPs da física-matemática

### 7.1 Ondas

Um dos fenômenos fundamentais da natureza é a propagação das ondas (eletromagnéticas, sonoras, gravitacionais, ...).

**Operador de Laplace e funções harmônicas.** O *operador de Laplace*, ou *laplaciano*, no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é o operador diferencial  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \text{div} \circ \text{grad}$  (a divergência do gradiente), definido, se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duas vezes diferenciável no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , por

23 nov 2020

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Uma função que está no núcleo do laplaciano, ou seja, que satisfaz  $\Delta u = 0$  na região onde está definida, é chamada *função harmônica*.

O laplaciano é invariante por rotações e translações, ou seja, por isometrias do espaço euclidiano (sendo definido por operadores diferenciais, o gradiente e a divergência, que apenas dependem do produto escalar euclidiano e do volume euclidiano). Ou seja, se  $g(\mathbf{x}) := f(R\mathbf{x} - \mathbf{a})$ , onde  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  e  $R \in O(n)$  é uma matriz ortogonal, então  $(\Delta g)(\mathbf{x}) = (\Delta f)(R\mathbf{x} + \mathbf{a})$ . Em particular, as isometrias do espaço euclidiano enviam funções harmônicas em funções harmônicas.

**Equação de onda.** A *equação de onda* para o campo escalar  $u(\mathbf{x}, t)$ , com  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  (o espaço) e  $t \in \mathbb{R}$  (o tempo), é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (7.1)$$

onde a constante positiva  $c$  é a velocidade de propagação das ondas. A substituição  $\tau = ct$  transforma a equação de onda (7.1) em  $\partial^2 u / \partial \tau^2 - \Delta u = 0$ . Os físicos também usam a notação  $\square u = 0$ , onde  $\square := \partial^2 / \partial t^2 - \Delta$  é o *operador de d'Alembert*, em unidades em que  $c = 1$ .

A equação de onda é invariante por isometrias do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, se  $u(\mathbf{x}, t)$  é uma solução da equação de onda (7.1), então também  $v(\mathbf{x}, t) = u(R\mathbf{x} - \mathbf{a}, t)$  é solução, para todo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  e toda matriz ortogonal  $R \in O(n)$ .

A equação de onda é também invariante por homotetias do espaço-tempo. Ou seja, se  $u(\mathbf{x}, t)$  é uma solução da equação de onda (7.1), então também  $v(\mathbf{x}, t) = u(\lambda\mathbf{x}, \lambda t)$  é solução, para todo  $\lambda > 0$ .

**Ondas planas.** É imediato verificar que as *ondas planas*

$$u(\mathbf{x}, t) := e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções da equação de onda (7.1) se a frequência angular  $\omega$  e o vetor de onda  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  satisfazem a “relação de dispersão”

$$\omega^2 - c^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = 0.$$

que relaciona o número de onda  $\xi := \|\boldsymbol{\xi}\|$  com a frequência angular. O comprimento de onda e o período são  $\lambda = 2\pi/\xi$  e  $T = 2\pi/\omega$ , respectivamente. Soluções reais podem ser obtidas calculando a parte real ou imaginária, por exemplo,  $\cos(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ . O vetor unitário  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\xi}/\xi$  é a direção de propagação das ondas, e as frentes de ondas são hiperplanos ortogonais.

Pelo princípio de sobreposição, sendo a equação de onda linear, são também soluções sobreposições arbitrárias finitas de ondas planas

$$\sum_k A_k e^{i(\boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)}$$

**Ondas viajantes e solução de d'Alembert.** A equação de onda em dimensão um é

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad (7.2)$$

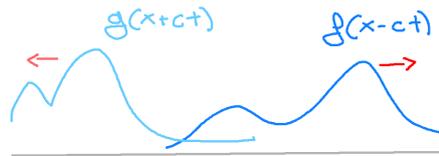
A mudança de variáveis independentes  $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ , onde  $\xi = x + ct$  e  $\eta = x - ct$ , transforma a equação de onda (7.2) na forma canônica

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (7.3)$$

para a função  $v(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ . É claro que toda solução de (7.3) é soma de uma função que apenas depende de  $\xi$  e uma função que apenas depende de  $\eta$ , ou seja, é uma sobreposição  $f(\xi) + g(\eta)$ , onde  $f(\xi)$  e  $g(\eta)$  são funções arbitrárias duas vezes diferenciáveis. Portanto, uma solução de (7.2) é uma sobreposição

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (7.4)$$

de duas *ondas viajantes* (em inglês, *traveling waves*) com velocidades  $\pm c$  e perfis “iniciais”  $f(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente.



É natural colocar o problema de resolver a equação das ondas (7.2) com certas “condições iniciais”

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (7.5)$$

(se pensamos na (7.2) como uma família infinita de equações de Newton, estas são as “posições” e as “velocidades” iniciais do campo  $u$ ) Ao substituir estas condições iniciais (7.5) na (7.4), temos o sistema

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \phi(x) \\ c(f'(x) - g'(x)) &= \psi(x) \end{aligned}$$

para as funções  $f$  e  $g$ . Integrando a segunda equação e resolvendo o sistema linear para  $f$  e  $g$ , obtemos a seguinte solução.

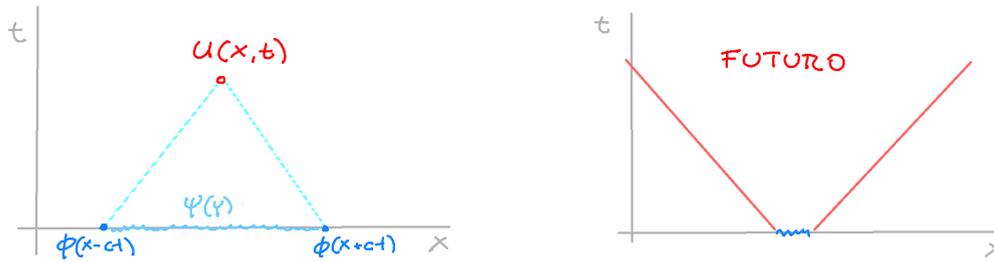
**Teorema 7.1** (fórmula de d'Alembert<sup>12</sup>). *Uma solução da equação de onda (7.2) na reta real com condições iniciais  $u(x, 0) = \phi(x)$  e  $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$  é dada por*

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy} \quad (7.6)$$

De fato, a solução de d'Alembert é única, mas a prova da unicidade depende de uma formulação apropriada do problema (o que é uma solução, e em que espaço procuramos soluções).

É importante observar que o valor  $u(x, t)$  da solução no ponto  $(x, t)$  do espaço-tempo depende apenas dos valores iniciais  $u(y, 0)$  nos pontos  $y = x \pm ct$  e dos valores iniciais da derivada  $\partial u / \partial t(y, 0)$  no intervalo  $y \in (x - ct, x + ct)$ . Em particular, uma perturbação inicial localizada num (uma vizinhança pequena de) o ponto  $(0, 0)$  do espaço-tempo apenas tem efeitos nos pontos do “cone futuro”  $C^+$ , os pontos do espaço-tempo tais que  $x^2 - c^2 t^2 \leq 0$  e  $t \geq 0$ .

<sup>12</sup>J.-B. le Rond D'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendu mise en vibration, *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin* 3 (1747), 214-219.



**ex:** Considere a mudança de coordenadas do plano  $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ , onde  $\xi = x + ct$  e  $\eta = x - ct$ . Verifique que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \frac{\partial}{\partial t} = c \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

Deduz a que (7.2) é equivalente a (7.3).

**ex:** Prove a fórmula de d'Alembert.

**ex:** Mostre que, se as condições iniciais  $\phi(x)$  e  $\psi(x)$  são nulas fora dum intervalo  $[-L, L]$ , então a solução  $u(x, t)$  é nula fora do intervalo  $[-L - ct, L + ct]$ , e dê uma interpretação.

**ex:** Determine uma solução quando as condições iniciais são

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(2\pi x),$$

ou

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

**ex:** Mostre que, se as condições iniciais  $u(x, 0) = \phi(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$  são funções ímpar, então a solução de d'Alembert  $u(x, t)$  é uma função ímpar de  $x$  para cada tempo  $t$ . Use esta observação para resolver o problema das ondas na semi-reta  $x \geq 0$  com condição de fronteira nula  $u(0, t) = 0$  (condições de fronteira de Dirichlet).

**Equações de Maxwell e ondas electromagnéticas.** O campo elétrico  $\mathbf{E}$  e o campo magnético  $\mathbf{B}$  “in vacuum” (numa região sem cargas nem correntes) satisfazem as *equações de Maxwell*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Os campos dependem das variáveis espaço-temporais  $t$  e  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Aplicando o operador rotacional  $\nabla \times$  às duas equações na esquerda (leis de Ampère e Faraday), usando a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$$

(onde  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  é o Laplaciano) e as equações de Maxwell à direita (leis de Gauss), deduzimos as equações de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = 0 \quad (7.8)$$

para os dois campos.

As “ondas planas”

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (7.9)$$

(ou a parte real  $\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  desta expressão se estamos interessados em soluções físicas) são soluções da equação de onda (7.8) desde que a “frequência (angular)”  $\omega$  e o “vetor de onda”  $\mathbf{k}$  satisfazam a “relação de dispersão”

$$\omega^2 - \|\mathbf{k}\|^2 = 0.$$

A lei de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  então diz que o vetor constante  $\mathbf{E}_0$  é ortogonal a  $\mathbf{k}$ . Observe que a velocidade de fase das ondas planas,  $v = \omega/\|\mathbf{k}\|$ , não depende da frequência  $\omega$ .

**ex:** Descreva os conjuntos de nível das ondas planas definidas acima para um tempo  $t$  fixado, depois descreva como mudam quando o tempo cresce. Justifique o nome “ondas planas”.

**ex:** Use a lei de Faraday para calcular o campo magnético

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

associado à solução (7.9). Use as leis de Gauss para verificar que os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são ortogonais, e oscilam no plano ortogonal ao vetor de onda  $\mathbf{k}$  (que é a direção de propagação da onda).

**Equação de Korteweg-de Vries.** Considere a equação de Korteweg-de Vries<sup>13</sup> (KdV)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (7.10)$$

que modela a propagação de ondas de comprimento grande em um meio dispersivo em dimensão um (por exemplo, a água em um canal pouco profundo). É imediato verificar que  $u(x, t) := \phi(x - vt - x_0)$  é uma solução da (7.10) se  $\phi$  é uma solução da EDO

$$-v\phi' + \phi''' + 6\phi\phi' = 0,$$

e portanto se existe uma constante  $c$  tal que  $\phi$  é uma solução da equação de Newton

$$\phi'' = -3\phi^2 + v\phi + c$$

A “secante hiperbólica”

$$\operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

é solução da EDO

$$f'' = -2f^2 + f$$

com condições de fronteira  $f(\pm\infty) = 0$ . Portanto,

$$u(x, t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right)$$

é uma solução da (7.10), que descreve uma “onda solitária” (*soliton*), localizada numa vizinhança de  $x_0 + vt$ , que viaja com velocidade  $v$ .



A grande onda de Kanagawa, de Katsushika Hokusai

Source: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great\\_Wave\\_off\\_Kanagawa2.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_Wave_off_Kanagawa2.jpg)

<sup>13</sup>D.J. Korteweg and G. de Vries, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Wave, *Philosophical Magazine* **39** (1894), 422-443

## 7.2 Corda vibrante e harmônicas

A corda vibrante, com as suas ondas estacionárias, é um dos modelos paradigmáticos da física-matemática, que motiva a análise de Fourier.

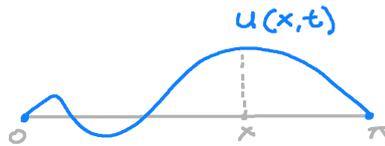
**Corda vibrante.** As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento  $\ell$ , tensão  $k$  e densidade linear  $\rho$  são modeladas pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7.11)$$

com condições de fronteira (chamadas *condições de Dirichlet*)

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t, \quad (7.12)$$

onde  $u(x, t)$  denota o deslocamento transversal da corda na posição  $x \in [0, \ell]$  e no tempo  $t$ , e  $c = \sqrt{k/\rho}$  é uma velocidade. Para ter fórmulas simples, consideramos  $\ell = \pi$  (que corresponde a uma mudança de variável  $x \mapsto x' = \pi x/\ell$ ).



Moralmente, a equação de onda (7.11) representa “infinitas equações de Newton”, uma para cada ponto  $x$  da corda vibrante (e de fato pode ser deduzida das equações de Newton de uma sequência de molas acopladas ...). A força que atua sobre a massa infinitesimal  $\rho dx$  colocada na posição  $x$  é  $k(\partial^2 u/\partial x^2) dx$ , e portanto depende da convexidade do perfil da corda neste ponto. É claro então que as soluções do problema da corda vibrante dependem das infinitas “posições” iniciais, o perfil inicial da corda, e das infinitas “velocidades” iniciais, as derivadas parciais do perfil em ordem ao tempo. Ou seja, o problema físico natural consiste em procurar soluções da equação de onda (7.11) com condições de fronteira (7.12) e dadas certas condições iniciais

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$$

onde  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  são funções arbitrárias (mas suficientemente regulares para terem sentido físico).

**Separação de variáveis e ondas estacionárias.** O método de *separação de variáveis* consiste em procurar soluções “separáveis”, ou seja, soluções da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

onde  $X(x)$  é uma função que apenas depende da coordenada espacial  $x$ , e  $T(t)$  é uma função que apenas depende da coordenada temporal  $t$ . É claro que as condições de fronteira (7.12) são condições sobre a função  $X(x)$ . A esperança é encontrar um número suficientemente grande de soluções, e que combinações lineares destas soluções aproximem, com precisão arbitrária, a solução geral.

O produto  $u(x, t) = X(x)T(t)$  é uma solução da equação de onda (7.11) se  $X T'' = c^2 X'' T$ , e portanto se

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (7.13)$$

(pelo menos nos pontos onde os denominadores não se anulam). A identidade (7.13) diz que  $T''/T$  e  $X''/X$  não dependem nem de  $x$  nem de  $t$ , logo que existe uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$X'' = \lambda X \quad \text{e} \quad T'' = \lambda c^2 T.$$

Assim, a equação diferencial parcial (7.11) é transformada numa família de equações diferenciais ordinárias, duas para cada valor possível de  $\lambda$ .

As únicas soluções não triviais do problema  $X'' = \lambda X$  no intervalo  $[0, \pi]$  com condições de fronteira nulas  $X(0) = X(\pi) = 0$  são proporcionais a

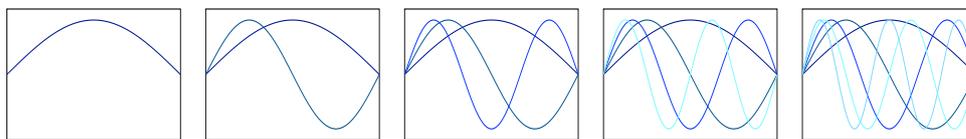
$$X_n(x) = \sin(nx)$$

e correspondem a valores de  $\lambda$  iguais a  $\lambda_n = -n^2$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Em outras palavras, os  $\lambda_n = -n^2$  e os  $\sin(nx)$  são os valores e os vetores próprios, respetivamente, do operador de Laplace  $\Delta$  definido no espaço das funções infinitamente deriváveis  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

Para cada um destes valores de  $\lambda = \lambda_n$ , a função  $T_n(t)$  é solução da equação do oscilador harmónico  $T_n'' = -n^2 c^2 T_n$  de frequência  $nc$ , logo combinação linear de  $\cos(nect)$  e  $\sin(nect)$ . As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left( a_n \cos(nect) + b_n \sin(nect) \right) \sin(nx) \\ &= A_n \sin(nct + \tau_n) \sin(nx) \end{aligned}$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , ou a amplitude  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  e a fase  $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$ , são constantes arbitrárias.



Primeiras 5 harmónicas de uma corda vibrante.

**ex:** Verifique que, se  $\lambda \geq 0$ , então toda solução de  $f''(x) = \lambda f(x)$  com  $f(0) = f(\pi) = 0$  é identicamente nula.

**ex:** Verifique que, se  $\lambda = -\omega^2 < 0$ , então as únicas soluções não triviais de  $f''(x) = \lambda f(x)$  com  $f(0) = f(\pi) = 0$  são proporcionais a  $\sin(\omega x)$ , com  $\omega = 1, 2, 3, \dots$

**Sobreposições.** A linearidade da equação de ondas implica o *princípio de sobreposição*: toda sobreposição de soluções ainda é uma solução. Em particular, uma sobreposição finita de ondas estacionárias

$$u(x, t) = \sum_n \left( a_n \cos(nect) + b_n \sin(nect) \right) \sin(2\pi x/\ell_n) \quad (7.14)$$

é uma solução de (7.11), e resolve o problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sum_n a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \sum_n n c b_n \sin(nx).$$

Vice-versa, se conseguirmos representar o perfil inicial  $u(x, 0)$  e a velocidade inicial  $\partial u/\partial t(x, 0)$  da corda como combinações lineares (finitas) de senos de  $nx$ , então a sobreposição (7.14) de ondas estacionárias é uma solução do problema da corda vibrante com estas condições iniciais.

**Harmónicas.** No caso geral em que o comprimento da corda é  $\ell$ , as ondas estacionárias são

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

onde as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n := n \frac{c}{2\ell} \quad \text{e} \quad \ell_n := \frac{2\ell}{n},$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , respetivamente. A primeira frequência,  $\nu_1 = c/\ell_1$ , é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras,  $\nu_n = n\nu_1 = c/\ell_n$ , com  $n = 2, 3, 4, \dots$ , são ditas *n-ésimas harmónicas* (ou *overtones*) da corda.

Por exemplo, se a fundamental é o  $A_4$  de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmónica é o  $A_5$  de 880 Hz, a terceira está próxima do  $E_6$  de 1318.5 Hz, a quarta é o  $A_6$  de 1760 Hz, a quinta está próxima do  $C\sharp_7$  de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do  $E_7$  de 2637 Hz, a sétima está próxima do  $G_7$  de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmónicas contêm a “fundamental” A, a “quinta justa” E e a “terça maior”  $C\sharp$ , as três notas (“tríade maior”) do “acorde maior”!



Primeiras 12 harmónicas de uma corda cuja fundamental é C.

**ex:** Determine as vibrações de uma corda de comprimento  $\ell = \pi$  dadas as condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = 2 \sin(4x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 \sin(x) - \sin(2x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \sin(3x).$$

**ex:** A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja,  $\simeq 7.1$  Kg), vibra com frequências próprias de 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

**Energia, unicidade e estabilidade.** A unicidade das soluções do problema da corda vibrante é consequência de um princípio físico: a conservação da energia. A *energia* de uma corda vibrante (ou melhor, de uma solução  $u(x, t)$  da corda vibrante) é

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

Se  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  para todos os tempos  $t$ , então a energia é uma constante do movimento, pois (integrando por partes)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= \int_0^\ell \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) dx \\ &= \left[ k \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^\ell + \int_0^\ell \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \int_0^\ell \rho \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0, \end{aligned}$$

porque  $u$  satisfaz a (7.11).

A unicidade pode ser enunciada num contexto muito mais geral, da seguinte forma.

**Teorema 7.2** (unicidade). *Existe no máximo uma solução de classe  $\mathcal{C}^2$  da equação da corda vibrante forçada*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

no intervalo  $[0, \ell]$ , dadas umas condições iniciais  $u(x, 0) = \varphi(x)$  and  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  e condições de fronteira  $u(0, t) = \lambda(t)$  e  $u(\ell, t) = \mu(t)$ .

*Demonstração.* A diferença  $w = u_1 - u_2$  entre duas soluções,  $u_1$  e  $u_2$ , é uma solução da equação de onda (7.11) com condições iniciais e de fronteira triviais. A energia de  $w$  é igual ao seu valor inicial, que é zero. Portanto  $\partial w/\partial x$  e  $\partial w/\partial t$  são identicamente nulas, e portanto  $w$  é constante e igual ao seu valor inicial, que também é nulo.  $\square$

No caso da corda infinita, ou seja, da equação das ondas na reta real, é possível obter a unicidade se as soluções se anulam fora dum intervalo compacto, ou se decrescem tão rapidamente que os integrais que definem a energia e a sua derivada em ordem ao tempo são absolutamente convergentes. Então a fórmula de d'Alembert também permite provar um resultado de “estabilidade”: erros pequenos nas condições iniciais produzem efeitos pequenos em tempos finitos. Isto acontece porque perturbações iniciais crescem apenas linearmente no tempo.

**Teorema 7.3** (estabilidade). *Para cada  $\varepsilon > 0$  e cada tempo  $T > 0$  existe um  $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$  tal que, se  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  são duas soluções da equação de onda (7.11) com condições iniciais que diferem por menos de*

$$|u_1(x, 0) - u_2(x, 0)| \leq \delta \quad e \quad \left| \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) \right| \leq \delta$$

então

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

para cada posição  $x \in \mathbb{R}$  e cada tempo  $0 \leq t \leq T$ .

*Demonstração.* Se os valores absolutos das condições iniciais  $u(x, 0)$  e  $\partial u/\partial t(x, 0)$  são limitadas por  $\delta$ , a fórmula de d'Alembert (7.6) diz que a solução da equação de onda na reta é limitada por  $|u(x, t)| \leq \delta + \delta t$ . Em particular, para tempos  $0 \leq t \leq T$ , a solução é limitada por  $\delta(1 + T)$ . Portanto, basta considerar  $\delta(\varepsilon, T) = \varepsilon/(1 + T)$ .  $\square$

**ex:** Mostre que a energia de uma onda estacionária

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n)$$

é dada por

$$E_n = \pi^2 M A_n^2 \nu_n^2,$$

onde  $M = \rho\ell$  é a massa da corda.

### 7.3 Equação de calor/difusão

A equação de calor é uma lei fenomenológica que modela a difusão ou a propagação de calor num meio homogêneo.

**Equação de calor/difusão.** Seja  $u(x, t)$  a densidade de soluto/calor numa solução/condutor unidimensional, dependendo da coordenada espacial  $x$  e do tempo  $t$ . Então a massa total de soluto/calor contida num intervalo infinitesimal  $[x, x + dx]$  é  $u dx$  e a sua variação no tempo é  $(\partial u/\partial t) dx$ . Mas esta variação é a soma algébrica entre os fluxos de soluto/calor que entram ou saem da fronteira do intervalo, os pontos  $x + dx$  e  $x$ . Em primeira aproximação, estes fluxos são proporcionais ao gradiente da densidade/temperatura (*lei de Fick/Fourier*). Consequentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \simeq \beta \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)$$

onde  $\beta$  é um coeficiente de difusão/condutividade térmica. Ao dividir por  $dx$  e ao fazer o limite quando  $dx \rightarrow 0$ , obtemos a lei

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A generalização em dimensão 3, ou em dimensão arbitrária, é a equação de difusão/calor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \Delta u} \quad (7.15)$$

onde o campo escalar  $u(\mathbf{x}, t)$  é definido para  $\mathbf{x}$  numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e tempos  $t > 0$ , e  $\Delta$  é o Laplaciano no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

O caso estacionário, i.e. independente do tempo, é modelado pela equação de Laplace  $\Delta u = 0$ . Assim, as soluções estacionárias da equação de calor são as funções harmónicas.

**ex:** Mostre que se  $u(\mathbf{x}, t)$  é uma solução da equação de calor (7.15), então também  $v(\mathbf{x}, t) := u(\sqrt{\lambda}\mathbf{x}, \lambda t)$  é solução, para todo  $\lambda > 0$  (invariância por quase-homotetias).

**ex:** Verifique que  $v(x, t) := f(x/\sqrt{t})$  é uma solução da equação de calor na reta se a função  $f(q)$  é solução da equação diferencial

$$f'' + \frac{q}{2}f' = 0$$

e portanto se  $f$  é uma primitiva de uma Gaussiana  $Ce^{-q^2/4}$ . Por exemplo, ao escolher  $C = 1$ ,

$$v(x, t) = \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-q^2/4} dq.$$

Verifique que também a sua derivada em ordem a  $x$ , ou seja, a Gaussiana

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}$$

é uma solução da equação de calor na reta.

**ex:** Verifique que

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor (7.15) no plano.

**Princípio do máximo, unicidade e estabilidade.** Dado um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , um problema natural é procurar soluções da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty)$$

dada uma “condição inicial”

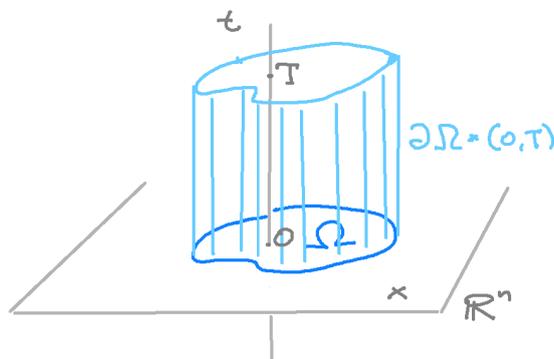
$$u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{em } \bar{\Omega} \times \{0\}$$

e umas “condições de fronteira”

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \partial\Omega \times [0, \infty)$$

(compatíveis com a condição inicial). As soluções “clássicas” são funções de classe  $\mathcal{C}^2$  no domínio  $\Omega \times (0, \infty)$  (mas é suficiente que sejam contínuas as derivadas parciais  $\partial u/\partial t$  e  $\partial^2 u/\partial x^2$ ) e contínuas na aderência  $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ .

A unicidade e a estabilidade das soluções da equação de calor em uma região limitada são consequências de um princípio físico intuitivo: um ponto interior de um condutor isolado no instante  $t > 0$  não pode ser mais quente ou mais frio do que era no instante inicial  $t = 0$ , ou dos pontos da fronteira do condutor. Dado um domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e um tempo finito  $T > 0$ , consideramos o cilindro  $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ , e a sua *fronteira parabólica*  $\partial_p \Omega_T := (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T])$  (ou seja, os pontos onde são dadas as condições iniciais e de fronteira).



**Teorema 7.4** (princípio do máximo). *Seja  $u(\mathbf{x}, t)$  uma solução de classe  $C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$  da equação de calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

*no cilindro  $\Omega_T$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado e  $f \leq 0$ . Então o máximo (e também o mínimo se  $f = 0$ ) de  $u$  em  $\overline{\Omega_T}$  é atingido na fronteira parabólica  $\partial_p \Omega_T$ .*

*Demonstração.* (em dimensão um) O primeiro passo consiste em provar a afirmação para a função  $v := u - \varepsilon t$ , com  $\varepsilon > 0$ , no cilindro menor  $\Omega_{T-\varepsilon}$ , que satisfaz a equação de calor

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f - \varepsilon < 0. \quad (7.16)$$

Seja  $(x_0, t_0)$  um ponto de máximo de  $v$  em  $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ . Se  $(x_0, t_0) \notin \partial_p \Omega_{T-\varepsilon}$ , então neste ponto as derivadas de  $v$  satisfazem  $v_x(x_0, t_0) = 0$  (porque  $x_0$  é um ponto interior de  $\Omega$ ) e

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0 \quad (7.17)$$

(porque  $t_0$  pode também ser igual a  $T - \varepsilon$ ). Pela fórmula de Taylor,

$$v(x, t_0) - v(x_0, t_0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\bar{x}, t_0)(x - x_0)^2 \leq 0$$

para algum ponto  $\bar{x}$  entre  $x$  e  $x_0$ . No limite quando  $x \rightarrow x_0$  temos portanto

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (7.18)$$

Mas as desigualdades (7.17) e (7.18) não são compatíveis com (7.16). Esta contradição prova que

$$\max_{\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}} v = \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} v.$$

A função  $u$  é limitada por

$$v \leq u \leq v + \varepsilon T \quad (7.19)$$

em  $\overline{\Omega_T}$ . A primeira das desigualdades (7.19) implica que

$$\max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} v \leq \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u$$

Usando também a segunda das desigualdades (7.19) e a continuidade (uniforme, pois estamos numa região compacta) de  $u$ , obtemos

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \max_{\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}} u \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \max_{\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}} (v + \varepsilon T) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} v + \varepsilon T \right) \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u$$

Se  $f = 0$ , a afirmação sobre o mínimo segue considerando o máximo de  $-u$ .  $\square$

Uma primeira consequência importante é o teorema de unicidade para as soluções da equação de calor num domínio limitado.

**Teorema 7.5** (unicidade). *Existe no máximo uma solução  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_T})$  da equação de calor não-homogénea*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f,$$

com  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega_T)$ , num domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dadas condições iniciais e de fronteira arbitrárias  $u = g$  em  $\partial_p \Omega_T$ , com  $g \in \mathcal{C}^0(\partial_p \Omega_T)$ .

*Demonstração.* A diferença entre duas soluções satisfaz a equação de calor homogénea e é nula na fronteira parabólica. Pelo princípio do máximo, o teorema 7.4, é identicamente nula.  $\square$

Outra consequência é um resultado de estabilidade.

**Teorema 7.6** (comparação e estabilidade). *Sejam  $u$  e  $v$  soluções de classe  $\mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_T})$  das equações de calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = g,$$

respetivamente, num domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

i) *Se  $u \geq v$  em  $\partial_p \Omega_T$  e  $f \geq g$ , então  $u \geq v$  em  $\Omega_T$ .*

ii) *A diferença entre  $u$  e  $v$  é limitada por*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} |u - v| \leq \max_{\partial_p \Omega_T} |u - v| + T \cdot \max_{\overline{\Omega_T}} |f - g|.$$

*Demonstração.* A primeira afirmação é uma consequência do princípio do máximo aplicado à função  $w := v - u$ , que satisfaz

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = g - f \leq 0$$

e é não positiva na fronteira parabólica.

Para provar a segunda afirmação, definimos  $M := \max_{\overline{\Omega_T}} |f - g|$ . As funções

$$w^\pm := \pm(v - u) - tM$$

satisfazem

$$w_t^\pm - \Delta w^\pm = \pm(g - f) - M \leq 0$$

e portanto o princípio do máximo 7.4. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega_T}} \pm(v - u) &= \max_{\overline{\Omega_T}} (tM + w^\pm) \\ &\leq \max_{\overline{\Omega_T}} tM + \max_{\overline{\Omega_T}} w^\pm \\ &\leq TM + \max_{\partial_p \Omega_T} (\pm(v - u) - tM) \\ &\leq TM + \max_{\partial_p \Omega_T} |v - u| \end{aligned}$$

$\square$

**Método da energia.** Se  $u(x, t)$  é uma solução da equação de calor homogênea (7.15) (por exemplo, com  $\beta = 1$ ) no intervalo  $[0, \ell]$  com condições de fronteira nulas  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ , então a energia

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_0^\ell u(x, t)^2 dx$$

é não-crescente, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= \int_0^\ell u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^\ell u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= - \int_0^\ell \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^\ell = - \int_0^\ell \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Em particular, se a energia inicial é nula, i.e.  $\mathcal{E}(0) = 0$ , então a energia fica nula para todos os tempos  $t \geq 0$

**ex:** Use esta observação para dar uma prova alternativa do teorema de unicidade 7.5 .

**ex:** Use esta observação para provar o seguinte teorema de estabilidade: se  $u$  e  $v$  são soluções da equação de calor homogênea no intervalo  $[0, \ell]$  com condições de fronteira nulas, então

$$\int_0^\ell (u(x, t) - v(x, t))^2 dx \leq \int_0^\ell (u(x, 0) - v(x, 0))^2 dx .$$

**Movimento Browniano.** No modelo do movimento Browniano proposto por Einstein em 1905<sup>14</sup>, a densidade de probabilidade  $P(x, t)$  de encontrar a partícula Browniana na posição  $x$  no tempo  $t$  sabendo que ela estava na posição 0 no tempo 0 é a solução não-negativa da equação da difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, t) = 0$  para todo o  $x \neq 0$ , e  $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$  para todo o tempo  $t > 0$ . O “coeficiente de difusão” é  $\beta = \frac{RT}{N\alpha}$ , onde  $R$  é a constante de gás perfeito,  $T$  a temperatura absoluta,  $N$  o número de Avogadro, e  $\alpha = 6\pi\eta\rho$  um coeficiente de fricção (que depende da viscosidade dinâmica  $\eta$  do líquido e do raio  $\rho$  da partícula Browniana).

**ex:** Verifique que a gaussiana

$$P_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} e^{-x^2/(4\beta t)} .$$

resolve a equação de difusão, e que tem integral unitário.

**ex:** Verifique que

$$P_{t+s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) P_s(x-y) dy$$

e interprete este fato.

**ex:** Calcule o caminho quadrático médio da partícula Browniana no tempo  $t$ , definido por

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_t(x) dx .$$

<sup>14</sup>A. Einstein, Über die von der molekularinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **17**, 549, 1905 [English translation in A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover, New York, 1956].

**Equação de Burgers.** Considere a equação de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.20)$$

com viscosidade  $\mu > 0$ .

**ex:** (substituição de Cole<sup>15</sup>-Hopf<sup>16</sup>) Mostre que se  $v(x, t)$  é uma solução da equação de calor  $\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , então

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \log v$$

é uma solução da equação de Burgers (7.20).

**Condução de calor com temperatura constante na fronteira.** A condução de calor num fio condutor de comprimento  $\pi$  (para ter fórmulas simples; se o comprimento for  $\ell$ , basta fazer a mudança de variável  $x \mapsto x' = \pi x/\ell$ ) e difusividade térmica  $\beta > 0$  é modelada pela equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7.21)$$

onde  $u(x, t)$  é a temperatura na posição  $x$  e no instante  $t$ . Colocamos o problema de resolver o problema com condições de fronteira constantes,  $u(0, t) = a$  e  $u(\pi, t) = b$  para todos os tempos  $t \geq 0$ . A função

$$w(x, t) := a + \frac{b-a}{\pi} x$$

é uma solução estacionária, i.e. independente do tempo (o limite esperado do perfil de temperatura quando  $t \rightarrow \infty$ ). Então a solução da equação de calor (7.21) com condições de fronteira constantes  $u(0, t) = a$  e  $u(\pi, t) = b$  é igual a

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

onde  $v(x, t)$  é a solução da equação de calor (7.21) com condições de fronteira nulas (i.e. de Dirichlet)  $v(0, t) = v(\pi, t) = 0$ .

Um cálculo análogo ao da corda vibrante mostra que as soluções separáveis da equação de calor (7.21) com condições de fronteira nulas são (proporcionais a) os *modos*

$$v_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx)$$

é uma solução da equação com condições de fronteira nulas  $v(0, t) = 0$  e  $v(\ell, t) = 0$  e condição inicial

$$v(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$$

É importante observar que o limite de  $v(x, t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  é a função identicamente nula, e portanto o limite de  $u(x, t)$  é a solução estacionária  $w(x, t)$ , como esperado.

<sup>15</sup>J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), 225-236.

<sup>16</sup>E. Hopf, The partial differential equation  $ut + uu_x = \mu u_{xx}$ , *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201-230.

**ex:** Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica  $10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$  é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de  $0^\circ\text{C}$ . Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}}x\right) \times 60^\circ\text{C},$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a  $4^\circ\text{C}$ ? O que acontece para grandes valores do tempo?

E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de  $0^\circ\text{C}$  e  $100^\circ\text{C}$ , respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

**ex:** Determine as soluções da equação de calor num condutor de comprimento  $\pi$  com condições de fronteira nulas,  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$ , e condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3\sin(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

**Condução de calor em um condutor isolado.** A condução de calor num fio condutor termicamente isolado de comprimento  $\pi$  e difusividade térmica  $\beta > 0$  é modelada pela equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

em  $0 \leq x \leq \pi$ , com condições de fronteira (*condições de Neumann*)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0$$

(o fluxo é proporcional ao gradiente de temperatura). As soluções separáveis são os modos

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx).$$

O limite de  $u(x, t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  é o coeficiente  $a_0$ , que é a média dos valores iniciais

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) dx$$

(pois os  $\cos(nx)$ , com  $n \geq 1$ , têm média nula em  $[0, \pi]$ ).

**ex:** Mostre que o “calor”

$$Q(t) := C \int_0^\ell u(x, t) dx,$$

onde  $C = mc$  é a capacidade térmica do condutor (o produto da massa  $m$  e o calor específico  $c$ ) é constante, ou seja, que  $\frac{d}{dt}Q(t) = 0$ .

**ex:** Determine as soluções da equação de calor num condutor isolado de comprimento  $\pi$  com condição inicial

$$u(x, 0) = \cos(x) + 3\cos(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 - \cos(5x).$$

**Condução de calor em um condutor circular.** Também podemos considerar um condutor isolado circular, por exemplo uma circunferência de comprimento  $2\pi$  (a circunferência unitária  $\mathbb{S} = \{e^{ix}, x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ). Neste caso, não há fronteira, e portanto não há condições de fronteira, mas condições de periodicidade:  $u(0, t) = u(2\pi, t)$  para todos os tempos  $t \geq 0$ . Então as soluções separáveis da equação de calor (7.21) são

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

**Calor com dispersão.** Considere a equação de calor com dispersão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u \quad (7.22)$$

no intervalo  $0 \leq x \leq \ell$  com condições de fronteira  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  para todos os  $t \geq 0$ . A substituição  $v(x, t) := e^t u(x, t)$  transforma a equação (7.22) na equação de calor

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

**ex:** Determine as soluções separáveis do problema.

## 7.4 Separação de variáveis

Procurar soluções separáveis é a primeira coisa que um físico ou um engenheiro faz quando observa uma nova equação diferencial parcial. Com alguma sorte, combinações lineares destas soluções formam um espaço suficientemente grande de soluções.

**Separação de variáveis.** O método de *separação de variáveis* para determinar soluções de uma EDPs linear homogênea  $Lu = 0$ , por exemplo nas variáveis  $x$  e  $t$ , consiste em substituir a conjectura

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

na equação, e deduzir  $(A_x X)T = (B_t T)X$ , onde  $A_x$  e  $B_t$  são operadores diferenciais lineares nas variáveis  $x$  e  $t$ , respectivamente. A igualdade então implica que existe uma constante  $\lambda$  tal que  $X$  e  $T$  satisfazem as equações de Sturm-Liouville

$$A_x X = \lambda X \quad \text{e} \quad B_t T = \lambda T.$$

As condições de fronteira determinam certos valores próprios  $\lambda$  e as correspondentes funções próprias admissíveis  $X_\lambda(x)$  e  $T_\lambda(t)$ , e portanto as soluções separáveis  $X_\lambda(x)T_\lambda(t)$ . Pelo princípio de sobreposição são também soluções combinações lineares (finitas)

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t),$$

com  $c_{\lambda} \in \mathbb{R}$ .

**ex:** Determine, se possível, soluções separáveis das seguintes EDPs.

$$\begin{array}{lll} u_x + u_y = 0 & tu_{xx} + u_t = 0 & u_t = 2u_x \\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 & u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0 & u_{tx} = u_x \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & yu_{xx} + xu_{yy} + xyu_{zz} = 0 & u_{tx} = 0 \end{array}$$

**Equação de transporte.** Seja  $\rho = \rho(x, t)$  a concentração de soluto num fluido unidimensional, e seja  $v(x, t)$  o campo de velocidades do fluido. A massa total de soluto contida no intervalo entre  $[x, x + dx]$  é  $\rho(x, t) dx$ , e a sua variação no tempo é  $(\partial\rho/\partial t)(x, t) dx$ . Esta variação é a soma algébrica dos fluxos que entram e saem da fronteira do intervalo, os pontos  $x$  e  $x + dx$ , e estes fluxos são  $\rho(x, t)v(x, t)$  e  $-\rho(x + dx, t)v(x + dx, t)$ , respetivamente. Portanto,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} dx \simeq \rho(x, t)v(x, t) - \rho(x + dx, t)v(x + dx, t)$$

Ao dividir por  $dx$  e ao fazer o limite quando  $dx \rightarrow 0$  obtemos a *equação de transporte*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v\rho) = 0$$

Em dimensão arbitrária, por exemplo 3, a equação generaliza como

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(v\rho) = 0}$$

Se o fluido “incompressível”, ou seja, se a divergência do campo de velocidades é nula e portanto, em dimensão um, se o campo de velocidades não depende da posição  $x$  mas apenas do tempo  $t$ , é imediato verificar que uma solução com condição inicial  $\rho(x, 0) = \varphi(x)$  é

$$\rho(x, t) = \varphi\left(x - \int_0^t v(s) ds\right).$$

Em particular, se o campo de velocidade do fluido incompressível também não depende do tempo, então a equação assume a forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - v \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 \quad (7.23)$$

e uma solução com condição inicial  $\varphi(x)$  é

$$\rho(x, t) = \varphi(x - vt)$$

**ex:** Determine as soluções separáveis da equação de transporte (7.23), e compare com a solução física.

**Vibrações amortecidas.** Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

em  $0 \leq x \leq \pi$ , onde  $\alpha > 0$  é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira nulas  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ .

**ex:** Mostre que a conjectura  $u_n(x, t) = q_n(t) \sin(nx)$  implica que  $q_n(t)$  satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência  $\omega_n^2 = (cn)^2$ .

**ex:** Deduza as soluções separáveis do problema com atrito pequeno (i.e.  $\alpha^2 < \omega_1^2$ ).

**ex:** Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda (7.1) e de calor (7.21) na reta real, ou seja, com  $x \in \mathbb{R}$ .

**Equação de Schrödinger livre.** A “função de onda”  $\psi(\mathbf{x}, t)$  de uma partícula livre não-relativística satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $\hbar$  é a constante de Planck reduzida. As ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Schrödinger em  $\mathbb{R}^3$  se a frequência  $\omega$  e o vetor de onda  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  satisfazem a relação de dispersão

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \|\boldsymbol{\xi}\|^2.$$

**ex:** Determine soluções separáveis no intervalo  $x \in [0, \ell] \subset \mathbb{R}$ , com condições de fronteira nulas,  $\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0$ .

**ex:** Mostre que as soluções separáveis e limitadas na reta real são proporcionais a

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{ipx/\hbar},$$

onde  $E \geq 0$  e  $p = \sqrt{2mE}$ .

**Equação de Klein-Gordon.** A “função de onda”  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  e  $t \in \mathbb{R}$ , de uma partícula livre relativística de massa própria  $m$  satisfaz a equação de Dirac, e portanto a equação de Klein-Gordon (em unidades de Planck, tais que  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ , ...)

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta \psi = m^2 \psi.$$

As ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Klein-Gordon em  $\mathbb{R}^3$  se a frequência  $\omega$  e o vetor de onda  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  satisfazem a relação de dispersão

$$\omega^2 - \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = m^2.$$

**Ondas estacionárias e problema dos valores próprios.** Os exemplos da equação de ondas e da equação de calor sugerem um método geral para obter soluções das EDPs da física-matemática. Assumimos que o campo  $\psi(t, \mathbf{r})$  depende de uma variável temporal  $t$  e umas variáveis espaciais  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  (ou, em geral,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ). A ideia é procurar soluções separáveis cuja dependência do tempo seja simples, apenas um exponencial  $e^{i\omega t}$  de “frequência”  $\omega$  (eventualmente complexa). Então a conjectura é

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{i\omega t} \varphi(\mathbf{r})$$

onde  $\varphi(\mathbf{r})$  é um campo que apenas depende das coordenadas espaciais, uma “onda estacionária”. Ao substituir esta conjectura nas equações de ondas  $\partial_{tt}\psi = \Delta\psi$  ou do calor  $\partial_t\psi = \Delta\psi$  obtemos, para o campo  $\varphi$ , as equações  $\Delta\varphi = -\omega^2\varphi$  ou  $\Delta\varphi = i\omega\varphi$ , respectivamente. A mesma coisa acontece com a equação de Schrödinger livre  $i\partial_t\psi = \Delta\psi$ , que conduz ao problema  $\Delta\varphi = -\omega\varphi$ . Neste contexto, o parâmetro  $\omega$  é uma “energia”. Estas equações dizem que a função  $\varphi$  é um vetor próprio do operador laplaciano  $\Delta$ , ou seja,

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi$$

com um certo valor próprio  $\lambda$ , que depende de  $\omega$ .

As equações  $\Delta\varphi = \lambda\varphi$  devem ser resolvidas em uma certa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dadas certas “condições de fronteira”, que fixam o comportamento do campo e/ou das suas primeiras derivadas nos pontos da fronteira  $\partial\Omega$ . Se a região é o próprio espaço  $\mathbb{R}^n$ , é natural pedir um decaimento suficientemente rápido do campo e/ou das suas primeiras derivadas no infinito, ou seja,  $\varphi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$  quando  $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$  (por exemplo, de maneira tal que observáveis físicos relevantes, como a energia, sejam finitos). Estas condições definem espaços de funções naturais onde resolver o problema dos vetores e valores próprios para o operador  $\Delta$ . Com alguma sorte, em tais espaços de funções o operador  $\Delta$  é auto-adjunto (em algum sentido), e portanto os seus vetores próprios formam uma “base” ortonormada.

**Equação de Schrödinger estacionária** A função de onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  de uma partícula não-relativística em um potencial  $V(x)$  satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi,$$

A conjectura separável  $\psi(t, x) = e^{iEt/\hbar}\varphi(x)$  é uma solução se o campo  $\varphi(x)$  satisfaz a equação de Schrödinger estacionária

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi + V\varphi = E\varphi \quad (7.24)$$

Os valores possíveis e  $E$ , os níveis de energia da partícula, são os valores próprios do operador  $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ .

**Problema de Sturm-Liouville.** Em dimensão um, o problema dos valores próprios do laplaciano é um caso particular de *problema de Sturm-Liouville*, que consiste em determinar constantes (reais)  $\lambda$  e correspondentes funções (próprias)  $u(x)$ , definidas em um intervalo  $x \in [a, b]$ , que resolvam a equação

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = \lambda w(x)u$$

com condições de fronteira  $u(a)$  ou  $u'(a) = A$  e  $u(b)$  ou  $u'(b) = B$ , dadas umas funções  $p(x)$  e  $w(x)$ . Se definimos o operador  $L$  como

$$Lu := \frac{1}{w(x)}\left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u\right) = \frac{1}{w}(-(pu)'+qu)$$

então o problema de Sturm-Liouville consiste em resolver

$$Lu = \lambda u$$

ou seja, determinar os *valores próprios*  $\lambda$  e as correspondentes *funções próprias*  $u$  de  $L$ .

**ex:** Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo  $x \in [0, \pi]$  com condições de fronteira  $u(0) = u(\pi) = 0$ .

**ex:** Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo  $x \in [0, \pi]$  com condições de fronteira  $u'(0) = u'(\pi) = 0$ .

**ex:** Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo  $x \in [0, \pi]$  com condições de fronteira  $u(0) - u'(0) = u(\pi) - u'(\pi) = 0$ .

**ex:** Mostre que as funções próprias  $u(r)$ , com  $0 < r < \infty$ , de

$$r^2u'' + ru' = n^2u$$

quando  $n \in \mathbb{Z}$ , são  $u_{\pm}(r) = r^{\pm n}$  se  $n \neq 0$ , e  $u_0(r) = 1$  ou  $u_0(r) = \log r$  se  $n = 0$ .

## 7.5 Potenciais e equação de Laplace

Os potenciais gravitacional ou elétrico são umas das motivação física da teoria das funções harmônicas, as soluções da equação de Laplace.

**Potencial elétrico/gravitacional.** De acordo com Newton (1687) e Coulomb (1785), a força gravitacional/eletrostática gerada no ponto  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  por uma massa/carga puntiforme colocada na origem do referencial é radial e proporcional ao inverso do quadrado da distância  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Em unidades convenientes é da forma

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

(o sinal pode ser negativo ou positivo no caso elétrico, que admite dois tipos de cargas). Como observado por Bernoulli e Lagrange, este campo é conservativo, e igual, fora da origem, ao oposto do gradiente  $\mathbf{F} = -\nabla u_0$  de uma função

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{r},$$

chamada (*função*) *potencial* por Green e Gauss. O potencial, assim como a força, é singular na origem. O fluxo da força através de uma esfera  $S_R^2 = \partial B_R(0)$  centrada na origem não depende do raio  $R$  da esfera, e é igual a  $-4\pi$  (pois o módulo da força é inversamente proporcional à superfície da esfera, e a sua direção é perpendicular à esfera). Por outro lado, um cálculo elementar mostra o laplaciano  $\Delta u_0$  do potencial, ou seja, a divergência  $-\nabla \mathbf{F}$  do campo, é nulo em todos os pontos diferentes da origem. O teorema de Gauss diz que o fluxo do campo através de uma esfera  $\partial B_r(0)$  é igual ao integral da sua divergência no disco  $B_r(0)$ . Isto sugere que a divergência do campo  $\mathbf{F}$  seja uma “função” que se anula em todos os pontos do espaço exceto a origem, e com itegral constante e igual a um em cada bola centrada na origem. Esta “função”, que naturalmente não pode existir enquanto função!, é chamada *delta de Dirac*, e denotada por  $\delta(\mathbf{r})$ . Assim, o potencial  $u_0$  satisfaz a equação diferencial

$$\Delta u_0 = 4\pi \delta$$

Pelo princípio de sobreposição, um fato experimental, o potencial gerado no ponto  $\mathbf{r}$  por umas massas/cargas  $m_k$  colocadas nas posições  $\mathbf{r}_k$  é uma soma

$$\sum_k \frac{m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}$$

e conseqüentemente satisfaz

$$\Delta u = 4\pi \sum_k m_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k).$$

Mais conveniente é substituir uma distribuição de cargas puntiforme com uma “densidade” de cargas. Então o potencial elétrico ou gravitacional gerado por uma densidade de cargas/massas  $\rho(\mathbf{r})$ , por exemplo concentradas numa região limitada do espaço, satisfaz a *equação de Poisson*

$$\Delta u = 4\pi \rho.$$

Esta é uma equação diferencial linear. Portanto, o espaço das suas soluções é um espaço afim modelado sobre o espaço linear  $\mathcal{H}$  das soluções do problema homogêneo, a *equação de Laplace*

$$\Delta u = 0.$$

Ou seja, o espaço das soluções da equação de Poisson é  $v + \mathcal{H}$ , se  $v(\mathbf{r})$  é uma solução particular da equação de Poisson. As soluções da equação de Laplace, os pontos de  $\mathcal{H}$ , são chamadas funções harmônicas.

Formalmente, a solução particular é obtida usando o princípio de sobreposição. A densidade de carga é uma sobreposição

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

de cargas unitárias (a identidade acima é, essencialmente, a definição formal da delta de Dirac!). O potencial gerado por uma carga unitária colocada na origem é, como já sabemos,  $u_0(\mathbf{r}) = -1/r$ , e é chamada *solução fundamental* da equação de Poisson. Uma solução particular  $v(\mathbf{r})$  da equação de Poisson pode então ser representada como uma sobreposição

$$v(\mathbf{r}) = - \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}'$$

que é um produto de convolução da densidade  $\rho$  com a solução fundamental  $u_0$ .

**Funções harmônicas.** A equação de Laplace pode ser escrita e estudada num espaço euclidiano arbitrário, ou até numa “variedade diferenciável” munida de uma estrutura Riemanniana.

O *laplaciano* no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é a divergência do gradiente, ou seja, o operador diferencial  $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$ , definido em coordenadas canônicas (realtivas a uma base ortonormada) por

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

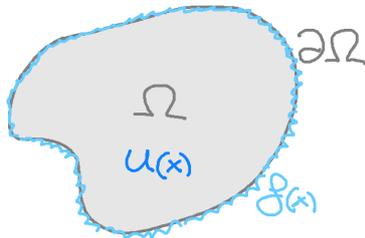
Uma função/campo escalar  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definida num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  do espaço euclidiano e com valores reais ou complexos, é dita *harmônica* em  $\Omega$  se satisfaz a *equação de Laplace*

$$\boxed{\Delta u = 0} \tag{7.25}$$

nos pontos de  $\Omega$ . Uma função harmônica real  $u$  define um campo vetorial  $\mathbf{v} = \nabla u$ , e portanto gera um fluxo, solução da EDO autónoma  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ . Este fluxo preserva os volumes, pois  $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla u = 0$ , e tem rotacional nulo, pois  $\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \nabla u = 0$ .

O Laplaciano é invariante por rotações e translações, ou seja, por isometrias do espaço euclidiano (sendo definido por operadores diferenciais, o gradiente e a divergência, que apenas dependem do produto escalar euclidiano e do volume euclidiano). Portanto, se  $u(\mathbf{x})$  é uma função harmônica, então também  $v(\mathbf{x}) := u(R\mathbf{x} - \mathbf{a})$  é uma função harmônica, para todo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  e toda matriz ortogonal  $R \in O(n)$ .

**Problema de Dirichlet.** Um problema físico natural é determinar um campo elétrico numa região sem cargas, fixado o valor do potencial na fronteira da região. Este é o *problema de Dirichlet* pelos matemáticos, e consiste em determinar uma função harmônica duas vezes diferenciável em  $\Omega$  e contínua na aderência de  $\Omega$ , dada uma condição de fronteira  $u|_{\partial\Omega} = f$ . A solução  $u$  do problema de Dirichlet é também dita *extensão harmônica* de  $f$ .



**Funções harmônicas na reta.** Na reta real, as soluções da equação de Laplace  $u'' = 0$  são os polinómios de primeiro grau  $u(x) = \alpha + \beta x$ . Em particular, satisfazem o “fórmula do valor médio”: para todo  $x$  e todo  $r \geq 0$  suficientemente pequeno

$$u(x) = \frac{1}{2} (u(x-r) + u(x+r)) \tag{7.26}$$

**ex:** Mostre que uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz a fórmula do valor médio (7.26) é uma função harmônica (e, portanto, uma função  $C^\infty$ ).

**ex:** Verifique que uma solução fundamental da equação de Poisson na reta, tal que  $\Delta u_0 = 2 \delta$  é

$$u(x) = \frac{1}{2}|x|$$

**ex:** Verifique que uma solução fundamental da equação de Poisson no plano, tal que  $\Delta u_0 = 2\pi \delta$  é

$$u(\mathbf{r}) = \log \|\mathbf{r}\|$$

**ex:** Verifique que  $u(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$  é uma função harmônica em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

## 7.6 Princípios variacionais

Os princípios variacionais da física-matemática mostram as relações conceituais entre as equações de onda, de calor e de Laplace (e de Schrödinger), assim como as similitudes com as equações diferenciais ordinárias básicas da mecânica.

**Princípio de mínima ação e pequenas oscilações.** Um sistema mecânico, fixado um referencial, logo um sistema de coordenadas  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$ , é descrito por uma *lagrangiana*  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , uma função das coordenadas e das velocidades generalizadas. Tipicamente a lagrangiana é da forma  $T - V$ , onde  $T = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2$  é a energia cinética e  $V = V(\mathbf{q})$  uma energia potencial. A *ação* é o integral

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt$$

O *princípio de mínima ação* diz que as trajetórias são os pontos estacionários da ação. Se  $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$  é uma pequena perturbação de  $\mathbf{q}(t)$ , tal que a variação  $\delta\mathbf{q}(t)$  se anula nos pontos  $t_0$  e  $t_1$ , então uma integração por partes mostra que a variação da ação é

$$\delta\mathcal{S} = \sum_k \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k(t) dt$$

Portanto,  $\delta\mathcal{S} = 0$  por perturbações arbitrária se  $\mathbf{q}(t)$  satisfaz as *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Por exemplo, as pequenas oscilações em torno de um mínimo do potencial, que podemos assumir ser a origem  $\mathbf{q} = 0$  do sistema de coordenadas, são modeladas pela lagrangiana  $L = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2 - \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot H \mathbf{q}$ , onde  $H$  é a matriz Hessiana do potencial calculada na origem. As equações de Euler-Lagrange correspondem à equação de Newton

$$\ddot{\mathbf{q}} = H \mathbf{q}$$

Sendo  $H$  uma matriz real simétrica, o teorema espectral garante a existência de um sistema ortonormado  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots$  que o diagonaliza. Se os  $\lambda_k = -\omega_k^2$  são os valores próprios de  $H$  (que é uma matriz negativa), então a solução geral é ma sobreposição

$$\mathbf{q}(t) = \sum_k A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \mathbf{e}_k$$

de movimentos harmônicos, chamados *modos normais*.

**Lagrangiana de uma corda vibrante.** Consideramos uma corda de comprimento  $\pi$ , fixada nas extremidades. O deslocamento transversal da corda é descrito por um campo  $u(x)$ , nulo em  $0$  e  $\pi$ . A posição de equilíbrio é o campo nulo,  $u(x) = 0$  para todo  $x$ . A energia potencial é, por definição, o trabalho que um campo de força deve fazer para deslocar a corda da posição de equilíbrio até o seu perfil  $u(x)$ . Pela lei de Hooke, este trabalho é proporcional ao alongamento da corda, o fator de proporcionalidade sendo a tensão, que podemos assumir constante. O alongamento de uma porção infinitesimal da corda sobre o segmento  $dx$  é, de acordo com o teorema de Pitágoras e a aproximação de Taylor,

$$\delta\ell \simeq \sqrt{dx^2 + (\nabla u dx)^2} - dx \simeq \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx$$

(onde usamos a notação abstrata  $\nabla u$  para denotar a derivada parcial  $\partial u / \partial x$  na coordenada espacial, para futuras generalizações em dimensão superior). Assim, a energia potencial total da corda é, em primeira aproximação, ou seja, proporcional ao integral

$$\mathcal{V} \simeq \frac{1}{2} \int_0^\pi |\nabla u|^2 dx$$

A energia cinética, assumindo uma densidade de massa unitária, é a metade do integral de  $|\dot{u}|^2$ , e finalmente a lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^\pi (|\dot{u}|^2 - |\nabla u|^2) dx$$

Consequentemente, a ação é um integral duplo

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^\pi (|\dot{u}|^2 - |\nabla u|^2) dx dt.$$

Se  $\delta u$  é uma pequena variação do perfil da corda que se anula nos tempos  $t_0$  e  $t_1$ , então dois integrais por partes, e as condições de contorno, implicam que

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^\pi (\ddot{u} - \Delta u) \delta u dx dt$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange, as infinitas equações de Newton, uma para cada ponto  $x$  da corda, são a equação de onda

$$\ddot{u} = \Delta u.$$

**Espaço euclidiano-hilbertiano dos campos.** O itegral  $\int dx$  é uma extensão contínua da soma  $\sum_k$  sobre as coordenadas. Assim, o produto interno natural no espaço  $\mathcal{H}$  dos campos  $u(x)$ , que generaliza o produto euclidiano  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \sum_k q_k p_k$  entre os vetores de  $\mathbb{R}^n$ , é

$$\langle u, v \rangle := \int_0^\pi u(x) \overline{v(x)} dx$$

e a norma induzida é  $\|u\|^2 = \int_0^\pi |u(x)|^2 dx$  (a conjugação permite tratar também campos com valores complexos).

Como o deslocamento da corda vibrante satisfaz  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  para todo tempo, é natural considerar o espaço euclidiano  $\mathcal{H}_0$  dos campos que se anulam na fronteira do intervalo. Uma integração por partes mostra que a energia potencial é a forma quadrática

$$\mathcal{V} = - \int_0^\pi u \Delta u dx = - \langle u, \Delta u \rangle$$

definida pelo operador  $-\Delta$ , que portanto generaliza a matriz hessiana do potencial numa vizinhança de um ponto de equilíbrio. Isto também mostra, mais uma vez, que a equação de onda  $\ddot{u} = \Delta u$  é uma generalização natural do oscilador harmônico  $\ddot{\mathbf{q}} = -H\mathbf{q}$ , é moralmente um “oscilador harmônico em dimensão infinita”.

Enquanto operador no espaço euclidiano  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$  dos campos que se anulam na fronteira do intervalo, o laplaciano  $\Delta$  é formalmente auto-adjunto, ou seja, como mostra uma dupla integração por partes, satisfaz  $\langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle$ . De acordo com princípios gerais, os seus valores próprios são reais, e os correspondentes vetores próprios são dois a dois ortogonais. Além disso, esperamos que seja válida alguma forma de teorema espectral, que diga que os vetores próprios do laplaciano formam uma base do espaço euclidiano. Este é o caso, oportunamente interpretada a noção de base em dimensão infinita, e é o conteúdo da teoria das séries de Fourier.

Os cálculos efetuados ao resolver o problema da corda vibrante mostram que os valores próprios do laplaciano (positivo)  $-\Delta$  são  $\lambda_n = n^2$ , com  $n = 1, 2, \dots$ . Os correspondentes vetores próprios são as harmónicas  $e_n(x) = \sin(nx)$ . A generalização da decomposição em modos normais de um oscilador harmónico é então a solução geral da corda vibrante como uma sobreposição

$$u(x, t) = \sum_n A_n \sin(nt + \varphi_n) \sin(nx)$$

**Energia de Dirichlet e laplaciano.** A energia potencial da corda vibrante generaliza de uma forma natural em dimensão superior. A *energia de Dirichlet* de um campo real  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definido numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é

$$\mathcal{E}[u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy$$

Podemos pensar que o gráfico de  $u$  descreve uma superfície em  $\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ . Então a energia é nula se o campo é constante, logo se a superfície é plana. Mais interessante é minimizar a energia de Dirichlet fixando os valores do campo na fronteira, ou seja, dado o valor de  $u|_{\partial\Omega} = g$ , onde  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função (altura) fixada. Podemos imaginar que o gráfico de  $g$  representa a altura de um fio de arame, e que o gráfico de  $u$  representa a forma de uma bolha de sabão fixada ao arame. A energia de Dirichlet ainda tem o significado físico de uma energia potencial, logo de um trabalho. É também claro que a mesma fórmula pode definir a energia de um campo escalar numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  do espaço euclidiano de dimensão  $n$ .

A integração por partes deve ser substituída pelas seguintes considerações. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  uma região com fronteira regular  $\partial\Omega$ , e sejam  $u$  e  $v$  dois campos diferenciáveis definidos numa vizinhança de  $\Omega$ . O teorema da divergência, aplicado ao campo vetorial  $\mathbf{F} = v \nabla u$ , diz que

$$\int_{\Omega} \nabla(v \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot ds$$

onde  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  denota o elemento de volume e  $ds$  denota o elemento de superfície orientada de  $\partial\Omega$  (ou seja,  $ds = \mathbf{n} ds$  se  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície, e  $ds$  é o elemento de superfície escalar). Sendo a divergência do campo escalar  $v \nabla u$  igual a  $\nabla(v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$ , deduzimos a *primeira identidade de Green*

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \nabla u ds \quad (7.27)$$

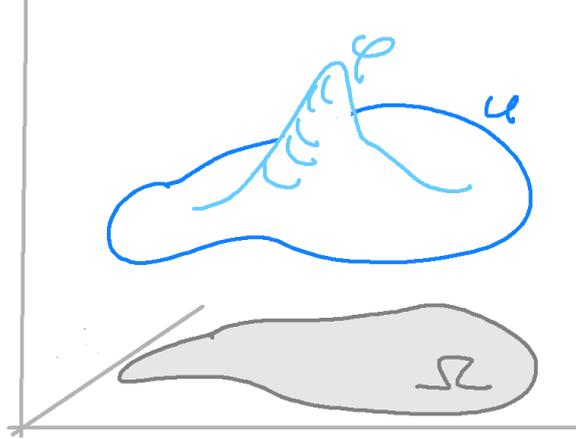
Deve ser considerada como uma generalização multidimensional da integração por partes. É particularmente útil quando o campo  $v$  se anula na fronteira  $\partial\Omega$ , assim que o segundo membro é nulo.

E particular, se tomamos  $v = u$  na (7.27), e assumimos que o campo  $u$  se anula em  $\partial\Omega$ , concluímos que a energia de Dirichlet é uma forma quadrática

$$\mathcal{E}[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = -\frac{1}{2} \langle u, \Delta u \rangle$$

associada ao operador de Laplace  $-\Delta$ , definido no espaço euclidiano dos campos regulares definidos em  $\Omega$ , nulos na fronteira  $\partial\Omega$ , munido do produto interno  $\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$ .

**Gradiente da energia de Dirichlet.** É interessante tentar calcular a “derivada” da energia de Dirichlet na direção de uma perturbação arbitrária do campo. Consideramos um campo  $u$ , definido na região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , e uma sua pequena perturbação  $u + t\varphi$ , dependente de um parâmetro real  $t$ , onde  $\varphi$  é um campo que se anula na fronteira, ou seja, tal que  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ .



Se  $u$  minimiza a energia de Dirichlet, então a função  $t \mapsto \mathcal{E}[u + t\varphi]$  deve ter um mínimo em  $t = 0$ . A derivada da energia de Dirichlet em ordem ao tempo  $t$  é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\varphi] &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + t |\nabla \varphi|^2) dx \end{aligned}$$

e portanto o seu valor em  $t = 0$  é

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\varphi] \right|_{t=0} &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dx \\ &= - \int_{\Omega} (\Delta u) \varphi dx \end{aligned} \tag{7.28}$$

onde usamos a primeira identidade de Green (7.27) e a condição de fronteira  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ . Formalmente, este cálculo diz que o gradiente da energia de Dirichlet calculado no ponto  $u$  é o operador que envia o campo  $\varphi$  no campo  $(\Delta u) \varphi$ , ou seja,

$$\boxed{\nabla \mathcal{E}(u) = -\Delta u.}$$

Em particular, a derivada (7.28) é nula para todas as variações/direções  $\varphi$  sse  $\Delta u = 0$ , ou seja, se a função  $u$  é harmônica em  $\Omega$ .

Para enunciar, e com alguma sorte provar, um teorema, é necessário abandonar os cálculos formais e escolher um espaço conveniente onde fazer as perturbações dos campos.

**Funções teste.** Dada uma região (aberta)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (que pode ser o próprio espaço euclidiano), consideramos o espaço  $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$  das *funções teste* de  $\Omega$ , formado pelas funções infinitamente deriváveis com suporte compacto contido em  $\Omega$ . Em particular, as funções teste são nulas na fronteira  $\partial\Omega$ .

As funções teste existem, e são muitas! Por exemplo, a função

$$b(\mathbf{x}) = e^{-1/(1-\|\mathbf{x}\|^2)}$$

(chamada *bump function* em inglês), é não-negativa, infinitamente derivável e tem suporte no disco unitário  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $\gamma = \int b(\mathbf{x}) dx$  denota o seu integral,  $r$  é um número positivo arbitrário, e

$$\delta_r(\mathbf{x}) := \frac{1}{\gamma r^n} b(\mathbf{x}/r),$$

então a função  $\delta_r(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  é não-negativa, infinitamente derivável, tem suporte no disco de raio  $r$  centrado no ponto  $\mathbf{a}$ , e tem integral unitário  $\int \delta_r(\mathbf{x} - \mathbf{a}) dx = 1$ . Se escolhermos os centros  $\mathbf{a} \in \Omega$  e os raios  $r$  suficientemente pequenos, todas estas funções pertencem a  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Também, combinações lineares (finitas) de funções teste são funções teste.

É claro que, se  $u(\mathbf{x})$  é um campo contínuo, então o integral

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \delta_{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) dx \simeq u(\mathbf{a})$$

se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno. De fato, não é difícil provar que o valor de  $u$  no ponto  $\mathbf{a}$  é o limite do integral quando  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Por esta razão, a família das funções  $\delta_{\varepsilon}$  é chamada “identidade aproximada”.

Em particular, e isto é o que interessa neste contexto, se o integral do produto  $\int_{\Omega} u \varphi dx$  é nulo para todas as funções teste  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , então o campo contínuo  $u$  é necessariamente nulo em todos os pontos de  $\Omega$ .

**Princípio variacional.** Finalmente, é possível enunciar uma versão do princípio variacional que caracteriza os pontos de mínimos locais da energia de Dirichlet.

**Teorema 7.7** (princípio variacional). *Seja  $u$  um campo escalar real de classe  $C^2$  definido numa região (aberta)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com energia de Dirichlet finita  $\mathcal{E}[u] < \infty$ . Então*

$$\mathcal{E}[u] \leq \mathcal{E}[u + \varphi]$$

para todas as perturbações  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  sse  $u$  é harmónico, ou seja, satisfaz  $\Delta u = 0$ , em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Dados os campos  $u \in C^2(\Omega)$  e  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , podemos calcular, para tempos reais  $t$ , a energia de Dirichlet de  $u + t\varphi$ . Usando a primeira identidade de Green (7.27) e a condição de fronteira de  $\varphi$ , temos

$$\mathcal{E}[u + t\varphi] = \mathcal{E}[u] - 2t \int_{\Omega} (\Delta u) \varphi dx + t^2 \mathcal{E}[\varphi]$$

Se  $\Delta u = 0$ , então, ao escolher  $t = 1$ , deduzimos  $\mathcal{E}[u + \varphi] \geq \mathcal{E}[u]$ . De fato esta desigualdade é estrita se a perturbação  $\varphi$  não é trivial, ou seja, se tem energia de Dirichlet  $\mathcal{E}[\varphi]$  positiva.

Vice-versa, se  $\mathcal{E}[u + t\varphi] \geq \mathcal{E}[u]$  para todo tempo  $t$ , a desigualdade acima implica que

$$2t \int_{\Omega} (\Delta u) \varphi dx \leq t^2 \mathcal{E}[\varphi]$$

para todo  $t$ , e conseqüentemente

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \varphi dx = 0$$

Sendo  $\Delta u$  contínuo, a última igualdade é válida para todas as funções teste  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  apenas quando  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .  $\square$

**Fluxo gradiente da energia de Dirichlet e equação de calor.** Se um campo  $u$  não minimiza a energia de Dirichlet numa região fixada, podemos tentar deformar o campo numa direção onde a energia decresce.

Em dimensão finita existe uma estratégia natural para minimizar funções, chamada fluxo gradiente. Seja  $E(\mathbf{q})$  uma função energia, definida numa região do espaço euclidiano de coordenadas  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots)$ . Se um observador/partícula se encontra na posição  $\mathbf{q}$  e quer procurar um mínimo de  $E$ , uma escolha óbvia é deslocar-se na direção oposta ao gradiente de  $E$ . Isto significa acompanhar o fluxo da equação diferencial

$$\dot{\mathbf{q}} = -\nabla E,$$

chamado *fluxo gradiente*. É razoável esperar (e de fato fácil provar, com oportunas condições) que, se  $E$  assume um mínimo estrito num único ponto  $\mathbf{q}_0$ , então as trajetórias  $\mathbf{q}(t)$  do fluxo gradiente convergem para este ponto quando o tempo  $t \rightarrow \infty$ .

De volta ao nosso problema, o cálculo (7.28) diz que, formalmente, o gradiente da energia de Dirichlet, calculado no ponto/campo  $u$ , é o laplaciano  $-\Delta u$ . Consequentemente, o fluxo gradiente da energia de Dirichlet é

$$\dot{u} = \Delta u,$$

a equação de calor!

Assim, se queremos minimizar a energia de Dirichlet, logo encontrar uma função harmónica, podemos tentar resolver a equação de calor correspondente e observar a sua solução assintótica quando o tempo tende para o infinito.

**Princípio de Dirichlet.** O problema físico natural é o problema de Dirichlet, que consiste em determinar uma extensão harmónica  $u$  em  $\Omega$  de uma função  $f$  definida na fronteira  $\partial\Omega$ . É o caso do potencial eléctrico numa região sem cargas, fixando o seu valor, por exemplo nulo, na fronteira, por exemplo um condutor. A intuição física sugere que o fluxo gradiente da energia de Dirichlet, o seja, a equação de calor (fixados os valores do campo térmico na fronteira), deve atingir assintoticamente um equilíbrio, e este equilíbrio deve ser a função harmónica procurada. Esta expectativa, natural para qualquer físico, foi chamada *princípio de Dirichlet* por Riemann, que de fato a utilizou na sua tese de doutoramento<sup>17</sup> em 1851 para conjecturar e dar uma prova, incompleta mas bonita!, do seu famoso “teorema de uniformização” (tratado nas seção 12.4).

O que não é óbvio, e é de fato falso, como descobriu Weierstrass em 1870, é que, dada uma região genérica  $\Omega$  e dado um “funcional energia” genérico, mesmo limitado, um mínimo da energia deve sempre existir. Também pode acontecer, como observou Hadamard em 1906, que o problema de Dirichlet numa certa região admite uma solução, mas esta solução tem energia de Dirichlet infinita (logo o teorema 7.7 não se aplica). Umhas provas do princípio de Dirichlet, com condições oportunas sobre a região e a sua fronteira, foram finalmente encontradas por Poincaré, em 1887, e depois Hilbert, em 1899.

---

<sup>17</sup> *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe* [Foundations for a general theory of functions of a variable complex quantity], Inauguraldissertation, Göttingen, 1851.

## 8 Séries de Fourier

### 8.1 Funções periódicas e polinômios trigonométricos

Polinômios trigonométricos com um número suficientemente grande de frequências podem aproximar muito bem funções periódicas bem comportadas, no sentido dos “mínimos quadrados”. Isto conduz ao estudo da geometria euclidiana do espaço das funções integráveis num intervalo.

30 nov 2020

**O problema de Fourier.** Sabemos resolver o problema da corda vibrante ou os problemas da condução de calor quando as condições iniciais são sobreposições finitas de ondas estacionárias ou modos. Isto levanta o problema de decidir quais funções periódicas  $f(x)$  podem ser representadas, ou pelo menos aproximadas com precisão arbitrária, por meio de combinações lineares de senos e/ou cosenos. Em termos mais concretos, o problema é decidir quando e em que sentido uma função  $f(x)$ , periódica de período  $2\pi$ , pode ser representada como uma sobreposição

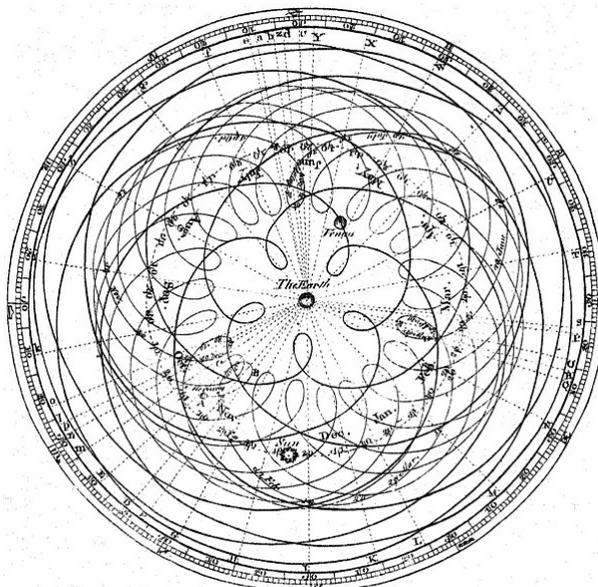
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Num certo sentido, estamos a querer dizer que os vetores  $e_n(x) = e^{inx}$  formam uma “base” do espaço das funções periódicas. Uma observação importante é que estes vetores são os vetores que diagonalizam o operador de Laplace  $\Delta$ , pois  $\Delta e_n = -n^2 e_n$ . Portanto a pergunta é se, em algum sentido, o operador de Laplace se comporta como um operador auto-adjunto em dimensão finita.

**Epiciclos e deferentes.** A ideia de Aristóteles e Platão, de que “todos os movimentos são combinações de movimentos circulares uniformes” está na base dos calendários calculados por Iparco e Ptolomeu, e transmitidos pelos árabes no *Almagesto*.

Nestas cosmologias, cada corpo celeste, estrelas fixas ou errantes, descreve uma circunferência, dita *epiciclo*, à volta de uma circunferência, que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência, . . . , que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência inicial, dita *deferente*, centrada na Terra.

Até o sistema de Copérnico funciona assim: a única novidade, que também não é uma novidade porque os próprios gregos, por exemplo Aristarco de Samos, consideraram esta possibilidade, é que o centro da deferente é colocado no Sol, ideia que pareceu simplificar muito o modelo.



Movimentos aparentes do Sol, Mercúrio e Vênus, de acordo com Giovanni Cassini.

Source: [https://en.wikipedia.org/wiki/Deferent\\_and\\_epicycle](https://en.wikipedia.org/wiki/Deferent_and_epicycle)

**Aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos.** A intuição subjacente é que todo movimento periódico planar pode ser aproximado com precisão arbitrária por uma sobreposição finita de movimentos circulares uniformes.<sup>18</sup> Este é o conteúdo da Análise de Fourier.

Um *polinômio trigonométrico* (complexo) de grau  $\leq N$ , definido na circunferência  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (ou seja, periódico de período  $2\pi$ ), é uma sobreposição finita

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

de (ondas planas) *harmônicas*  $e_n(t) := e^{int}$ , com coeficientes complexos ou reais  $c_n \in \mathbb{C}$ . Se acontece que  $c_n = \overline{c_{-n}}$  para todos os  $n$ , então o polinômio é real, e pode ser representado também como combinação linear real de senos e cossenos, ou seja, como

$$\sum_{n=0}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

com coeficientes reais  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ .

O problema é o de determinar, fixado um grau  $N$ , o polinômio trigonométrico  $p(t)$  de grau  $N$  que melhor aproxima uma função periódica  $f(t)$  (de período  $2\pi$ ). A ideia de Bessel (1828) é escolher os coeficientes  $c_k$ 's usando o *princípio dos mínimos quadrados*, ou seja, procurando minimizar a “soma dos quadrados das distâncias” entre  $f(t)$  e a sobreposição  $p(t)$ , o integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)|^2 dt.$$

## 8.2 Geometria do espaço das funções de quadrado integrável

O espaço das funções periódicas (de período fixado) pode ser munido de um produto interno natural, que generaliza o produto interno euclidiano num espaço de dimensão finita. As harmônicas formam um sistema ortonormado neste espaço.

**Espaço das funções de quadrado integrável.** O problema de minimização de Bessel admite uma interpretação geométrica. Seja  $\mathcal{R}(\mathbb{T})$  o espaço vetorial complexo das funções Riemann-integráveis  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas na circunferência  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (ou, equivalentemente, definidas na reta real e periódicas de período  $2\pi$ , e portanto determinadas pelos seus valores no intervalo  $(-\pi, \pi]$ , ou em qualquer outro intervalo de comprimento  $2\pi$ ), munido do *produto escalar/interno* e da *norma*  $L^2$ , definidos por

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (8.1)$$

e

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (8.2)$$

respetivamente. Quando necessário, ou seja, quando nas fórmulas aparecem produtos internos de espaços diferentes, o produto interno e a norma  $L^2$  poderão também ser denotados com  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$ .

É claro que o produto interno (8.1) é linear na primeira variável e anti-linear na segunda variável (em alguns textos, em particular nos livros dos físicos que tratam da mecânica quântica, é o contrário!), e que é hermitico, ou seja, satisfaz

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

<sup>18</sup>G. Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni*, **2** (2001), 125-152 (<http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9907004>).  
Vejam também este [vídeo](#).

A norma (8.2) é positivamente homogênea, ou seja,

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|,$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , e a norma de todo vetor é não negativa, ou seja,

$$\|f\| \geq 0.$$

Apesar do nome, esta norma não é estritamente positiva, pois pode acontecer que  $\|f\| = 0$  para funções  $f$  que não são identicamente nulas (por exemplo, funções diferentes de zero num conjunto finito de pontos). Os matemáticos dizem que  $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ , munido do produto interno  $L^2$ , é um espaço *pré-Hilbertiano*.

O produto interno permite definir a ortogonalidade, e portanto enunciar o teorema de Pitágoras. Dois vetores  $f$  e  $g$  são ditos *ortogonais* quando  $\langle f, g \rangle = 0$ . O teorema de Pitágoras diz que se  $f$  e  $g$  são ortogonais então

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Se  $g$  é um vetor de norma diferente de zero, então cada vetor  $f$  pode ser decomposto como soma

$$f = \lambda g + h,$$

com  $\lambda \in \mathbb{C}$ , de um vetor  $\lambda g$  proporcional a  $g$  (chamado projeção de  $f$  sobre  $g$ ) e um vetor  $h$  ortogonal a  $g$ . Um cálculo (a condição  $\langle h, g \rangle = \langle f - \lambda g, g \rangle = 0$ ) mostra que o coeficiente  $\lambda$ , a “componente” de  $f$  na direção de  $g$ , deve necessariamente ser

$$\lambda = \frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2}.$$

A desigualdade  $\|h\| \geq 0$  então implica que produto interno e a norma  $L^2$  satisfazem a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (8.3)$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que a norma satisfaz a *desigualdade do triângulo*

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Então o quociente  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) / \sim$  pela relação de equivalência  $f \sim g$  se  $\|f - g\| = 0$  é um espaço euclidiano complexo.

As harmônicas, ou ondas planas (ou caracteres, na linguagem dos matemáticos),

$$e_n(t) := e^{int}$$

com  $n \in \mathbb{Z}$ , formam um sistema ortonormado, portanto independente. De fato,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Em particular, o espaço  $\mathcal{R}(\mathbb{T})$  não tem dimensão finita.

**Coefficientes de Fourier e desigualdade de Bessel.** Fixado um número natural  $N$ , seja  $\mathcal{E}_N \approx \mathbb{C}^{2N+1}$  o subespaço de dimensão finita de  $\mathcal{R}(\mathbb{T})$  gerado pelas harmônicas  $e_n$ 's com  $|n| \leq N$ . Os vetores/pontos de  $\mathcal{E}_N$  são chamados *polinômios trigonométricos* de grau  $N$ , e são somas finitas

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

com coeficientes  $c_n \in \mathbb{C}$ . Usando a identidade de Euler  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , é também possível representar os pontos de  $\mathcal{E}_N$  como combinações lineares de  $\cos(nt)$  e  $\sin(nt)$ , com  $0 \leq n \leq N$ .

Dada uma função  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ , colocamos o problema de minimizar a sua distância  $\|f - p\|$  com os pontos  $p$  do subespaço  $\mathcal{E}_N$ . A intuição geométrica (nos espaços de dimensão finita) sugere que

o mínimo seja atingido quando  $p$  é a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $\mathcal{E}_N$ . A projeção ortogonal é o polinómio trigonométrico

$$S_N f = \sum_{|n| \leq N} c_n e_n,$$

onde os coeficientes  $c_n$  são os produtos escalares (i.e. as componentes)

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

Os  $c_n$ 's são chamados *coeficientes de Fourier* de  $f$  relativamente ao sistema ortonormado dos  $e_n$ 's. De fato, um cálculo elementar mostra que a diferença  $f - S_N f$  é ortogonal a  $\mathcal{E}_N$  (sendo ortogonal a todas as harmónicas  $e_n \in \mathcal{E}_N$ ), e portanto, se  $p \in \mathcal{E}_N$  é qualquer outro ponto, pelo teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} \|f - p\|^2 &= \|(f - S_N f) + (S_N f - p)\|^2 \\ &= \|f - S_N f\|^2 + \|S_N f - p\|^2 \geq \|f - S_N f\|^2. \end{aligned}$$

Mais um cálculo elementar mostra que o quadrado da distância entre  $f$  e  $S_N f$  é

$$0 \leq \|f - S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{|n| \leq N} |c_n|^2 \quad (8.4)$$

Em particular, a série de termos não-negativos  $\sum_n |c_n|^2$  é limitada, logo convergente. No limite quando  $N \rightarrow \infty$  obtemos a

**Teorema 8.1** (desigualdade de Bessel). *Se  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$  e  $c_n = \langle f, e_n \rangle$  são os seus coeficientes de Fourier, então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \|f\|^2.$$

**ex:** Considere o espaço  $\mathcal{E}_N \approx \mathbb{C}^{2N+1}$  dos polinómios trigonométricos de grau  $\leq N$ , munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Mostre que a o operador Laplaciano  $\Delta : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}_N$ , definido por  $\Delta f = f''$ , é auto-adjunto, e que é diagonal na base formada pelos  $e_n$ 's. Calcule a sua matriz nesta base (ou seja, os seus valores próprios). Mostre que o operador derivação  $D : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}_N$ , definido por  $Df = f'$ , é anti-auto-adjunto. Determine os seus valores próprios.

**Geometria do espaço  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .** Os coeficientes de Fourier de uma função integrável são sucessões  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  tais que  $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ . O espaço de todas estas sucessões é chamado  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , e pode ser munido de um produto interno

$$\langle c, d \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \bar{d}_n$$

que induz a norma

$$\|c\| := \sqrt{\langle c, c \rangle} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \bar{d}_n \right| \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 \right)^{1/2}$$

Portanto a “transformada de Fourier”, o operador  $\mathcal{F} : f \mapsto (c_n)$ , que associa a cada função integrável na circunferência a sucessão dos seus coeficientes de Fourier, envia  $\mathcal{R}(\mathbb{T})$  em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . A desigualdade de Bessel diz que este operador não dilata as normas, pois  $\|c\| \leq \|f\|$ .

### 8.3 Séries de Fourier

A série de Fourier é o “polinómios trigonométrico de grau infinito” que melhor aproxima a função na norma  $L^2$ . A esperança é que as harmónicas se comportem como uma “base” do espaço de dimensão infinita das funções integráveis munido da norma  $L^2$ .

**Séries de Fourier.** Seja  $f(x)$  é uma função integrável em  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , ou seja, uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $2\pi$ , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo  $(-\pi, \pi]$ . A *série de Fourier (complexa)* de  $f(x)$  é a série formal

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (8.5)$$

(o símbolo “ $\sim$ ” é apenas uma notação para dizer que a série à direita, que pode não ser convergente!, é a série de Fourier da função à esquerda!), onde os *coeficientes de Fourier (complexos)* de  $f$  são os números complexos

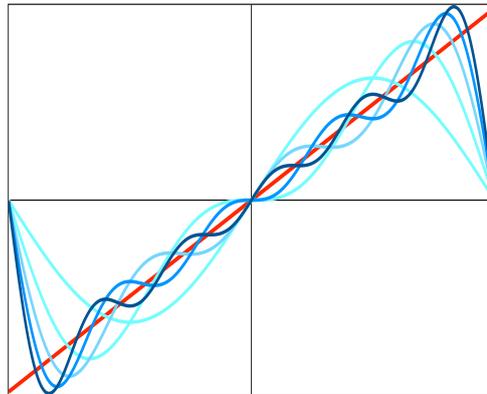
$$c_n = \widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (8.6)$$

Em particular, o coeficiente  $c_0$  é a média de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  (ou em qualquer outro intervalo de comprimento  $2\pi$ ).

As “somadas parciais da série de Fourier” são os polinómios trigonométricos

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad (8.7)$$

as projeções ortogonais de  $f$  sobre os subespaços  $\mathcal{E}_N \subset \mathcal{R}(\mathbb{T})$  gerados pelos  $e^{inx}$  com  $|n| \leq N$ . É claro que a distância entre  $f$  e  $\mathcal{E}_N$  é não crescente, i.e.  $\|S_{N+1}f - f\| \leq \|S_N f - f\|$ , pois  $\mathcal{E}_N \subset \mathcal{E}_{N+1}$ . Isto sugere que as  $S_N f(x)$  fornecem aproximações cada vez melhores de  $f(x)$  ao crescer o grau  $N$ , pelo menos no sentido da norma  $L^2$ .



Gráficos das somas parciais  $S_N f(x)$  de grau  $N = 1, 2, 3, 4$  e  $5$  (diferentes gradações de azul) da série de Fourier da função  $f(x) = x$  (vermelho), no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

**Séries de Fourier reais.** Usando a fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , a série de Fourier (8.5) pode ser representada como uma série de senos e cossenos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (8.8)$$

onde  $a_0/2 = c_0$ , e  $a_n = c_n + c_{-n}$  e  $b_n = i(c_n - c_{-n})$  se  $n \geq 1$ , ou seja,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx} \quad \text{e} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx}.$$

É evidente que se  $f$  tem valores reais então também os seus coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são reais.

Se  $f(x)$  é par, então  $c_n = c_{-n}$ , logo  $b_n = 0$ , para todos os  $n \geq 1$ , e a série de Fourier de  $f$  é uma série de cossenos  $a_0/2 + \sum_n a_n \cos(nx)$  com coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Se  $f(x)$  é ímpar, então  $c_n = -c_{-n}$ , logo  $a_n = 0$ , para todos os  $n \geq 0$ , e a série de Fourier de  $f$  é uma série de senos  $\sum_n a_n \sin(nx)$  com coeficientes

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

**ex:** Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas de período  $2\pi$  definidas, no intervalo  $[-\pi, \pi]$  por (as soluções estão no formulário!)

$$f(\theta) = \theta, \quad f(\theta) = |\theta|, \quad f(\theta) = \theta^2,$$

$$\Theta(\theta) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}, \quad 2\Theta(\theta) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}.$$

$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**ex:** Mostre que a série de Fourier complexa da função *sawtooth* (dente de serra)  $S(\theta)$ , periódica de período  $2\pi$  e definida por

$$S(\theta) := \begin{cases} \pi - \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -\pi - \theta & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

no intervalo  $-\pi \leq \theta < \pi$ , é

$$S(\theta) \sim \frac{1}{i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{n} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n\theta).$$

**ex:** Mostre que a série de Fourier complexa da função *square wave*  $Q(\theta)$ , periódica de período  $2\pi$  e definida por

$$Q(x) := \begin{cases} +1 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

no intervalo  $-\pi \leq \theta < \pi$ , é

$$Q(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} e^{-inx} = \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) - \dots \right).$$

**Fórmulas para séries de Fourier num intervalo genérico.** Uma mudança de variável linear permite determinar a expressão dos coeficientes de Fourier de uma função periódica de período arbitrário. Seja  $f(x)$  é uma função integrável em  $\mathbb{R}/2\ell\mathbb{Z}$ , ou seja, uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $2\ell$ , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo simétrico  $[-\ell, \ell]$ . A *série de Fourier (real)* de  $f(x)$  é

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) \right)$$

onde os *coeficientes de Fourier* de  $f$  são definidos pelos integrais

$$a_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) dx.$$

**Séries de Fourier de senos ou de cosenos.** Também é útil, na resolução de problemas como a corda vibrante ou a condução de calor, desenvolver funções, definidas num intervalo limitado, em séries de apenas senos ou apenas cosenos.

Uma função  $f(x)$ , definida no intervalo  $[0, \pi]$ , pode ser pensada como a restrição de uma função par  $f_{\text{par}}(x)$  ou de uma função ímpar  $f_{\text{ímpar}}(x)$  definidas no intervalo simétrico  $[-\pi, \pi]$ . A série de Fourier da função par  $f_{\text{par}}(x)$  contém apenas cosenos, e a série de Fourier da função ímpar  $f_{\text{ímpar}}(x)$  contém apenas senos. As duas séries, restritas ao intervalo  $[0, \pi]$ , representam (e com alguma sorte convergem para) a mesma função  $f(x)$ . Moralmente, a família formada pelos  $\sin(nx)$  e a família formada pelos  $\cos(nx)$  são duas “bases” do espaço das funções integráveis definidas no intervalo  $[0, \pi]$ .

Num intervalo de comprimento arbitrário, as fórmulas são assim.

A *série de Fourier de senos* da função  $f(x)$ , definida no intervalo  $0 \leq x \leq \ell$ , é a série de Fourier da extensão ímpar  $2\ell$ -periódica de  $f$ , ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f_{\text{ímpar}}(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) dx. \end{aligned}$$

(pois o produto de duas funções ímpares é uma função par).

A *série de Fourier de cosenos* da função  $f(x)$ , definida no intervalo  $0 \leq x \leq \ell$ , é a série de Fourier da extensão par  $2\ell$ -periódica de  $f$ , ou seja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right),$$

onde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f_{\text{par}}(x) \cos\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(n\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \end{aligned}$$

(pois o produto de duas funções pares é uma função par).

**ex:** Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, da extensão ímpar e  $2\pi$ -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo  $0 \leq \theta < \pi$  (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad 1 - \cos(2\theta) \qquad f(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \pi - \theta & \text{se } \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

**ex:** Determine as séries de Fourier de cossenos (ou seja, da extensão par e  $2\pi$ -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo  $0 \leq \theta < \pi$  (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad \sin(2\theta) \qquad \pi - \theta$$

## 8.4 Derivadas e decaimento dos coeficientes

A velocidade do decaimento dos coeficientes de Fourier é determinada pela regularidade da função.

**Lema de Riemann-Lebesgue.** Se a função  $f$  é limitada então os seus coeficientes de Fourier também são limitados. De fato, se  $|f(x)| \leq M$  então

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx \leq M.$$

Se  $f$  é contínua, a intuição sugere que os coeficientes  $\widehat{f}(n)$  com  $|n|$  grande sejam pequenos. A ideia é que as harmónicas  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$  com  $|n| \gg 1$  oscilam rapidamente em intervalos pequenos, onde  $f$  não varia muito por ser contínua, e portanto acontecem cancelações entre termos positivos e termos negativos.

**Teorema 8.2** (lema de Riemann-Lebesgue). *Se  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  é integrável (por exemplo, seccionalmente contínua) então  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \pm\infty$ .*

*Demonstração.* A desigualdade de Bessel 8.1 diz que se  $f$  é uma função integrável então a série  $\sum_n |\widehat{f}(n)|^2$  é convergente. Mas os termos de uma série convergentes decrescem para 0 quando  $n \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

O inconveniente desta demonstração, tão aparentemente simples, é que esconde o fenómeno do cancelamento por trás da geometria euclidiana do espaço das funções integráveis. Uma prova mais transparente de uma versão mais geral do lema, relevante no contexto da transformada de Fourier, é a seguinte.

**Teorema 8.3** (lema de Riemann-Lebesgue na reta). *Se  $f(x)$  é uma função Riemann absolutamente integrável na reta real, e a frequência  $\omega$  é real, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |\omega| \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Se  $f(x)$  é a função característica de um intervalo compacto  $[a, b]$ , o resultado é imediato, pois

$$\int_a^b e^{i\omega x} dx = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega b} - e^{i\omega a}) \rightarrow 0$$

quando  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Por linearidade, o mesmo acontece para funções escada (sobreposições finitas de funções características de intervalos compactos), e portanto para funções Riemann integráveis com suporte compacto. Uma função  $f(x)$  absolutamente Riemann integrável na reta real pode ser aproximada com precisão arbitrária por uma função escada com suporte num intervalo compacto, sendo o integral do seu módulo arbitrariamente pequeno fora deste intervalo. Ou seja, para cada  $\varepsilon > 0$  existem um intervalo compacto  $I = [-R, R]$  e uma função escada  $g(x)$  com suporte em  $I$  tais que

$$\int_I |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R} \setminus I} |f(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx \right| &\leq \left| \int_I e^{i\omega x} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_I e^{i\omega x} g(x) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R} \setminus I} e^{i\omega x} f(x) dx \right| \\ &\leq \int_I |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_I e^{i\omega x} g(x) dx \right| + \int_{\mathbb{R} \setminus I} |f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

se  $|\omega|$  é suficientemente grande. A arbitrariedade de  $\varepsilon$  implica o lema.  $\square$

**Derivadas e coeficientes de Fourier.** As harmônicas  $e_n(x) = e^{inx}$  são funções próprias do operador derivação  $D$ , definido por  $Df := f'$ , por exemplo no subespaço  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathcal{R}(\mathbb{T})$  das funções infinitamente deriváveis na circunferência, pois

$$(De_n)(x) = in e_n(x).$$

Isto implica a seguinte relação entre coeficientes de Fourier e derivadas.

**Teorema 8.4.** *Se a  $k$ -ésima derivada de  $f$  existe e é integrável, por exemplo se  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ , então os coeficientes de Fourier da  $k$ -ésima derivada de  $f$  são*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$$

*Demonstração.* Se  $f'$  é integrável, então os seus coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in) e^{-inx} dx \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

O teorema segue por indução.  $\square$

Esta relação simples entre coeficientes de Fourier e derivadas é a razão principal da utilidade das séries de Fourier na análise das equações diferenciais. Diz é que a “transformada de Fourier”, o operador  $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ , que envia uma função  $f(x)$  na sucessão  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dos seus coeficientes de Fourier, transforma derivadas  $f \mapsto f'$  em produtos  $c_n \mapsto in c_n$ . Portanto, no espaço dos coeficientes de Fourier, uma equação diferencial é uma equação algébrica!

O lema de Riemann-Lebesgue 8.2, aplicado à  $k$ -ésima derivada, então implica que

**Teorema 8.5.** *Os coeficientes de Fourier de uma função de classe  $\mathcal{C}^k$  decaem mais rápido que  $|n|^{-k}$ , ou seja,*

$$\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$$

quando  $n \rightarrow \pm\infty$ .

Portanto, os coeficientes de Fourier de uma função periódica  $f(x)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  decrescem mais rápido que o inverso de qualquer potência de  $|n|$ . Ou seja, para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$  existe uma constante  $C_k$  tal que

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C_k}{|n|^k}$$

se  $|n|$  é suficientemente grande.

**ex:** Determine a série de Fourier de uma função periódica de período  $2\pi$  que resolva a equação

$$f' = 0$$

ou a equação de Laplace

$$f'' = 0.$$

## 8.5 Aplicações das séries de Fourier às EDPs

O método de separação das variáveis e o princípio de sobreposição permitem obter soluções formais de muitas EDPs da física matemática, que são sobreposições de soluções separáveis, tipicamente séries de Fourier. São chamadas “formais” porque, sendo séries de funções, podem não ter derivadas (envolvidas na EDP) convergentes em todos os pontos do espaço-tempo. Verificar a convergência deve ser feito caso por caso, e pode ser um problema difícil (abordado na seção seguinte), dependendo da velocidade de decaimento dos coeficientes de Fourier. É muito provável, no entanto, que as soluções formais obtidas por estes métodos sejam satisfatórias para engenheiros e físicos. Aliás, com cálculos manuais ou simulações com computadores apenas conseguimos somar um número finito, por quanto grande, de harmônicas.

**Condução de calor com temperatura constante na fronteira.** A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo  $[0, \pi]$  com condições de fronteira nulas  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx).$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = x \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condições de fronteira  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 200$ , e condição inicial

$$u(x, 0) = 100 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada num ponto  $a \in (0, \pi)$ , ou seja,

$$u(x, 0) \sim \mu \cdot \delta(x - a).$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada numa vizinhança dum ponto  $a \in (0, \pi)$ , ou seja,

$$u(x, 0) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - a| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - a| > \varepsilon \end{cases},$$

com  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Calcule o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  mantendo constante o produto  $2\varepsilon\lambda = \mu$ , e compare com o exercício anterior.

**Condução de calor num condutor isolado.** A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \pi],$$

no intervalo  $[0, \pi]$  com fluxo nulo na fronteira (i.e. condutor isolado)  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

Observe que  $u(x, t) \rightarrow a_0/2$ , o valor médio de  $u(x, 0)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

**ex:** Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = x^2.$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x).$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} A & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ B & \text{se } \alpha \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

**ex:** Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

onde  $0 < \beta < \pi$  e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno.

**Corda vibrante.** A solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

de comprimento  $\pi$ , i.e.  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , com condições iniciais (deslocamento/perfil e velocidade)

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(cnt) + \frac{b_n}{cn} \sin(cnt) \right) \sin(nx)$$

**ex:** Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(4x) - \sin(5x).$$

**ex:** Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (deslocamento inicial “triangular”)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

**ex:** Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

**ex:** Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (impulso inicial concentrado no ponto médio)

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2).$$

**Timbres: cavaquinho e piano.** Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento  $\ell = \pi$ , densidade linear  $\rho$  e afinada com tensão  $k$ . As pequenas vibrações são modeladas pela equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \pi], \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde  $c = \sqrt{k/\rho}$ .

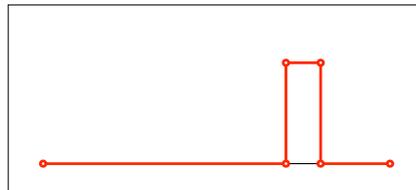
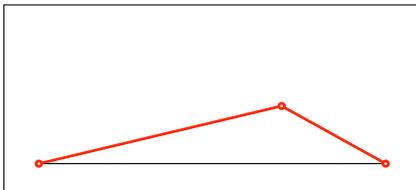
Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} \frac{h}{\alpha} x & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\pi - \alpha} (\pi - x) & \text{se } \alpha \leq x < \pi \end{cases}$$

onde  $0 < \alpha < \pi$  é o ponto onde dedilhamos a corda, e  $h$  é o máximo do deslocamento inicial.

Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação, podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo transmite à corda apenas um impulso instantâneo  $p = 2\varepsilon\rho v$  localizado num intervalo de comprimento pequeno  $2\varepsilon \ll \pi$  à volta de um ponto  $0 < \beta < \pi$  da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$



**ex:** Mostre que as amplitudes das harmónicas da corda do cavaquinho são

$$A_n = \frac{2h}{\alpha(\pi - \alpha)} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}.$$

**ex:** Mostre que as amplitudes das harmónicas da corda do piano são

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2v}{c} \frac{\sin(n\varepsilon) \sin(n\beta)}{n^2} \\ &\simeq \frac{p}{c\rho} \frac{\sin(n\beta)}{n}. \end{aligned}$$

no limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  mantendo constante o impulso transferido  $p = 2\varepsilon\rho v$  (o que faz sentido desde que  $n\varepsilon \ll 1$ , ou seja, para as primeiras harmónicas).

**ex:** Portanto, as energias  $E_n \sim A_n^2 \nu_n^2$  das (primeiras) harmónicas decaem como  $E_n \sim 1/n^2$  no caso do cavaquinho e como  $E_n \sim 1$  no caso do piano. Explique porque o som do piano é mais “cheio” do que o som do cavaquinho.

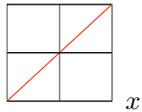
### Séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

	função $\sim$ série de Fourier ( $x \in [-\pi, \pi]$ )	coeficientes de Fourier ( $n \in \mathbb{Z}$ )
complexa	$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$	$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$
real	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$	$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ $b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

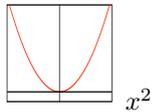
### Algumas séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

função em  $[-\pi, \pi]$

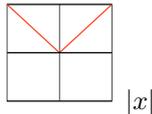
$\sim$  série de Fourier



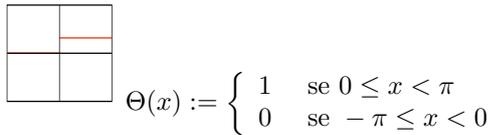
$$\sim 2 \left( \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$



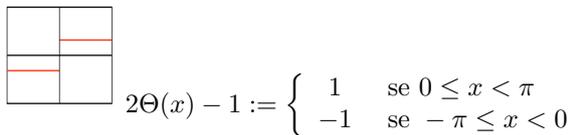
$$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right)$$



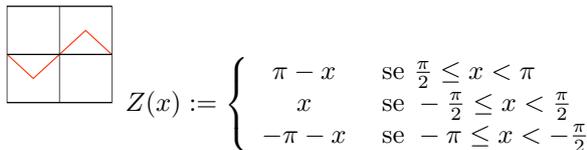
$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right)$$



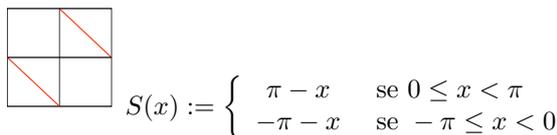
$$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$\sim \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$\sim \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$\sim 2 \left( \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

## 9 Convergência das séries de Fourier

### 9.1 Convergência uniforme

A existência de apenas uma derivada contínua é suficiente para garantir a convergência uniforme da série de Fourier.

7 dez 2020

**Séries trigonométricas.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função integrável e periódica de período  $2\pi$ . A série de Fourier de  $f(x)$  é uma *série trigonométrica*

$$\sum_n c_n e^{inx},$$

com coeficientes  $c_n = \widehat{f}(n)$  dados pelas (8.6). Sendo  $|e^{inx}| = 1$ , a sua convergência absoluta depende da convergência da série numérica  $\sum_n |c_n|$ . Se esta última série é convergente, então o teorema de Weierstrass 3.5 garante que a série trigonométrica converge uniformemente para uma função contínua.

As harmônicas  $e_n(x) = e^{inx}$  são funções infinitamente diferenciáveis, em particular contínuas. A convergência uniforme da série  $\sum_n c_n e^{inx}$  garante que o integral da soma é igual à soma dos integrais, i.e.

$$\int_a^b \left( \sum_n c_n e^{inx} \right) dx = \sum_n \int_a^b c_n e^{inx} dx.$$

A convergência uniforme da série  $\sum_n c_n e^{inx}$  e da série das derivadas  $\sum_n inc_n e^{inx}$ , ou seja, a convergência das séries numéricas

$$\sum_n |c_n| \quad \text{e} \quad \sum_n n|c_n|,$$

garantem que a soma  $\sum_n c_n e^{inx}$  é uma função derivável, e que a sua derivada pode ser calculada somando as derivadas das  $c_n e^{inx}$ s, i.e.

$$\left( \sum_n c_n e^{inx} \right)' = \sum_n inc_n e^{inx}.$$

Considerações análogas podem ser feitas para as derivadas sucessivas.

Por outro lado, é razoável esperar que as oscilações dos  $e^{inx}$  ajudem na convergência de séries trigonométricas que não são absolutamente convergentes.

**ex:** A sucessão  $f_n(x) = \sin(nx)$ , definida em  $[-\pi, \pi]$ , converge pontualmente?

**ex:** Use o teste  $M$  de Weierstrass, o teorema 3.5, para mostrar que a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

é uniformemente convergente.

**Séries de Fourier e séries de Laurent.** Seja  $g(z)$  é uma função holomorfa numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que contém um anel que contém a circunferência unitária  $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ . A sua expansão em série de Laurent centrada em  $p = 0$ ,

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

pode ser escrita, nos pontos  $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}$  (i.e. com  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ), como

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Os coeficientes  $c_n$  da série de Laurent de  $g(z)$  são portanto os coeficientes de Fourier da função  $f(\theta) := g(e^{i\theta})$ , periódica de período  $2\pi$ . Neste caso, a série de Fourier de  $f(\theta)$  é convergente, uniformemente na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , e converge para a própria função.

Se  $g(z)$  é holomorfa num disco que contém o disco unitário  $\mathbb{D}$ , então a sua série de Laurent é uma série de Taylor, ou seja, a sua série de Fourier apenas contém coeficientes  $c_n$  “positivos”, i.e. com  $n \geq 0$ .

**Transformada-Z e DTFT.** Dado um sinal discreto  $x[n]$ , definido para tempos inteiros  $n \in \mathbb{Z}$  (por exemplo múltiplos inteiros de um intervalo fixado  $\tau > 0$ ), os engenheiros definem a *transformada-Z (bilateral)* como a série de Laurent formal

$$X(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

(alguns textos usam uma definição alternativa, com  $z^n$ ). Se a transformada  $X(z)$  é uma função holomorfa num anel que contém a circunferência unitária, então é possível recuperar o sinal calculando o integral

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{in\omega} d\omega$$

Neste caso, os valores  $x[n]$  do sinal são os coeficientes de Fourier da função  $\omega \mapsto X(e^{i\omega})$ , definida na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Vice-versa, a função  $X(e^{i\omega})$  é chamada *transformada de Fourier de tempo discreto* (em inglês, *DTFT*) do sinal  $x[n]$ . Estas ideias são importantes na teoria do processamento de sinais.

**Convergência uniforme das séries de Fourier.** Seja  $f(x)$  uma função periódica de período  $2\pi$  e de classe  $C^2$ . Pelo teorema 8.4 e pelo lema de Riemann-Lebesgue 8.2, os seus coeficientes de Fourier são limitados por

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{M}{n^2}$$

se  $|n| \gg 1$ . Consequentemente, a sua série de Fourier  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$  é uniformemente convergente, e o limite é uma função contínua.

É possível obter a convergência uniforme de uma série de Fourier também com uma regularidade menor. Uma função  $f$  é *seccionalmente regular* se é contínua e se a sua derivada  $f'$  é seccionalmente contínua.

**Teorema 9.1.** *A série de Fourier de uma função seccionalmente regular, por exemplo de classe  $C^1$ , é uniformemente absolutamente convergente.*

*Demonstração.* Pelo teorema 8.4, a desigualdade de Cauchy-Schwarz 8.3, e depois pela desigualdade de Bessel 8.1, a série dos módulos é limitada por

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} \frac{|\widehat{f}'(n)|}{|n|} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \sqrt{\sum_{n \neq 0} 1/|n|^2} \sqrt{\sum_{n \neq 0} |\widehat{f}'(n)|^2} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + C \|f'\|_2, \end{aligned}$$

onde  $C^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$ . □

Se a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente, a sua soma  $\sum_n \widehat{f}(n)e^{inx}$  é uma função contínua. Esta soma tem grandes probabilidades de ser a própria  $f$ . De fato, é possível provar o seguinte resultado de unicidade.

**Teorema 9.2** (unicidade dos coeficientes de Fourier). *Se  $f(x)$  é uma função contínua na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  e os seus coeficientes de Fourier são nulos, i.e.  $\widehat{f}(n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , então  $f(x) \equiv 0$ .*

*Demonstração.* A ideia é a seguinte ([SS03a], Theorem 2.1 e Corollary 2.2.). Queremos provar que se  $x$  é um ponto de continuidade de  $f$ , e se  $f(x) \neq 0$ , então os coeficientes de Fourier  $\widehat{f}(n)$  não podem ser todos nulos. É claro que, a menos de translações, podemos considerar  $x = 0$ . Assumimos que  $f(0) = C > 0$ , e que, por continuidade,  $f(x) > C/2$  se  $|x| < \delta$ .

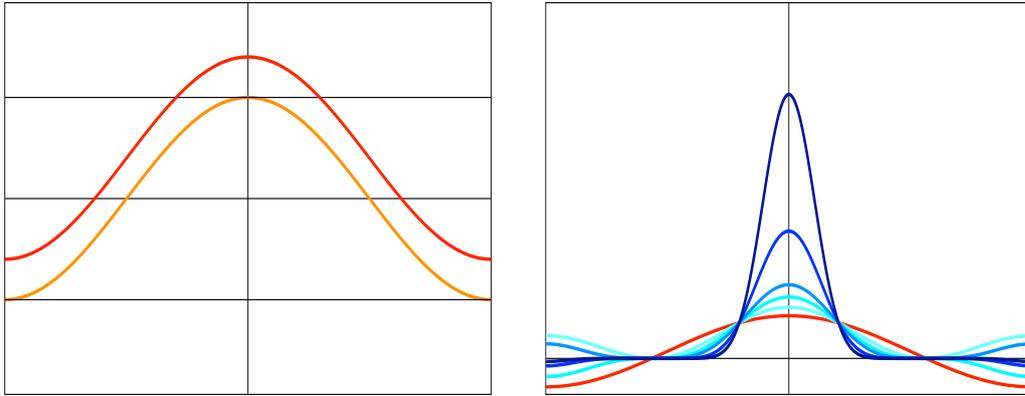
O gráfico de  $\cos(x)$  oscila entre  $\pm 1$ , e vale 1 em  $x = 0$ . Uma pequena translação

$$p(x) = \cos(x) + c$$

do cosseno, com  $c > 0$ , pode ser escolhida de forma tal que  $|p(x)| < \varepsilon < 1$  se  $|x| > \delta$ , que  $p(x) > 0$  se  $|x| \leq \delta$ , e que  $p(x) > \lambda > 1$  se  $|x| \leq \delta'$  para algum  $0 < \delta' < \delta$ . Então é claro que as potências

$$p_n(x) := (p(x))^n,$$

que são polinómios trigonométricos de grau  $n$  (pelas fórmulas de adição de senos e cossenos), satisfazem  $p_n(x) \geq \lambda^n \rightarrow \infty$  se  $|x| < \delta'$  e  $|p_n(x)| < \varepsilon^n \rightarrow 0$  se  $|x| > \delta$ .



Gráficos de  $\cos(x)$  (laranja) e de  $\cos(x) + c$  com  $c = 0.3$  (vermelho), e gráficos de  $p_n(x) = (\cos(x) + c)^n$  com  $c = 0.3$  e  $n = 1$  (vermelho) e  $n = 2, 3, 4, 7$  e  $11$  (diferentes gradações de azul).

Se todos os coeficientes de Fourier de  $f$  são nulos, então os integrais

$$\langle f, p_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_n(x) dx,$$

que são combinações lineares dos coeficientes de Fourier  $\widehat{f}(k)$  com  $|k| \leq n$ , são nulos. Por outro lado, e esta é a contradição,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_n(x) dx \rightarrow \infty$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . De fato,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_n(x) dx = \int_{|x| < \delta'} f(x) p_n(x) dx + \int_{\delta' \leq |x| < \delta} f(x) p_n(x) dx + \int_{|x| \geq \delta} f(x) p_n(x) dx$$

O segundo integral é positivo. O módulo do terceiro integral não é superior a  $\varepsilon^n 2\pi \|f\|_{\infty}$ , logo é limitado. O primeiro integral não é inferior a  $\lambda^n C \delta'$ , logo é ilimitado.  $\square$

Um corolário é que duas funções contínuas que têm os mesmos coeficientes de Fourier são necessariamente iguais. Por outro lado, é fácil ver que se a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente, então os coeficientes de Fourier da soma  $\sum \widehat{f}(n)e^{inx}$  são os próprios  $\widehat{f}(n)$  (trocando somas e integral). Portanto, se a série de Fourier de uma função contínua  $f(x)$  converge uniformemente, então converge uniformemente para a própria  $f(x)$ . Isto acontece, por exemplo, para uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Teorema 9.3.** *A série de Fourier de uma função  $f(x)$  seccionalmente regular, por exemplo de classe  $\mathcal{C}^1$ , converge absolutamente e uniformemente para  $f(x)$ .*

## 9.2 Produto de convolução e convergência pontual

Muitas funções interessantes e úteis não são contínuas, e as séries de Fourier destas funções não podem ser uniformemente convergentes. Se uma função é seccionalmente contínua e também admite derivada seccionalmente contínua, então a sua série de Fourier converge para os valores médios dos limites laterais da função nos pontos de descontinuidade. Nestes pontos, a série de Fourier mostra saltos que excedem de aproximadamente 18% os saltos da própria função.

**Produto de convolução.** O produto de convolução entre as funções integráveis  $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ , pensadas como funções periódicas de período  $2\pi$  na reta, é a função

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy.$$

também periódica de período  $2\pi$ . Um interpretação é que o valor de  $f * g$  num ponto  $x$  é uma “média” pesada dos valores  $f(y)$ , os pesos sendo os valores  $g(x - y)$  da função  $g$ .

O produto de convolução é simétrico, i.e.  $f * g = g * f$ , e linear nas duas variáveis, ou seja,  $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$  para todos os  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $f * (g + h) = f * g + f * h$ . É também associativo, ou seja,  $(f * g) * h = f * (g * h)$ . As demonstrações são elementares.

Outro fenômeno importante é que o produto de convolução de duas funções integráveis é uma função contínua! A convolução melhora a regularidade das funções (mas a prova não é elementar).

A importância do produto de convolução na teoria das séries de Fourier e nas suas aplicações às equações diferenciais depende do seguinte resultado.

**Teorema 9.4.** *Os coeficientes de Fourier de um produto de convolução são iguais aos produtos dos coeficientes de Fourier dos fatores, ou seja,*

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$$

*Demonstração.* Se  $f$  e  $g$  são contínuas

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x - y) e^{-in(x-y)} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) dy \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) \end{aligned}$$

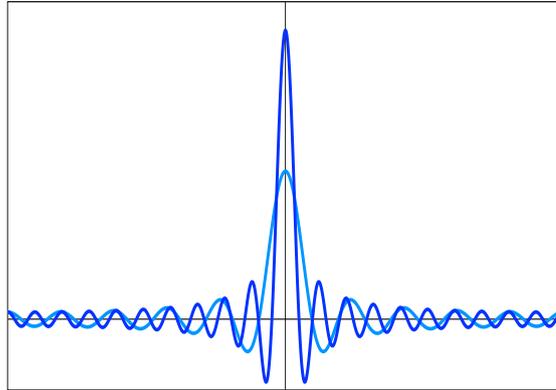
O caso geral é uma consequência do teorema de aproximação 4.6. □

**Convergência pontual das séries de Fourier.** Sejam  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função integrável e  $c_n$  os seus coeficientes de Fourier. A soma parciais da série de Fourier de  $f$  pode ser representada como produto de convolução

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \end{aligned} \quad (9.1)$$

da própria função com o *núcleo de Dirichlet*, definido por

$$\begin{aligned} D_N(x) &:= \sum_{n=-N}^N e^{inx} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned} \quad (9.2)$$



Gráficos do núcleo de Dirichlet com  $N = 10$  e  $20$ .

**Teorema 9.5.** Se  $f(x)$  é uma função seccionalmente regular, então as somas parciais  $S_N f(x)$  da sua série de Fourier convergem em cada ponto  $x$  para o valor médio dos limites laterais  $f(x^\pm)$ , ou seja,

$$S_N f(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

quando  $N \rightarrow \infty$ . Em particular, convergem para  $f(x)$  nos pontos onde  $f$  é contínua.

*Demonstração.* O núcleo de Dirichlet pode ser representado como

$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2} \quad (9.3)$$

Usando (9.1) e as (9.3), e depois (9.2), podemos representar a diferença entre as somas parciais

$S_N f(x)$  e o valor médio  $(f(x^+) + f(x^-))/2$  como um integral

$$\begin{aligned} S_N f(x) &- \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x+y) - f(x^-)) D_N(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+y) - f(x^+)) D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi F(x, y) (e^{i(N+1)y} - e^{iNy}) dy \end{aligned}$$

onde  $F$  é a função definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} & \text{se } -\pi < y < 0 \\ \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} & \text{se } 0 < y < \pi \end{cases}$$

Se  $f$  é seccionalmente regular, então  $F(x, y)$  admite limites laterais quando  $y \rightarrow 0^\pm$ , pela regra de l'Hôpital, e portanto é seccionalmente contínua. Então os integrais de  $F(x, y)$  vezes  $e^{iNy}$  convergem para zero quando  $N \rightarrow \infty$  pelo lema de Riemann-Lebesgue 8.2.  $\square$

Em particular, pelo teorema 9.1, a série de Fourier de uma função  $f(x)$  contínua e seccionalmente regular converge para  $f(x)$  na norma uniforme, ou seja,  $\|f - S_N f\|_\infty \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

A hipótese no teorema 9.5 não é a melhor possível. Para a convergência no ponto  $x$  é suficiente que a função  $F(x, y)$ , definida na demonstração, seja integrável, em quanto função de  $y$ , numa vizinhança de  $y = 0$ . Esta é chamada “condição de Dini”.

Também é possível ler a regularidade de uma função no decaimento dos seus coeficientes de Fourier.

**Teorema 9.6.** *Se os coeficientes de Fourier  $c_n$  de uma função  $f$  decaem como*

$$|c_n| \leq C |n|^{-(k+\alpha)}$$

com  $\alpha > 1$ , uma constante  $C > 0$  e um natural  $k$ , então a função  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ .

*Demonstração.* Para cada  $0 \leq k' \leq k$ , a série de Fourier  $\sum_n (in)^{k'} c_n e^{inx}$  é absolutamente e uniformemente convergentes, pois

$$\sum_n |n|^{k'} |c_n| \leq \sum_n |n|^{-\alpha} < \infty$$

se  $\alpha > 1$ . A sua soma é uma função contínua, igual a  $k'$ -ésima derivada de  $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ .  $\square$

**ex:** Verifique a fórmula (9.2) para o núcleo de Dirichlet (use as somas parciais da série geométrica).

**ex:** Verifique que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(x) dx = 1$$

**ex:** Calcule a série de Fourier de  $f(x) = |x|$  em  $x = 0$  e deduza a identidade

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

**ex:** Calcule a série de Fourier de  $f(x) = x^2$  em  $x = 0$  e deduza a identidade

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

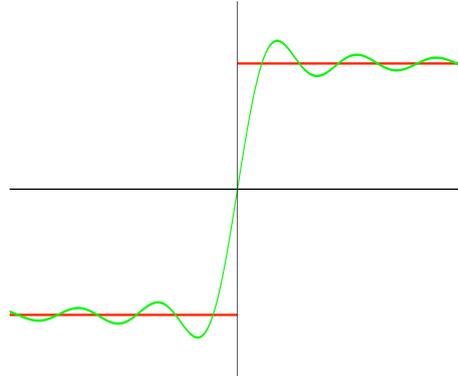
ou em  $x = \pi$  e deduza a identidade

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Fenômeno de Gibbs.** Uma série de Fourier  $\sum_n c_n e^{inx}$  não pode ser convergente nos pontos de descontinuidade de  $f(x)$ . Se  $f$  tem um salto de amplitude  $\delta := |f(x^+) - f(x^-)|$  no ponto  $x$ , então os gráficos das somas parciais da série de Fourier convergem para um segmento vertical que excede o salto de aproximadamente

$$-\delta \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \simeq \frac{0.28}{\pi} \delta \simeq 0.09 \cdot \delta$$

em cada lado.



Soma parcial de grau 17 (verde) da série de Fourier da função  $\Theta(x) - 1/2$  (vermelho), numa vizinhança da origem.

O fenômeno é local, portanto (a menos de retirar uma função contínua e multiplicar por uma constante) é suficiente compreender o caso da função localmente constante  $f(x) = \Theta(x) - 1/2$ , que é ímpar e tem um salto unitário na origem. Usando a (9.1),

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^x D_N(y) dy - \frac{1}{4\pi} \int_x^{\pi} D_N(y) dy \end{aligned}$$

A derivada é

$$\frac{d}{dx} S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} D_N(x) \simeq \frac{1}{\pi} \frac{\sin(Nx)}{x}$$

se  $N \gg 1$  (é grande) e  $|x| \ll 1$  (é pequeno), e portanto os pontos críticos são  $x \simeq \pm k\pi/N$ , com  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ . O máximo e o mínimo numa vizinhança da origem são atingidos nos pontos  $\pm\pi/N$ , respetivamente, e o salto entre os dois é (usando a paridade do núcleo de Dirichlet e o valor do integral impróprio (6.11) da função sinus cardinalis)

$$\begin{aligned} S_N f(\pi/N) - S_N f(-\pi/N) &\simeq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/N} D_N(y) dy \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/N} \frac{\sin(Ny)}{y} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

É possível estimar que  $-\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \simeq 0.09$ , e finalmente

$$S_N f(\pi/N) - S_N f(-\pi/N) \simeq 1 + 2 \cdot 0.09.$$

### 9.3 Identidades aproximadas e teorema de Fejer

**Delta de Dirac.** A “função” delta de Dirac em  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  é definida pela identidade formal

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \delta(x-y) dy = f(x),$$

se  $f(x)$  é uma função contínua e periódica de período  $2\pi$ . De facto,  $\delta$  não é uma função, mas uma “medida”, um funcional linear definido no espaço  $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$  das funções contínuas na circunferência, que associa à função  $f(x)$  o valor  $\langle \delta, f \rangle := f(0)$ . Pode ser definida/pensada como sendo um limite (no sentido das distribuições) de uma família de funções satisfazendo as propriedades codificadas na definição de “identidade aproximada”.

**Identidades aproximadas.** Uma *identidade aproximada* (ou *good kernels*) na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  é uma sucessão  $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de funções integráveis  $K_n(x)$  de massa total unitária, i.e.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1, \quad (9.4)$$

uniformemente integráveis, i.e. tais que existe  $M > 0$  tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M \quad (9.5)$$

para todos os  $n \in \mathbb{N}$  (esta condição é uma consequência de (9.4) se  $K_n(x) \geq 0$ ), e tais que, para cada  $\delta > 0$ , os integrais

$$I_n(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad (9.6)$$

quando  $n \rightarrow \infty$  (ou seja, assintoticamente concentradas na origem).

A expressão “identidade aproximada” é justificada pelo seguinte

**Teorema 9.7.** *Se  $f$  é uma função contínua periódica de período  $2\pi$  e  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma identidade aproximada na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , então*

$$(f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) K_n(y) dy \rightarrow f(x)$$

*uniformemente quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Pela continuidade uniforme de  $f$  (contínua e periódica), existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/M$  se  $|x - y| < \delta$ . Seja  $m = \sup_x |f(x)|$ . Usando (9.4),

$$\begin{aligned} (f * K_n)(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy + \int_{|x| \geq \delta} (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy \end{aligned}$$

O módulo do primeiro integral é limitado por  $\varepsilon$ , pela (9.5). O módulo do segundo integral é limitado por  $2m I_n(\delta)$ , definido na (9.6). Como  $I_n(\delta) \rightarrow 0$ , existe  $\bar{n}$  tal que  $I_n(\delta) \leq \varepsilon/2m$  se  $n \geq \bar{n}$ . Portanto, se  $n \geq \bar{n}$ , a distância entre  $f(x)$  e  $(f * K_n)(x)$  é limitada por  $2\varepsilon$ , independentemente de  $x$ .  $\square$

O índice inteiro  $n$  pode também ser substituído por um índice contínuo, como  $\varepsilon = 1/n$ . Neste caso, o limite quando  $n \rightarrow \infty$  passa a ser o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Deltas aproximadas.** Por exemplo, a função definida por

$$b(x) := e^{1/(1-x^2)}$$

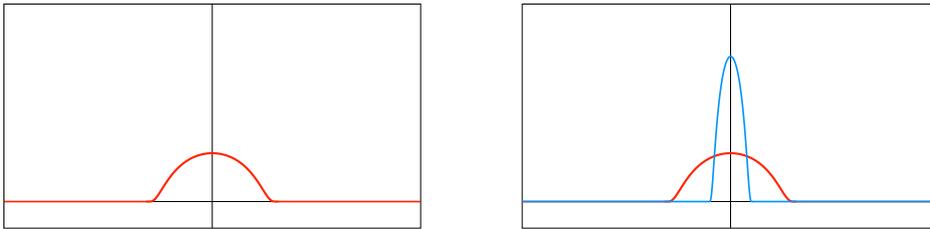
se  $|x| < 1$  e nula fora deste intervalo (chamada *bump function*), é infinitamente diferenciável, não negativa, e tem suporte no intervalo  $[-1, 1]$ . Se  $\gamma = \int_{-1}^1 b(x) dx > 0$  denota a área da região do plano limitada entre seu gráfico e o eixo dos  $x$ , então a função  $\delta_1(x) := b(x)/\gamma$  tem integral unitário. Se  $\varepsilon > 0$ , a função

$$\delta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \delta_1(x/\varepsilon) \quad (9.7)$$

tem suporte no intervalo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , é não negativa e infinitamente derivável, e tem integral unitário

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Consequentemente, a família das  $2\pi \delta_\varepsilon$  é uma identidade aproximada na circunferência quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



Gráficos de  $\delta_1$  (vermelho) e  $\delta_{1/3}$  (azul).

A delta de Dirac pode então ser interpretada/definida como o limite  $\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon$ , ou seja, pela seguinte identidade formal:

$$f * \delta := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * \delta_\varepsilon = f$$

É também interessante observar que se  $f$  é uma função apenas contínua, então os produtos de convolução

$$(f * \delta_\varepsilon)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \delta_\varepsilon(x - y) dy$$

são infinitamente deriváveis, pois  $\delta_\varepsilon$  é infinitamente derivável e é possível aplicar iterativamente a regra de Leibniz (a derivação dentro do integral). Assim, as  $f * \delta_\varepsilon$  podem ser consideradas “suavizações” de  $f$  que convergem para a própria função na norma do supremo.

**ex:** Verifique que a família de funções definidas por  $K_n(x) = n/2$  se  $|x| \leq 1/n$  e  $K_n(x) = 0$  se  $|x| > 1/n$ , forma uma identidade aproximada.

**Somas de Cesáro.** Seja  $\sum a_n$  uma série (formal, ou seja, convergente ou não), e sejam  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  as suas somas parciais. As *somas de Cesáro* da série  $\sum_n a_n$  são as médias aritméticas

$$C_N := \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_N}{N}$$

das primeiras  $N$  somas parciais. É evidente que se a série é convergente, ou seja, se  $S_N \rightarrow S$ , então também  $C_N \rightarrow S$  quando  $N \rightarrow \infty$ . A sucessão das  $C_N$  pode ser convergente também quando a série  $\sum a_n$  (ou seja, a sucessão das somas parciais  $S_N$ ) é divergente.

**ex:** Por exemplo, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  é divergente, mas as suas somas de Cesáro convergem. Para que valor?

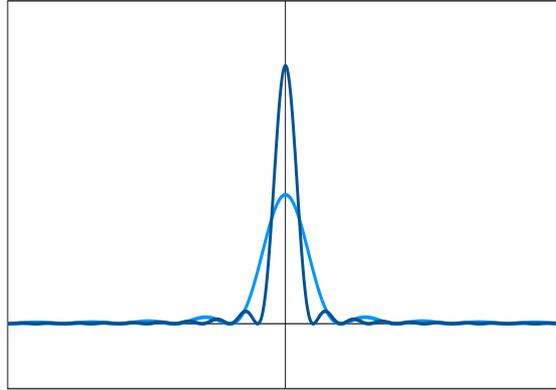
**Somas de Fejer e teorema de aproximação de Weierstrass.** As somas de Cesáro da série de Fourier de uma função integrável  $f$  são chamadas *somas de Fejer*. Um cálculo mostra que são dadas pela convolução

$$\begin{aligned} F_N f(x) &:= \frac{1}{N} (S_0 f(x) + S_1 f(x) + S_2 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-y) \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_N(x-y) dy \end{aligned} \quad (9.8)$$

da própria função com o *núcleo de Fejer*, definido por

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \quad (9.9)$$

É evidente que as  $F_N f(x)$  são, assim como as  $S_N f(x)$ , polinômios trigonométricos de grau  $N$ .



Gráficos do núcleo de Fejer com  $N = 10$  e  $20$ .

Acontece que

**Teorema 9.8.** *Os núcleos de Fejer formam uma identidade aproximada.*

*Demonstração.* A massa total de cada  $F_N$  (que é uma função não negativa) é igual a um, pois o mesmo acontece para os  $D_n$ , dos quais  $F_N$  é a média aritmética. Se  $0 < \delta < |x| \leq \pi$  então  $\sin^2(x/2) \geq c > 0$ , e portanto

$$F_N(x) \leq \frac{1}{cN}.$$

Isto implica que

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx \rightarrow 0$$

quando  $N \rightarrow \infty$ . □

Portanto, pela fórmula (9.8) e pelo teorema 9.7,

**Teorema 9.9** (Fejer). *Se  $f(x)$  é uma função contínua na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , então as somas de Fejer (9.8) convergem uniformemente para a própria  $f(x)$  quando  $N \rightarrow \infty$ .*

As somas de Fejer  $F_N(x)$  são polinômios trigonométricos. Portanto, o teorema de Fejer dá uma prova construtiva do famoso *teorema de aproximação de Weierstrass*<sup>19</sup>.

**Teorema 9.10** (Weierstrass). *Os polinômios trigonométricos são densos no espaço das funções contínuas  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  munido da norma do sup.*

Ou seja, para toda função contínua  $f(x)$  na circunferência, e para toda precisão  $\varepsilon > 0$ , existe um polinômio trigonométrico  $p(x)$  tal que

$$\|f - p\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Esta é uma versão trigonométrica, de fato equivalente, do mais clássico teorema de aproximação algébrico.

**Teorema 9.11** (Weierstrass). *Os polinômios (algébricos) são densos no espaço das funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  munido da norma do sup.*

*Demonstração.* Esta demonstração clássica é atribuída a Bernstein. Seja  $f(x)$  uma função contínua em  $[-1, 1]$ . Definimos

$$g(\theta) := f(\cos \theta)$$

É claro que  $g(\theta)$  é uma função contínua, periódica de período  $2\pi$ , e par. Pela nossa prova construtiva do teorema 9.10, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um polinômio trigonométrico par, ou seja de cossenos,

$$p(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\theta)$$

(pois as somas de Cesàro de uma função par são séries de cossenos) tal que

$$|g(\theta) - p(\theta)| < \varepsilon$$

Mas cada  $\cos(k\theta)$  é um polinômio em  $\cos \theta$ , ou seja, existem polinômios algébricos  $T_k(x)$  (chamados *polinômios de Chebyshev*) tais que

$$\cos(k\theta) = T_k(\cos \theta)$$

se  $k \geq 0$  (uma consequência da fórmula de de Moivre (1.6)). Portanto,

$$|f(x) - q(x)| < \varepsilon$$

onde  $q(x)$  é o polinômio  $\sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$ . □

**ex:** Verifique a expressão (9.9) (calcule  $NF_N(x)$  usando a identidade (9.2))

$$\begin{aligned} NF_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+1/2)x} \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left( \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix/2} - e^{ix/2}} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

<sup>19</sup>K. Weierstrass, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin* (1885), 633-639 and 789-805.

### 9.4 Convergência em média quadrática

A série de Fourier de uma função integrável converge para a própria função em média quadrática. Este resultado é moralmente um teorema de Pitágora em dimensão infinita, ou, fisicamente, um teorema de conservação da energia.

**Aproximação de funções integráveis na norma  $L^2$ .** As funções integráveis podem ser aproximadas com precisão arbitrária na norma  $L^2$  por funções contínuas, ou até infinitamente diferenciáveis.

**Teorema 9.12.** *Seja  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função (Riemann) integrável. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma função contínua  $\psi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que*

$$\|f - \psi\|_2 < \varepsilon$$

*Demonstração.* Seja  $|f(x)| \leq M$ , e seja  $\delta > 0$  arbitrário. De acordo com o teorema de aproximação 4.6 (é claro que a periodicidade não é um problema), existe uma função contínua  $\psi(x)$  na circunferência, também limitada por  $|\psi(x)| \leq M$ , tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi(x)| dx < \delta$$

Então o quadrado da norma  $L^2$  da diferença entre  $f$  e  $\psi$  é limitado por

$$\begin{aligned} \|f - \psi\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi(x)| dx \\ &\leq \frac{2M}{\pi} \delta \end{aligned}$$

pois  $|f(x) - \psi(x)| \leq 2M$ . Basta portanto escolher  $\delta < \pi\varepsilon^2/2M$ .  $\square$

Neste caso também é claro que a função  $\psi$  pode ser escolhida infinitamente derivável. Por exemplo, é possível observar que os produtos de convolução  $g * \delta_\varepsilon$  de uma função contínua  $g$  com a identidade aproximada  $\delta_\varepsilon$  (definida em (9.7)) são funções infinitamente deriváveis que convergem uniformemente para a própria função  $g$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mas se  $\|g * \delta_\varepsilon - g\|_\infty \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  então também  $\|g * \delta_\varepsilon - g\|_2^2 \leq \|g * \delta_\varepsilon - g\|_\infty^2 \rightarrow 0$ . Consequentemente,

**Teorema 9.13.** *O espaço  $C^\infty(\mathbb{T})$  das funções infinitamente diferenciáveis na circunferência (ou na reta real e periódicas de período  $2\pi$ ) é denso no espaço  $\mathcal{R}(\mathbb{T})$  das funções Riemann itegráveis munido da norma  $L^2$ .*

Este teorema (caso particular de um resultado mais geral) mostra, por exemplo, que é sempre possível definir operadores diferenciais, como a derivação ou o laplaciano, em subespaços densos do espaço das funções integráveis.

**Convergência em média quadrática.** De acordo como o teorema de aproximação 4.6, uma função integrável  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser aproximada com precisão arbitrária na norma  $L^2$  por funções contínuas. Pelo teorema de Weierstrass 9.11, as funções contínuas podem ser aproximadas com precisão arbitrária na norma do sup por polinômios trigonométricos, e a convergência na norma do sup implica, sendo o comprimento da circunferência finito, a convergência na norma  $L^2$ . Portanto, existe uma sucessão de polinômios trigonométricos  $T_n$  tais que  $\|f - T_n\|_2 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela (prova da) desigualdade de Bessel 8.1,  $\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - T_n\|_2$  se  $N$  é superior ou igual ao grau de  $T_n$ . Portanto,

**Teorema 9.14** (convergência em média quadrática). *A série de Fourier de uma função integrável  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  converge para a própria função em média quadrática, ou seja,*

$$\|f - S_N f\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $N \rightarrow \infty$ .

A fórmula (8.4) então implica que a desigualdade de Bessel é, na verdade, uma igualdade.

**Teorema 9.15** (Parseval). *Se  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função integrável então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$$

Sendo os produtos internos determinados pelas normas, usando as identidades de polarização

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2),$$

o teorema de Parseval 9.15 implica e é equivalente ao seguinte

**Teorema 9.16** (Parseval). *Se  $f$  e  $g$  são funções integráveis na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \langle f, g \rangle_2$$

O teorema de Parseval é uma versão do teorema de Pitágoras em dimensão infinita. Do ponto de vista físico, é um teorema de conservação, chamado *teorema da energia de Rayleigh*. Diz que a transformada de Fourier, o operador  $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$  que envia uma função integrável na sucessão dos seus coeficientes de Fourier, é um operador unitário de  $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

**ex:** Mostre que as séries de Fourier de  $f(x) = x$ , definida no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , é

$$\sum_{n \neq 0} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}.$$

Calcule  $\|f\|_2^2$  e use a identidade de Parseval para deduzir

$$\zeta(2) := 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 10 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é um prisma ideal que decompõe um sinal nas harmônicas das quais é constituído. A transformada de Fourier inversa permite reconstruir o sinal a partir do seu espectro.

### 10.1 Transformada de Fourier

14 dez 2020

**Heurística.** A teoria das séries de Fourier permite representar funções suficientemente regulares  $f(x)$ , definidas na circunferência  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , como sobreposições numeráveis  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$  de harmônicas  $e_n(x) = e^{inx}$ . As harmônicas são funções próprias do operador derivação  $D$ , e portanto do laplaciano  $-\Delta = (iD)^2$ , que é um operador auto-adjunto e não-negativo, definido no espaço  $C^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathcal{R}(\mathbb{T})$  das funções infinitamente deriváveis na circunferência, munido do produto interno  $L^2$ , definido por  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ . Os coeficientes de Fourier são as componentes  $c_n = \langle f, e_n \rangle$ . Portanto, o que estamos a fazer é representar vetores  $f$  numa “base ortonormada” que diagonaliza o laplaciano. Isto é útil porque muitas EDPs da física-matemática contêm o laplaciano (equação de Laplace/Poisson, das ondas, do calor, de Schrödinger, ...).

Ao considerar funções definidas na reta real (ou, melhor, ao fazer o limite de circunferências  $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$  de raio crescente  $R \rightarrow \infty$ ), as possíveis harmônicas deixam de ser numeráveis, mas são parametrizadas por um contínuo de frequências angulares. Cada harmônica  $e_\omega(x) = e^{i\omega x}$ , com  $\omega \in \mathbb{R}$ , ainda é um vetor próprio do operador derivação  $D$ , com valor próprio  $i\omega$ , e portanto do laplaciano  $-\Delta = (iD)^2$ , com valor próprio  $\omega^2$ . Assim, esperamos poder representar funções suficientemente regulares  $f(x)$  como sobreposições, agora não-numeráveis, de harmônicas, ou seja, integrais do género

$$f(x) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

O produto interno natural é um integral impróprio  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$ , e o quadrado da norma associada representa uma energia  $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ . Ainda esperamos obter os coeficientes como componentes formais

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Isto é o caso, se definimos apropriadamente o espaço euclidiano das funções de energia finita admissíveis. No entanto, encontramos o aparente paradoxo de que as harmônicas não têm norma finita. Portanto, estamos a calcular componentes  $\langle f, e_\omega \rangle$  sobre direções que não pertencem ao espaço euclidiano onde vivem os vetores!

**Transformada de Fourier de funções integráveis.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função absolutamente integrável na reta real, ou seja, tal que exista o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

É suficiente, por exemplo, que  $f$  seja uma função seccionalmente contínua que decai como

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}$$

com  $\varepsilon > 0$  e  $C < \infty$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$ . A transformada de Fourier de  $f$  é a função  $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida pelo integral impróprio

$$\boxed{(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx} \quad (10.1)$$

Uma notação tradicional é  $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ .

O espaço onde vive a variável  $\xi$  da transformada de Fourier  $\widehat{f}$ , chamada “variável conjugada”, deve ser pensado como uma reta real  $\mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$  (chamado pelos matemáticos *dual de Pontryagin*

do corpo dos reais, isomorfo ao próprio  $\mathbb{R}$ ) diferente da reta real onde vive a variável  $x$  da função  $f$ . Por exemplo, se a variável independente da função  $f(t)$  é um “tempo”  $t$ , então a variável conjugada  $\xi$  representa uma “frequência” (pois o produto deve ser adimensional). Por esta razão, a transformada de Fourier de uma função  $f(t)$ , pensada como um “sinal”, é também chamada *espectro* de  $f(t)$ .

Uma definição alternativa usa a “frequência angular”  $\omega = 2\pi\xi$ , e é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (10.2)$$

na notação dos engenheiros, em que  $F = \mathcal{F}f$ . Também é possível normalizar de forma diferente a transformada, ou seja, dividir por  $2\pi$  ou por  $\sqrt{2\pi}$ .

**Funções de onda.** Se a variável independente é uma “posição”  $q$ , então a variável conjugada representa um “momento”  $p$  sobre uma “ação”  $h$  (como, por exemplo, a constante de Planck  $h \simeq 6.63 \times 10^{-34}$  J · s no contexto da mecânica quântica). Por exemplo, as ondas planas em mecânica quântica são

$$e^{-2\pi i p q / h} = e^{-i p q / \hbar},$$

onde  $\hbar = h/2\pi$  é a constante de Planck reduzida. A transformada de Fourier de uma *função de ondas*  $\psi(q)$  assume a forma

$$\widehat{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q) e^{-i p q / \hbar} dq$$

Observe que as harmônicas  $|p\rangle$ , as funções  $\langle q|p\rangle := e^{i p q / \hbar}$ , são funções próprias do operador momento  $P = -i\hbar D$ , com valor próprio  $p$ , i.e.  $P|p\rangle = p|p\rangle$ .

**Propriedades elementares.** A transformada de Fourier é linear, ou seja,

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda(\mathcal{F}f)$$

se  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

A transformada de Fourier de uma translação  $(T_a f)(t) := f(t - a)$  no espaço dos tempos é uma modulação

$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi) \quad (10.3)$$

no espaço das frequências. Vice-versa, a transformada de Fourier de uma modulação  $(M_b f)(t) := e^{2\pi i b t} f(t)$  no espaço dos tempos é uma translação

$$\widehat{(M_b f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi - b) \quad (10.4)$$

no espaço das frequências. Portanto, a transformada de Fourier “entrelaça” os operadores de translação e modulação:

$$\mathcal{F} \circ T_a = M_{-a} \circ \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \circ M_b = T_b \circ \mathcal{F}.$$

A transformada de Fourier de uma homotetia  $(H_\lambda f)(t) := f(\lambda t)$  no espaço dos tempos, com  $\lambda > 0$ , é

$$\widehat{(H_\lambda f)}(\xi) = \lambda^{-1} \widehat{f}(\xi/\lambda), \quad (10.5)$$

ou seja,

$$\mathcal{F} \circ H_\lambda = \lambda^{-1} H_{\lambda^{-1}} \circ \mathcal{F}$$

A transformada de Fourier da função complexa conjugada  $\overline{f}(t) := \overline{f(t)}$  é

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)} \quad (10.6)$$

**ex:** Mostre que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua tal que  $|f(x)| \leq C/(1 + |x|^{1+\varepsilon})$ , com  $\varepsilon > 0$ , então

$$I_N = \int_{-N}^N |f(x)| dx$$

é uma sucessão de Cauchy, e portanto existe o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$

**ex:** Verifique as propriedades (10.3), (10.4), (10.5) e (10.6).

**ex:** Use as propriedades (10.3) (10.4) e a fórmula de Euler para mostrar que a transformada de Fourier de  $f(x) \cos(\alpha x)$  é

$$\frac{1}{2} (\widehat{f}(x - \alpha) + \widehat{f}(x + \alpha))$$

e que a transformada de Fourier de  $f(x) \sin(\alpha x)$  é

$$\frac{1}{2i} (\widehat{f}(x - \alpha) - \widehat{f}(x + \alpha))$$

**ex:** Calcule a transformada de Fourier da função característica do intervalo  $[-\ell, \ell]$ .

**ex:** Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \text{e} \quad f(x) = e^{-2\pi b|x|}.$$

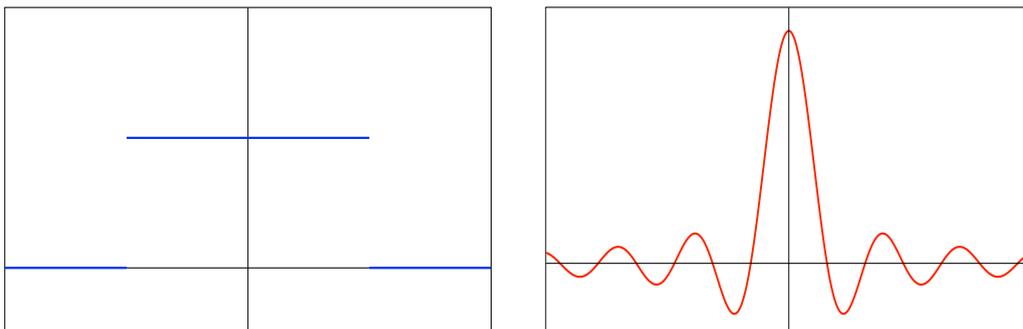
com  $b > 0$ .

**Pulso e sinc.** O *pulso*, ou *função retangular*, é a função característica do intervalo de comprimento um à volta da origem, ou seja,

$$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A transformada de Fourier do pulso é a função *sinc* (“sinus cardinalis”) normalizada

$$\begin{aligned} \widehat{\text{rect}}(\xi) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi} =: \text{sinc}(\xi) \end{aligned}$$



Pulso (azul) e sinus cardinalis (vermelho).

## 10.2 Transformada de Fourier no espaço de Schwartz

O espaço das funções absolutamente integráveis é muito grande, e não é fácil compreender as propriedades das transformadas de Fourier dos seus elementos. Mais fácil é restringir a transformada a um espaço muito menor, feito de funções muito regulares. O espaço natural onde estudar a transformada de Fourier é o espaço de Schwartz.

**Espaço de Schwartz.** O *espaço de Schwartz* (da reta real) é o espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  das funções infinitamente diferenciáveis na reta real que decrescem, com todas as suas derivadas, mais rápido que o inverso de qualquer polinómio. Ou seja, o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  tais que  $\|f\|_{n,m} < \infty$  para todos os  $n, m \in \mathbb{N}$ , onde as semi-normas  $\|\cdot\|_{n,m}$  são definidas por

$$\|f\|_{n,m} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)|$$

Isto significa que se  $f(x)$  é uma função de Schwartz e  $m \geq 0$  e  $n \geq 0$  são inteiros, então existe uma constante  $C_{n,m}$  tal que o módulo da  $m$ -ésima derivada de  $f$  é limitado por

$$|f^{(m)}(x)| \leq \frac{C_{n,m}}{|x|^n}$$

se  $|x| \gg 1$ . Em particular, as funções de Schwartz são absolutamente integráveis. É evidente que se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então pertencem ao espaço de Schwartz também todas as derivadas  $f^{(m)}(x)$  e todos os produtos  $p(x)f^{(m)}(x)$ , onde  $p \in \mathbb{C}[t]$  é um polinómio arbitrário.

O espaço de Schwartz é “grande”, pois por exemplo contém o espaço  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$  das funções teste, que são infinitamente deriváveis e têm suporte compacto. Também contém muitas funções cujo suporte é toda a reta real, como as combinações lineares das Gaussianas, definidas mais à frente.

**Operadores derivação e multiplicação.** O *operador derivação* é definido por

$$(Df)(x) := f'(x),$$

e o *operador multiplicação* é definido por

$$(Xf)(x) := x f(x).$$

É claro que  $D$  e  $X$  são operadores lineares do espaço de Schwartz no próprio espaço de Schwartz. Em particular, podem ser iterados um número arbitrário de vezes.

A transformada de Fourier entrelaça derivadas com multiplicações, e esta é a razão da sua importância no estudo das equações diferenciais.

**Teorema 10.1.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então a transformada de Fourier da derivada  $f'$  e a derivada da transformada de Fourier de  $f$  são*

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) \quad e \quad \widehat{f'}(\xi) = (-2\pi i x f)(\xi), \quad (10.7)$$

respetivamente, ou seja,  $\mathcal{F} \circ D = (2\pi i X) \circ \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F} \circ (-2\pi i X) = D \circ \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* A transformada da derivada de  $f(x)$  é calculada por meio de uma integração por partes,

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= f(x) e^{-2\pi i \xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-2\pi i \xi) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \end{aligned}$$

A derivada da transformada de  $f(x)$  é calculada derivando dentro do integral (pois é simples adatar a prova to teorema 4.9 a integrais impróprios de funções de Schwartz),

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-2\pi i x) e^{-2\pi i \xi x} dx\end{aligned}$$

□

Por indução, a transformada de Fourier da  $k$ -ésima derivada de  $f(x)$  é igual a  $(2\pi i \xi)^k$  vezes a transformada de Fourier  $\widehat{f}(\xi)$ , i.e.

$$\mathcal{F} \circ D^k = (2\pi i X)^k \circ \mathcal{F}$$

e a  $k$ -ésima derivada da transformada de Fourier de  $f(x)$  é a transformada de Fourier de  $(-2\pi i x)^k f(x)$ , ou seja

$$D^k \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ (-2\pi i X)^k$$

Os fatores  $2\pi$  são ausentes se definimos a transformada de Fourier usando a frequência angular  $\omega = 2\pi\xi$ .

Em particular, como os operadores de multiplicação e derivação preservam o espaço de Schwartz, a transformada de Fourier envia o espaço de Schwartz no próprio espaço de Schwartz (embora de outra variável), ou seja pode ser pensado como um operador linear  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ .

**ex:** Mostre que uma função de Schwartz é uniformemente contínua (é arbitrariamente pequena numa vizinhança de  $\pm\infty$  e uniformemente contínua na região compacta complementar).

**ex:** Mostre que uma função de Schwartz  $f(x)$  com valores reais é par sse  $\widehat{f}(\xi)$  é real, e é ímpar sse  $\widehat{f}(\xi)$  é imaginário puro.

**Produto de convolução.** O produto de convolução das funções de Schwartz  $f(x)$  e  $g(x)$  é a função  $(f * g)(x)$  definida pelo integral impróprio

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy$$

É evidente que se  $f, g, \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então também  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . O produto de convolução é linear nos dois fatores, simétrico e associativo. Mais importante é o seguinte resultado, que mostra que a transformada de Fourier envia produtos de convolução em produtos pontuais.

**Teorema 10.2.** A transformada de Fourier de um produto de convolução é o produto pontual das transformadas de Fourier dos fatores, ou seja,

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \tag{10.8}$$

*Demonstração.* A prova consiste numa mudança de variáveis e numa aplicação do teorema de Fubini (ou seja, a mudança da ordem de integração, que é sempre possível para integrais de funções de Schwartz):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(z) dy e^{-2\pi i \xi(z+y)} dz \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(z) dy e^{-2\pi i \xi z} dz \right)\end{aligned}$$

□

**ex:** Mostre que o produto de convolução  $(\text{rect} * \text{rect})(t)$  é a *função triangular*

$$\text{tri}(t) := \max\{1 - |t|, 0\},$$

e calcule a transformada de Fourier de  $\text{tri}(x)$ .

### 10.3 Identidades aproximadas e fórmula de inversão

**Salto unitário e delta de Dirac.** A função *salto unitário* (ou *função de Heaviside*) é a função  $\Theta(x)$  que vale 1 se  $x$  é positivo e 0 se  $x$  é negativo.

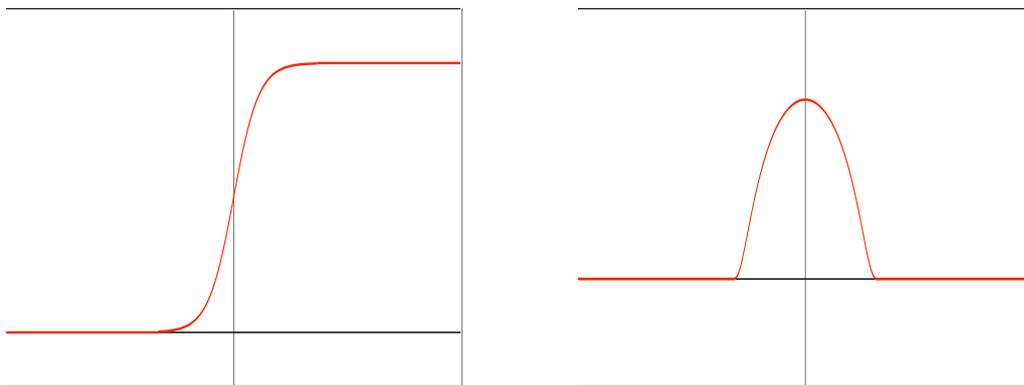
Uma integração por partes formal mostra que o produto de convolução da derivada da função salto unitário (que naturalmente não existe enquanto função!) reproduz uma função de Schwartz, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x-y) f(y) dy &= -\Theta(x-y) f(y)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y) f'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x f'(y) dy = f(x). \end{aligned}$$

A derivada  $\Theta'(x)$  é chamada *delta de Dirac*, e denotada por  $\delta(x)$ . Naturalmente, não é uma função, mas é definida pela identidade formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy := f(x).$$

É possível modificar a função  $\Theta(x)$  num pequeno intervalo de raio  $\varepsilon$  em torno da origem, e construir uma função infinitamente diferenciável  $\Theta_\varepsilon(x)$  que cresce de 0 até 1 neste intervalo. Por exemplo, podemos usar a primitiva  $\Theta_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x \delta_\varepsilon(y) dy$  da função  $\delta_\varepsilon$  definida em (9.7). A sua derivada  $\delta_\varepsilon(x) = \Theta'_\varepsilon(x)$  é então uma função infinitamente derivável, não negativa, com suporte no intervalo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  e com integral unitário.



Gráficos de  $\Theta_\varepsilon(x)$  e  $\delta_\varepsilon(x)$ .

É claro que se  $f$  é contínua no ponto  $x$  então

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x-y) f(y) dy &= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta_\varepsilon(x-y) f(y) dy \\ &\simeq f(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta_\varepsilon(x-y) dy = f(x) \end{aligned}$$

se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno. A função  $\delta_\varepsilon$  é chamada “*identidade aproximada*”. É útil codificar esta ideia, com condições mais fracas sobre a função  $\delta_\varepsilon$ , na seguinte definição.

**Identidades aproximadas.** Uma *identidade aproximada* na reta real é uma família de funções integráveis ( $K_n$ ) que são não-negativas, ou seja,  $K_n(x) \geq 0$ , ou pelo menos uniformemente absolutamente integráveis, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x)| dx < M, \quad (10.9)$$

com uma constante  $M$  que não depende de  $n$ , que têm “massa total unitária”, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) dx = 1, \quad (10.10)$$

e que são “assimptoticamente concentradas na origem”, ou seja, para todo  $\delta > 0$

$$I_n(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} K_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (10.11)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

O parâmetro discreto  $n \rightarrow \infty$  pode ser substituído por um parâmetro contínuo como  $\varepsilon \rightarrow 0$ , naturalmente. A mesma prova do teorema 9.7, mutatis mutandis, mostra que

**Teorema 10.3.** Se  $f(x)$  é integrável e uniformemente contínua, por exemplo é uma função de Schwartz, e  $(K_n)$  é uma identidade aproximada na reta real, então

$$(f * K_n)(x) \rightarrow f(x)$$

uniformemente quando  $n \rightarrow \infty$ .

**ex:** Mostre que a família das  $K_n(x) := n \cdot \text{rect}(nx)$  é uma identidade aproximada.

**Gaussianas e núcleo do calor.** As gaussianas são as funções

$$Ce^{-\gamma x^2}$$

onde  $C$  e  $\gamma > 0$  são parâmetros reais. É claro que as gaussianas estão no espaço de Schwartz, pois as suas derivadas são produtos de polinômios vezes as próprias gaussianas, e os exponenciais negativos decrescem para zero mais rápido de qualquer potência  $|x|^n$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

O cálculo (4.11) diz que a gaussiana  $G(x) := e^{-\pi x^2}$  tem integral igual a um, e o cálculo (4.12) diz que

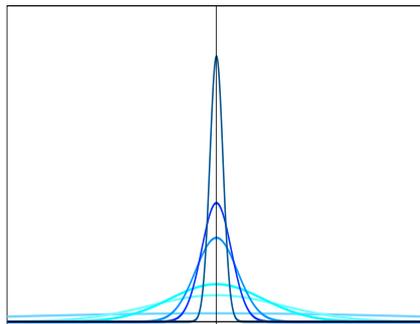
**Teorema 10.4.** A gaussiana  $G(x) = e^{-\pi x^2}$  é “auto-dual”, ou seja é igual à sua transformada de Fourier:

$$\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$$

A família de gaussianas

$$G_\tau(x) := \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi x^2 / \tau} \quad (10.12)$$

parametrizadas por  $\tau > 0$ , é chamada *núcleo do calor*.



Gaussianas  $G_\tau$  com  $\tau = 1, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$ .

Observem que  $G_\tau(x) dx = dG(x/\sqrt{\tau})$  e, em particular,  $G_1(x) = G(x)$ . É claro portanto que todas as  $G_\tau(x)$  têm integral unitário, i.e.  $\int_{-\infty}^{\infty} G_\tau(x) dx = 1$ . Um cálculo elementar, usando o teorema 10.4 e a propriedade (10.5), mostra que a transformada de Fourier do núcleo do calor é

$$\widehat{G}_\tau(\xi) = e^{-\pi\tau\xi^2} \quad (10.13)$$

As gaussianas  $G_\tau(x)$  estão cada vez mais concentradas em torno da origem quando  $\tau$  decresce, em quanto as transformadas  $\widehat{G}_\tau(\xi)$  estão cada vez mais concentradas em torno da origem quando  $\tau$  cresce. Esta é uma manifestação do princípio de indeterminação de Heisenberg-Weyl, ilustrado mais à frente.

Acontece que

**Teorema 10.5.** *A família das  $G_\tau$ 's forma uma identidade aproximada quando  $\tau \rightarrow 0^+$*

*Demonstração.* Sendo funções positivas com integral impróprio unitário, falta apenas verificar a propriedade (10.11). A mudança de variável  $x/\sqrt{\tau} = y$  mostra que

$$\int_{|x|>\delta} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi x^2/\tau} dx = \int_{|y|>\delta/\sqrt{\tau}} e^{-\pi y^2} dy \rightarrow 0$$

quando  $\tau \rightarrow 0^+$ , porque o integral impróprio da gaussiana é convergente.  $\square$

Portanto, pelo teorema 10.3,

**Teorema 10.6.** *Se  $f(x)$  é integrável e uniformemente contínua, por exemplo se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então*

$$(f * G_\tau)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) G_\tau(x-y) dy \rightarrow f(x)$$

*uniformemente em  $x$  quando  $\tau \rightarrow 0^+$ .*

**ex:** Mostre que a gaussiana  $G(x) = e^{-\pi x^2}$  é solução da equação diferencial

$$G' + (2\pi x)G = 0.$$

(com condição de fronteira  $g(\pm\infty) = 0$ ). Observe que a sua transformada de Fourier também satisfaz a equação diferencial

$$\widehat{G}' + (2\pi\xi)\widehat{G} = 0.$$

Deduza que a gaussiana  $G(x)$  é um ponto fixo da transformada de Fourier.

**ex:** Calcule a transformada de Fourier da gaussianas genéricas  $Ce^{-\gamma x^2}$  ou da translação  $Ce^{\gamma(x-a)^2}$  (use a transformada da gaussiana  $G(x) = e^{-\pi x^2}$  e as propriedades elementares da transformada de Fourier).

**ex:** Verifique que  $G_\tau * G_{\tau'} = G_{\tau+\tau'}$ .

**Teorema de inversão.** O teorema de Fubini, ou seja, uma mudança da ordem de integração, que é sempre possível com funções de Schwartz, implica a “fórmula de multiplicação” seguinte.

**Teorema 10.7** (fórmula de multiplicação). *Se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy \quad (10.14)$$

A prova é um exercício. Uma consequência é o *teorema de inversão de Fourier*, logo a fórmula que inverte a transformada, o resultado central da teoria da transformada de Fourier.

**Teorema 10.8** (teorema de inversão). *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $\widehat{f} = \mathcal{F}f$  é a sua transformada de Fourier, então*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (10.15)$$

*Demonstração.* O núcleo do calor  $G_\tau(x)$ , definido em (10.12), é a transformada de Fourier da gaussiana  $e^{-\pi\tau\xi^2}$ . Pela fórmula de multiplicação 10.14,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G_\tau(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\tau\xi^2} d\xi$$

Quando  $\tau \rightarrow 0$ , o primeiro integral tende para  $f(0)$  pelo teorema 10.6, e o segundo integral tende para  $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) d\xi$ . Isto prova a fórmula (10.15) no ponto  $x = 0$ . Para provar a fórmula de inversão para  $x$  arbitrário, basta considerar a função  $g(y) = f(x + y)$  e observar que

$$f(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

pelas (10.3). □

Portanto, a transformada de Fourier é uma bijeção linear  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$  do espaço de Schwartz, cuja inversa é a *transformada de Fourier inversa*  $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^*) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , definida pelo integral impróprio

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

**Produto interno  $L^2$  e teorema de Plancherel.** O *produto interno* e a *norma  $L^2$*  no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  são definidos por

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}$$

respetivamente.

Se  $f(x)$  é uma função de Schwartz, então o produto de convolução

$$C_f(x) := (f * \bar{f})(-x)$$

é chamado *auto-correlação* (do sinal  $f$ ). Como observado por Einstein em 1914, o seu valor na origem é  $C_f(0) = \|f\|_2^2$ , e a sua transformada de Fourier é, pelo teorema (10.8), igual ao quadrado do valor absoluto da transformada de Fourier de  $f$ ,

$$\widehat{C}_f(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2$$

chamado *espectro de potência* (do sinal  $f$ ). Mas o teorema de inversão 10.15 implica que

$$C_f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{C}_f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

ou seja,

**Teorema 10.9** (Plancherel). Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ , ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Assim, a transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$  é uma isometria, se os dois espaços de Schwartz estão munidos do produto interno  $L^2$ .

**Espaço das funções de quadrado integrável.** O espaço de Schwartz, munido de norma  $L^2$ , não é completo. Existem sucessões de Cauchy (na norma  $L^2$ ) que não são convergentes para funções de Schwartz. Admite um completamento abstracto, que consiste nas classes de equivalências das sucessões de Cauchy ( $f_n$ ), módulo a relação de equivalência  $(f_n) \sim (g_n)$  sse  $f_n - g_n \rightarrow 0$  na norma  $L^2$ . Este espaço, chamado  $L^2(\mathbb{R})$ , é um espaço euclidiano completo de dimensão infinita. Pode ser realizado como espaço de funções de quadrado integrável na reta real usando o integral de Lebesgue (que, infelizmente, não faz parte do curriculum atual).

O teorema de Plancherel implica portanto que a transformada de Fourier estende a uma transformação unitária  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^*)$ , cuja inversa é a própria adjunta, ou seja, tal que  $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ .

O teorema de inversão diz que todo sinal de quadrado integrável  $f(t)$  pode ser representado como sobreposição de harmónicas  $e^{2\pi i \xi t}$ . A transformada de Fourier é o “prisma” ideal que decompõe o sinal  $f(t)$  nas diferentes harmónicas. O peso de cada harmónica é  $\widehat{f}(\xi)$ , o “espectro” (em inglês, *spectrum*) do sinal.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \iff \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

Fisicamente, o quadrado  $|f(t)|^2$  do valor absoluto de um sinal (um campo eletromagnético, uma corrente, uma pressão, ...) é (proporcional a) uma “potência”, logo o seu integral no tempo  $E = \|f\|_2^2$  é uma “energia”. O teorema de Plancherel afirma então que a energia também é igual a  $E = \|\widehat{f}\|_2^2$ , ou seja, pode ser calculada integrando o quadrado  $|\widehat{f}(\xi)|^2$  do valor absoluto do espectro, chamado “espectro de potência” (em inglês, *power spectrum*).

Na notação dos engenheiros (10.2), que usa a frequência angular  $\omega = 2\pi\xi$ , a transformada de Fourier e a fórmula de inversão o assumem a forma

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{se} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

(e para ter fórmulas simétricas, ou seja, uma transformada unitária, temos que dividir a transformada por  $\sqrt{2\pi}$ ).

No contexto da mecânica quântica, uma função de onda é uma sobreposição de ondas planas

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(p) e^{ipq/\hbar} \frac{dp}{h} \quad \text{se} \quad \widehat{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q) e^{-ipq/\hbar} dq$$

onde  $h = 2\pi\hbar$  é a constante de Planck. Os físicos dizem que  $\psi(q)$  é a função de onda na “representação da posição”, e  $\widehat{\psi}(p)$  é a função de onda na “representação do momento”.

**ex:** Calcule a norma  $L^2$  da gaussiana  $e^{-x^2/2}$ .

**Princípio de indeterminação de Heisenberg-Weyl.** Acontece que uma função e a sua transformada de Fourier não podem ser, contemporaneamente, muito concentradas. Isto é evidente pela propriedade (10.5), cuja versão simétrica diz que se  $g(x) = f(\lambda x)$ , com  $\lambda > 0$ , então

$$\lambda \widehat{g}(\lambda \xi) = \widehat{f}(\xi/\lambda).$$

Se fixamos a norma  $\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ , e portanto também  $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = 1$  pelo teorema de Plancherel, podemos interpretar  $|\psi(x)|^2$  e  $|\widehat{\psi}(\xi)|^2$  como sendo umas densidades de

probabilidades. Este é o caso da função de onda  $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$  de uma partícula quântica na representação de Schrödinger, onde o integral  $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$  representa a probabilidade de observar a posição da partícula no intervalo  $[a, b]$ . O espaço dos estados é o espaço  $L^2(\mathbb{R})$ , munido do produto interno

$$\langle \phi|\psi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x)} \psi(x) dx$$

Os observáveis “posição” e “momento linear” são representados pelos operadores formalmente auto-adjuntos  $X$  e  $P = -iD$ , respetivamente (em unidades de Planck, em que  $\hbar = 1$ ). A observação do observável  $X$  ou  $P$  no estado  $|\psi\rangle$ , repetida um número grande de vezes, produz diferentes valores possíveis, com valor médio

$$\bar{x} := \langle \psi|X|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx.$$

ou

$$\bar{p} := \langle \psi|P|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

respetivamente.

Os observáveis  $X$  e  $P$  não comutam, pois  $[D, X] = I$ , logo  $[P, X] = -iI$ , e portanto não podem ser “diagonalizados” (para usar uma linguagem que apenas faz sentido em dimensão finita, ou seja, para matrizes) na mesma base.

Uma medida natural da “concentração” dos valores observados é a “variância”

$$\text{Var}(\psi) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx$$

Analogamente definimos a variância  $\text{Var}(\widehat{\psi})$  da transformada de Fourier, ou seja, do observável momento linear.

**Teorema 10.10** (princípio de indeterminação de Heisenberg-Weyl). *Se  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tem norma  $\|\psi\|_2 = 1$ , e  $\widehat{\psi}(\xi)$  é a sua transformada de Fourier, então*

$$\text{Var}(\psi) \cdot \text{Var}(\widehat{\psi}) \geq 1/4 \tag{10.16}$$

*Demonstração.* Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , consideramos os operadores de destruição e criação deformados  $Z_\lambda := \lambda X + D$  e  $Z_\lambda^* = \lambda X - D$ , respetivamente. Fixado  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , o polinómio quadrático

$$Q(\lambda) := \langle Z_\lambda^* Z_\lambda \psi, \psi \rangle = \lambda^2 \langle X\psi, X\psi \rangle - \lambda \langle \psi, \psi \rangle + \langle D\psi, D\psi \rangle$$

é não-negativo, pois é igual a  $\langle Z_\lambda \psi, Z_\lambda \psi \rangle = \|Z_\lambda \psi\|_2^2 \geq 0$ . Se  $\|\psi\| = 1$ , isto implica que

$$\langle X\psi, X\psi \rangle \cdot \langle D\psi, D\psi \rangle \geq 1/4.$$

O primeiro fator é  $\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx$ . Pelas (10.7) e pelo teorema de Plancherel 10.9, o segundo fator é  $\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$ . Portanto,

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 1/4.$$

A desigualdade (10.16) é obtida ao substituir  $\psi(x)$  por  $e^{-2\pi i x \bar{x}} \psi(x - \bar{x})$ .  $\square$

Por exemplo, se o suporte, ou seja, a “duração”, de um sinal  $f(t)$  é muito pequeno, então o seu espetro deve necessariamente conter um intervalo grande de frequências. Por outro lado, se um sinal é limitado em bandas, ou seja, se a sua transformada de Fourier tem suporte num intervalo  $|\xi| \leq f$ , onde  $f$  é uma frequência máxima, então o suporte do sinal deve necessariamente ter comprimento  $T \geq 1/2f$ , eventualmente infinito. Na verdade, um sinal limitado em banda não pode ter suporte compacto e, vice-versa, um sinal com suporte compacto não pode ser limitado

em banda. Isto acontece porque a transformada de Fourier (ou a sua inversa) de um sinal com suporte compacto é uma função inteira, e portanto os seus zeros são isolados ...

Em mecânica quântica, se  $\Delta X$  e  $\Delta P$  denotam as incertezas (ou seja, os desvios padrão) ao medir posição e momento linear de uma partícula, então

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{h}{4\pi}$$

onde  $h \simeq 6.626 \times 10^{-34}$  J·s é a constante de Planck.

**ex:** Mostre que valor médio minimiza o desvio quadrático  $a \mapsto \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |\psi(x)|^2 dx$ .

**ex:** Verifique que o mínimo na desigualdade (10.16) é atingido quando  $\psi(x)$  é uma gaussiana.

## 10.4 Aplicações da transformada de Fourier às EDPs

A transformada de Fourier, apenas numa das variáveis envolvidas, pode transformar uma equação diferencial parcial numa equação diferencial ordinária. Com sorte, as soluções são finalmente determinadas em forma de produto de convolução das condições iniciais com um “núcleo”, que caracteriza o problema físico.

4 jan 2021

**Difusão na reta e núcleo do calor.** Consideramos o problema de Dirichlet que consiste em resolver a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (10.17)$$

na reta real (ou seja, com  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$ ) com condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ . Se  $u(x, t)$  é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável  $x$ )

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t)$$

com condição inicial

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-2\pi i \xi x} dx = \widehat{f}(\xi)$$

A solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \widehat{f}(\xi)$$

A função  $e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$  é a transformada de Fourier do núcleo do calor (compare com (10.12))

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t},$$

definido por  $t > 0$ , e portanto  $\widehat{u}(x, t) = \widehat{H}_t(\xi) \widehat{f}(\xi)$ . Pelo teorema 10.8, um candidato para a solução é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (H_t * f)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy \end{aligned}$$

da condição inicial com o núcleo do calor.

**Teorema 10.11.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $u(x, t) = (H_t * f)(x)$  é uma solução de classe  $C^\infty$  da equação de calor (10.17) na região  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ , que converge uniformemente e na norma  $L^2$  para  $f(x)$ , i.e.*

$$\|u(\cdot, t) - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad e \quad \|u(\cdot, t) - f\|_2 \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow 0^+$ .

*Demonstração.* A função  $u(x, t)$  está no espaço de Schwartz para todo tempo  $t > 0$ , pois é um produto de convolução de duas funções do espaço de Schwartz, e resolve a equação de calor se  $t > 0$ , porque o próprio  $H_t(x)$  é uma solução da equação de calor.

De acordo com o teorema 10.5, o núcleo do calor  $H_t(x)$  é uma identidade aproximada quando  $t \rightarrow 0^+$ , logo, pelo teorema 10.6,  $(H_t * f)(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente em  $x$  quando  $t \rightarrow 0^+$ .

Pelo teorema de Plancherel 10.9, o quadrado da norma  $L^2$  da diferença entre  $u(x, t)$  e  $f(x)$  é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi, t) - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Este último integral tende para 0 quando  $t \rightarrow 0^+$ . De facto, seja  $\varepsilon > 0$ . Sendo  $|e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2$  limitado e  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , é possível arranjar  $R > 0$  tal que

$$\int_{|\xi| \geq R} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, sendo  $|\hat{f}(\xi)|^2$  limitado e sabendo que  $|e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$  uniformemente para  $-R \leq \xi \leq R$ , é possível arranjar um tempo  $T$  suficientemente pequeno tal que  $|\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 \leq \varepsilon/2R$  se  $t < T$ , assim que também o integral

$$\int_{|\xi| \leq R} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi \leq \varepsilon.$$

Isto prova a convergência na norma  $L^2$ . □

**ex:** Calcule a solução  $u(x, t) = (H_t * f)(x)$  quando a condição inicial é a função pulso  $\text{rect}(x)$  ou a Gaussiana  $H_1(x)$ .

**ex:** Mostre que se  $u(x, t)$  é uma solução da equação de calor (10.17) que está no espaço de Schwartz para todos os tempos  $t > 0$ , então a “energia”

$$\mathcal{E}(t) := \|u(\cdot, t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx$$

é não-crescente, i.e. satisfaz  $d\mathcal{E}/dt \leq 0$ .

**ex:** Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal das equações de calor com convecção ou com dissipação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pm \alpha u$$

(dependendo do sinal do segundo membro) com condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  no espaço de Schwartz.

**Equação de ondas na reta e fórmula de D’Alembert.** A transformada de Fourier também pode ser utilizada para determinar a solução formal da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{10.18}$$

na reta real com condições iniciais

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \tag{10.19}$$

por exemplo no espaço de Schwartz. Se  $u(x, t)$  é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável  $x$ )

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial do oscilador harmónico

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) = -(2\pi \xi c)^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

A solução é uma combinação linear

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi c t} + \widehat{g}(\xi) e^{-2\pi i \xi c t}$$

onde  $\widehat{f}(\xi)$  e  $\widehat{g}(\xi)$  são constantes arbitrárias, parametrizadas pelo vetor de onda  $\xi$ . Se estas funções estão no espaço de Schwarz, então são transformadas de Fourier de certas funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , também no espaço de Schwartz. Mas a transformada de Fourier inversa de uma modulação é uma translação. O resultado é que a solução é uma sobreposição

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

de duas ondas viajantes, com velocidades  $\pm c$ . A posteriori, é possível observar que esta forma da solução, chamada “solução de D’Alembert”, resolve a equação de ondas (10.18) desde que  $f$  e  $g$  sejam funções apenas duas vezes diferenciáveis. As condições iniciais (10.19) determinam os perfis das ondas viajantes como soluções do sistema

$$\begin{cases} f(x) + g(x) &= \varphi(x) \\ cf'(x) - cg'(x) &= \psi(x). \end{cases}$$

Integrando a segunda equação e resolvendo o sistema linear, o resultado é a *fórmula de D’Alembert*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy$$

que representa a solução  $u(x, t)$  como soma da média aritmética do deslocamento inicial nos pontos  $x \pm ct$  e do integral da velocidade inicial no intervalo  $[x - ct, x + ct]$ .

**ex:** Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da *equação do telégrafo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

onde  $c^2 = 1/LC$ ,  $\alpha = G/C$  e  $\beta = R/L$  ( $R$  é a resistência distribuída,  $L$  é a indutância distribuída,  $C$  é a capacitância entre os condutores, e  $G$  é a condutância do material que separa os condutores).

**Fórmula integral de Poisson no semi-plano.** Consideramos o problema de determinar uma extensão harmónica e limitada  $u(x, y)$  no semi-plano superior  $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$  de uma função  $f(x)$  definida na fronteira  $\partial\mathbb{H} \approx \mathbb{R}$ . Se  $u(x, y)$  é suficientemente regular, e satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em  $\mathbb{H}$ , então a sua transformada de Fourier (apenas na variável  $x$ ),

$$\widehat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{u}(\xi, y) - 4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, y) = 0$$

com condição inicial

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \widehat{f}(\xi).$$

A solução limitada em  $y > 0$  é

$$\widehat{u}(\xi, y) = e^{-2\pi|\xi|y} \widehat{f}(\xi).$$

A função  $e^{-2\pi|\xi|y}$  é a transformada de Fourier do *núcleo de Poisson* em  $\mathbb{H}$ , definido por

$$P_y(x) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (10.20)$$

Então  $\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{P}_y(\xi) \widehat{f}(\xi)$ . Portanto, um candidato para a extensão harmónica e limitada de  $f(x)$  no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (P_y * f)(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt \end{aligned}$$

de  $f$  com o núcleo de Poisson. O núcleo de Poisson não está no espaço de Schwartz. No entanto,

**Teorema 10.12.** *O núcleo de Poisson  $P_y(x)$  é uma identidade aproximada quando  $y \rightarrow 0^+$ .*

*Demonstração.* Os  $P_y(x)$  são estritamente positivos, e é imediato verificar que os seus integrais impróprios são  $\int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) dx = 1$  para todo  $y > 0$ . Por outro lado, dado  $\delta > 0$ , a mudança de variável  $t = x/y$  mostra que

$$\frac{1}{\pi} \int_{|x|>\delta} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\delta/y} \frac{1}{t^2 + 1} dt \rightarrow 0$$

quando  $y \rightarrow 0^+$ , pela convergência do integral impróprio de  $P_1(x)$ . □

Consequentemente,

**Teorema 10.13.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $u(x, y) = (P_y * f)(x)$  é uma função harmónica e limitada no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , que converge uniformemente para  $f(x)$ , i.e.*

$$\|u(\cdot, y) - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

quando  $y \rightarrow 0^+$ .

**ex:** Verifique que o núcleo de Poisson  $P_y(x)$  é uma função harmónica no semi-plano superior.

**ex:** Prove o teorema 10.13.

**ex:** Verifique que  $u(x, y) = y$  e  $v(x, y) = 0$  são funções harmónicas em  $\mathbb{H}$  que assumem os mesmos valores (triviais) na fronteira  $\partial\mathbb{H} \approx \mathbb{R}$ . Isto mostra que o problema de Dirichlet na região ilimitada  $\mathbb{H}$ , sem mais condições, não admite soluções únicas.

**Oscilador harmônico quântico e funções de Hermite.** A equação de Schrödinger para a função de onda  $\psi(x, t)$  de uma partícula de massa  $m = 1$  num potencial  $V(x) = x^2/2$  (oscilador harmônico), em unidades tais que a constante de Planck reduzida é  $\hbar = 1$ , é

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 \psi.$$

As soluções separáveis são  $\psi_n(x, t) = e^{-iE_n t} f_n(x)$ , onde as  $f_n(x)$  são funções próprias do operador de Hermite  $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , definido por

$$2H := -D^2 - X^2,$$

com valores próprios  $E_n$  (umas energias), i.e.  $Hf_n = E_n f_n$ . Os operadores de *destruição* (*annihilation/lowering operator*) e de *criação* (*creation/raising operator*) são os operadores

$$Z := X + D \quad \text{e} \quad Z^* := X - D,$$

respetivamente, definidos, por exemplo, no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . É imediato verificar que  $[D, X] = I$  (o operador identidade), e que  $2H = Z^*Z + I$ . O operador de criação é o “adjunto” do operador de destruição, no sentido em que se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  então

$$\langle Zf, g \rangle_2 = \langle f, Z^*g \rangle_2$$

Isto implica que  $\langle Z^*Zf, f \rangle_2 = \|Zf\|_2^2 \geq 0$  para todo  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , ou seja, que  $2H \geq I$ . O produto  $N := Z^*Z$  é chamado operador *número*. É um operador auto-adjunto e satisfaz a relação de comutação  $[N, Z^*] = 2Z^*$ . Se  $f$  é um vetor próprio de  $N$  com valor próprio  $\lambda$ , então  $Z^*f$  é um vetor próprio de  $N$  com valor próprio  $\lambda + 2$ . De fato, se  $Nf = \lambda f$ ,

$$N(Z^*f) = (Z^*N + [N, Z^*])f = (Z^*N + Z^*)f = Z^*(N + 2I)f = (\lambda + 2)Z^*f$$

A Gaussiana  $g(x) = e^{-x^2/2}$  gera o núcleo do operador de destruição, ou seja, é a única função integrável e não trivial que satisfaz a equação diferencial  $Zg = 0$ . Portanto  $\phi_0 := g/\|g\|_2$  é um vetor próprio unitário do operador  $N$  com valor próprio 0. Então as *funções de Hermite*, obtidas aplicando iterativamente o operador de criação e normalizando, logo definidas por

$$\phi_n := \frac{1}{\|(Z^*)^n \phi_0\|_2} (Z^*)^n \phi_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

formam uma família ortonormada de vetores próprios do operador número  $N$ , tais que  $N\phi_n = 2n\phi_n$ . Mas  $2H = N + I$ , portanto os  $\phi_n$  também diagonalizam o operador de Hermite, ou seja,  $H\phi_n = E_n\phi_n$ , e os valores próprios são

$$E_n = n + \frac{1}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estes são os níveis de energia do oscilador harmônico quântico em dimensão um.

## 10.5 Fórmula do somatório de Poisson

O teorema do somatório de Poisson é um dos resultados profundos da matemática, e tem aplicações interessantes também a problemas de engenharia.

**Fórmula do somatório de Poisson** Dada uma função  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , é possível considerar a sua  $\mathbb{Z}$ -periodização

$$f_{\mathbb{Z}}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n)$$

É claro que  $f_{\mathbb{Z}}(x)$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , periódica de período 1, ou seja, uma função na circunferência  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Como tal admite uma expansão em série de Fourier convergente

$$f_{\mathbb{Z}}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f_{\mathbb{Z}}}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Os coeficientes de Fourier de  $f_{\mathbb{Z}}$  podem ser calculados utilizando o “unfolding trick”, que consiste em recuperar a reta real enquanto reunião dos intervalos de comprimento unitário  $[n, n + 1]$ , e utilizar a periodicidade da função. Assim,

$$\begin{aligned}\widehat{f_{\mathbb{Z}}}(n) &= \int_0^1 e^{-2\pi inx} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + m) \right) dx \\ &= \dots + \int_0^1 e^{-2\pi inx} f(x) dx + \int_1^2 e^{-2\pi inx} f(x) dx + \int_2^3 e^{-2\pi inx} f(x) dx + \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx} f(x) dx.\end{aligned}$$

O resultado é que o espectro de Fourier da periodização é igual ao espectro de Fourier da função original calculado apenas nas frequências inteiras, ou seja,

$$\boxed{\widehat{f_{\mathbb{Z}}}(n) = (\mathcal{F}f)(n)}$$

Ao calcular os valores de  $f_{\mathbb{Z}}(x)$ , deduzimos portanto, pelo teorema de inversão 10.15, a famosa

**Teorema 10.14** (fórmula do somatório de Poisson). *Se  $f$  é uma função de Schwartz e  $f_{\mathbb{Z}}$  é a sua periodização com período um, então*

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n) e^{2\pi inx}}$$

Em particular, quando  $x = 0$ , a fórmula de Poisson assume a forma simétrica

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n)$$

Se definimos o *trem de impulsos*  $\delta_{\mathbb{Z}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n)$ , a soma de deltas e Dirac nos inteiros, então a fórmula do somatório de Poisson diz que formalmente  $\mathcal{F}\delta_{\mathbb{Z}} = \delta_{\mathbb{Z}}$ , ou seja, o trem de impulsos é auto-dual, é igual a própria transformada de Fourier.

**ex:** Para cada  $\lambda > 0$ , considere o subgrupo discreto  $\lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , e prove a seguinte versão “simétrica” da fórmula de Poisson:

$$\sqrt{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\lambda) = \sqrt{1/\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n/\lambda).$$

**ex:** Considere uma função  $f(t)$  definida (e suficientemente regular) na circunferência  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , e a sua série de Fourier  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi int}$ . Dado um inteiro  $N > 0$ , considere o subgrupo finito gerado por  $1/N$  e calcule as somas exponenciais  $\sum_{k=1}^N e^{2\pi in(k/N)}$ . Deduza o seguinte caso elementar da fórmula do somatório de Poisson:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N f(k/N) = \sqrt{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(kN)$$

**Amostragem e aliasing.** Um sinal digital pode ser obtido de um sinal analógico  $x(t)$  usando um ADC (*Analog-to-Digital Converter*). Um ADC ideal faz essencialmente duas operações: *amostragem* (em inglês, *sampling*) e *quantização*. Fixado um *período de amostragem*  $\tau > 0$ , logo uma *frequência de amostragem*  $\nu_s = 1/\tau$ , a amostragem consiste em observar o sinal apenas em múltiplos inteiros de  $\tau$ , logo definir a sucessão

$$x[n] := x(n\tau) \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}.$$

O parâmetro inteiro  $n$  é chamado *número de amostragem*. Assim, uma frequência de  $\xi$  “amostras per segundo” corresponde a uma frequência real de  $\xi \cdot \nu_s$  Hz. A amplitude do sinal é depois “quantizada”, ou seja, aproximado dentro da precisão da máquina/computador. Se a máquina utiliza uma representação com  $b$ -bit, então o sinal é traduzido num número entre  $-2^{b-1}$  e  $2^{b-1} - 1$ . Se fazemos 1 o sinal máximo  $2^{b-1}$ , isto significa uma “precisão” de uma parte em cada  $q = 2^{1-b}$ . Por exemplo, uma representação com 16-bit permite chegar a uma precisão  $q \simeq 3.0518 \times 10^{-5}$ .

Como  $e^{2\pi i(\xi + \nu_s)n\tau} = e^{2\pi i\xi n\tau}$ , a amostragem não permite discriminar as harmônicas que diferem por múltiplos inteiros da frequência de amostragem. Isto pode causar, em geral, uma perda de informação. Para simplificar os cálculos, assumimos inicialmente que  $\tau = 1$  (ou seja, medimos o tempo usando  $\tau$  como unidade). Se o sinal analógico é uma sobreposição

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}x)(\xi) e^{2\pi i\xi t} d\xi$$

com espectro de Fourier

$$(\mathcal{F}x)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i\xi t} dt$$

então o resultado da amostragem é

$$\begin{aligned} x[n] &= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}x)(\xi) e^{2\pi i\xi n} d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k-1/2}^{k+1/2} (\mathcal{F}x)(\xi) e^{2\pi i\xi n} d\xi \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}x)(\xi + k) \right) e^{2\pi i\xi n} d\xi \end{aligned}$$

Portanto, se chamamos

$$X(e^{2\pi i\xi}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}x)(\xi + n)$$

então o sinal digital é a transformada de Fourier (ou seja, o conjunto dos coeficientes de Fourier) da periodização da transformada de Fourier do sinal analógico, no sentido em que

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2\pi i\xi}) e^{2\pi i\xi n} d\xi \quad \text{e portanto} \quad X(e^{2\pi i\xi}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-2\pi i n \xi}$$

Uma interpretação mais conceitual é a seguinte. A amostragem pode ser interpretada como a multiplicação do sinal analógico por um trem de impulsos  $\delta_{\mathbb{Z}}(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n)$ . A transformada de Fourier deste produto é o produto de convolução entre os fatores. Mas, de acordo com a fórmula do somatório de Poisson, a transformada de Fourier do trem de impulsos é ainda um trem de impulsos.

De volta ao período de amostragem arbitrário  $\tau$ , logo uma frequência de amostragem  $\nu_s = 1/\tau$ , o resultado é que os  $x[n]$  são os coeficientes de Fourier de

$$\boxed{X(e^{2\pi i\xi}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}x)(\xi + n\nu_s)} \quad (10.21)$$

Portanto, o espectro de Fourier do sinal digital é uma sobreposição de cópias do espectro do sinal analógico, deslocadas por múltiplos inteiros da frequência de amostragem. Este fenómeno é chamado *aliasing*.

**Reconstrução de um sinal analógico.** Em particular, se o sinal analógico é limitado em banda, com frequência limitada por  $\max|\xi| < \nu_s/2$  (chamada *frequência de Nyquist*), então a soma do segundo membro da (10.21) é reduzida a um único termo para cada frequência  $\xi$ , e portanto o espectro do sinal digital contém uma cópia exata do espectro do sinal analógico.

Um sinal analógico  $x(t)$  limitado em banda, que satisfaz a “condição de Nyquist-Shannon”  $\max|\xi| < \nu_s/2$ , pode ser completamente reconstruído a partir da sua amostragem  $x[n]$ . Mais

uma vez, assumimos inicialmente que  $\tau = 1$ , e portanto que o suporte do espectro  $(\mathcal{F}x)(\xi)$  é estritamente contido no intervalo  $[-1/2, 1/2]$ . Como neste intervalo  $(\mathcal{F}x)(\xi)$  e  $X(e^{2\pi i\xi})$  coincidem, podemos calcular

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}x)(\xi) e^{2\pi i\xi t} d\xi \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-2\pi i\xi n} \right) e^{2\pi i\xi t} d\xi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i\xi(t-n)} d\xi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} \end{aligned}$$

Voltando ao caso de um período de amostragem arbitrário  $\tau$ , obtemos a *fórmula de reconstrução de Nyquist-Shannon*

$$\boxed{x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot \text{sinc}(t/\tau - n)} \quad (10.22)$$

que mostra que o sinal analógico é um produto de convolução discreto do sinal digital com a função de Shannon  $\text{sinc}(t) := \sin(\pi t)/\pi t$ . Este é o conteúdo do *teorema de amostragem de Nyquist-Shannon*<sup>20 21</sup>.

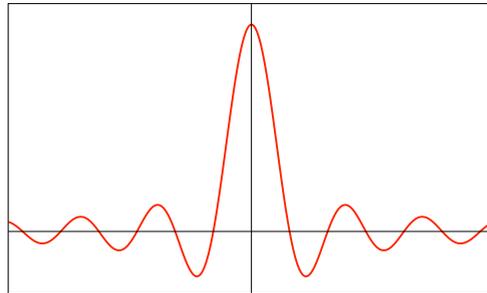


Gráfico da função de Shannon  $\text{sinc}(t)$

<sup>20</sup>H. Nyquist, Certain factors affecting telegraph speed, *Bell System Technical Journal* **3** (1924), 324-346.

H. Nyquist, Certain topics in telegraph transmission theory, *Trans. AIEE* **479** (1928), 617-644.

<sup>21</sup>C.E. Shannon, Communication in the Presence of Noise, *Proc. of the IRE* **37** (1949), 10-21.

## Transformadas de Fourier (unitária, frequência)

	(espaço do tempo $t$ )	(espaço da frequência $\xi$ )
	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi t} \widehat{f}(\xi) d\xi$	$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt$
(linearidade ( $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ))	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda \widehat{f}(\xi) + \mu \widehat{g}(\xi)$
(conjugação)	$\overline{f(t)}$	$\overline{\widehat{f}(-\xi)}$
(homotetia ( $\lambda \neq 0$ ))	$f(t/\lambda)$	$\lambda \widehat{f}(\lambda \xi)$
(translação/modulação)	$f(t - a)$	$e^{-2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi)$
(modulação/translação)	$e^{2\pi i b t} f(t)$	$\widehat{f}(\xi - b)$
(derivação/multiplicação)	$\frac{\partial}{\partial t} f(t)$	$2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$
(multiplicação/derivação)	$-2\pi i t f(t)$	$\frac{\partial}{\partial \xi} \widehat{f}(\xi)$
(convolução/produto)	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$	$\widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$
(produto/convolução)	$f(t) g(t)$	$(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta$
(energia)	$E = \ f\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt$	$E = \ \widehat{f}\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty}  \widehat{f}(\xi) ^2 d\xi$
(pulso/sinc)	$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se }  t  < 1/2 \\ 0 & \text{se }  t  \geq 1/2 \end{cases}$	$\text{sinc}(\xi) := \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi}$
(sinc/pulso)	$\text{sinc}(t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	$\text{rect}(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{se }  \xi  < 1/2 \\ 0 & \text{se }  \xi  \geq 1/2 \end{cases}$
(Gaussiana)	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi \xi^2}$
(secante hiperbólica)	$\text{sech}(\pi t) := \frac{1}{\cosh(\pi t)}$	$\text{sech}(\pi \xi)$
(exponencial em $t$ , $a > 0$ )	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{4\pi^2 \xi^2 + a^2}$

## Transformadas de Fourier (não-unitária, frequência angular)

	(espaço do tempo $t$ )	(espaço da frequência angular $\omega = 2\pi\xi$ )
	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$
(linearidade ( $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ))	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(\omega) + \mu G(\omega)$
(conjugação)	$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-\omega)}$
(homotetia ( $\lambda \neq 0$ ))	$f(t/\lambda)$	$\lambda F(\lambda\omega)$
(translação/modulação)	$f(t - a)$	$e^{-ia\omega} F(\omega)$
(modulação/translação)	$e^{ibt} f(t)$	$F(\omega - b)$
(derivação/multiplicação)	$\frac{\partial}{\partial t} f(t)$	$i\omega F(\omega)$
(multiplicação/derivação)	$-it f(t)$	$\frac{\partial}{\partial \omega} F(\omega)$
(convolução/produto)	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$	$F(\omega) G(\omega)$
(produto/convolução)	$f(t) g(t)$	$\frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \nu) G(\nu) \frac{d\nu}{2\pi}$
(energia)	$E = \ f\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt$	$E = \ F\ ^2/2\pi = \int_{-\infty}^{\infty}  F(\omega) ^2 \frac{d\omega}{2\pi}$
(pulso/sinc)	$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se }  t  < 1/2 \\ 0 & \text{se }  t  \geq 1/2 \end{cases}$	$\text{sinc}(\omega/2\pi) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$
(sinc/pulso)	$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	$\text{rect}(\omega/2\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se }  \omega  < \pi \\ 0 & \text{se }  \omega  \geq \pi \end{cases}$
(Gaussiana)	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\omega^2/4\pi}$
(secante hiperbólica)	$\text{sech}(\pi t) := \frac{1}{\cosh(\pi t)}$	$\text{sech}(\omega/2)$
(exponencial em $t$ , $a > 0$ )	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
(exponencial em $\omega$ , $b > 0$ )	$\frac{b/\pi}{t^2 + b^2}$	$e^{-b \omega }$

## 11 Funções harmônicas no plano

### 11.1 Funções harmônicas no plano e funções holomorfas

As funções harmônicas no plano são localmente partes reais de funções holomorfas, e vice-versa.

**Funções harmônicas no plano.** Uma função  $u(x, y)$ , real ou complexa, definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  do plano euclidiano, é dita *harmônica* se é de classe  $\mathcal{C}^2$  e satisfaz a *equação de Laplace*

11 jan 2021

$$\Delta u = 0 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

nos pontos de  $\Omega$ . Na identificação  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  definida por  $(x, y) \approx x + iy$ , o laplaciano é o operador

$$\Delta = 4\partial\bar{\partial}.$$

Portanto, funções holomorfas ou anti-holomorfas, que estão no núcleo de  $\bar{\partial}$  ou  $\partial$ , respetivamente, são harmônicas. Por exemplo, são harmônicas as funções  $z^n$ ,  $\bar{z}^n$ ,  $e^z$ ,  $\sin(\bar{z})$ , ...

Em particular, se  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função holomorfa num domínio  $\Omega \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ , então  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são funções harmônicas reais, ditas funções *harmônicas conjugadas*. As curvas de nível de  $u$  e  $v$  formam duas famílias de curvas ortogonais, pois as condições de Cauchy-Riemann (2.3) também implicam que  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ . Por exemplo, se  $u(x, y) = c$  são as curvas “equipotenciais”, então  $v(x, y) = c$  são as “linhas de força”.

Vice-versa, seja  $u(x, y)$  uma função harmônica real numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Um cálculo mostra que

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

é uma função holomorfa (se  $u$  é a parte real de  $f = u + iv$ , que ainda não sabemos existir!, então  $g = f'$ ). A forma diferencial  $g(z) dz = g(z) (dx + idy)$  pode então ser representada como soma

$$\begin{aligned} g(z) dz &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \\ &= du + i^* du, \end{aligned}$$

do diferencial  $du$  mais  $i$  vezes a forma  $^* du$ , onde o *operador “estrela” de Hodge* é definido por  $^* dx = dy$  e  $^* dy = -dx$ , e estendido por linearidade. A forma  $du$  é exata, e  $\Delta u = 0$  implica que a forma  $^* du = -(\partial u / \partial y) dx + (\partial u / \partial x) dy$  é fechada. Se a região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  é simplesmente conexa (por exemplo, um disco), então

$$\oint_{\gamma} ^* du = \oint_{\gamma} g(z) dz - \oint_{\gamma} du = 0$$

para todo contorno fechado  $\gamma \subset \Omega$ , sendo igual ao integral de uma função holomorfa menos o integral de um diferencial exato. Fisicamente, este integral é o integral  $\oint_{\gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n}$  da derivada normal  $\nabla u \cdot \mathbf{n}$  de  $u$ , onde o vetor normal à curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  é  $\mathbf{n} = (\dot{y}, -\dot{x})$ . Então é possível definir uma função harmônica  $v$ , conjugada de  $u$  e definida a menos de uma constante aditiva, por meio do integral de linha

$$v(x, y) = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

onde  $\gamma$  é um contorno arbitrário entre um ponto fixado  $p = x_0 + iy_0 \in \Omega$  e o ponto variável  $z = x + iy$ . A função  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  é holomorfa em  $\Omega$ , e a sua derivada é  $f' = g$ .

**Teorema 11.1.** *Uma função harmônica real  $u(x, y)$  é localmente (em cada região simplesmente conexa) a parte real de uma função holomorfa  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , definida a menos de uma constante aditiva imaginária ic.*

Uma primeira consequência surpreendente é que uma função harmônica é infinitamente diferenciável (e isto acontece também em dimensão superior). Outra consequência útil é que

**Teorema 11.2.** *Se  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica e  $g : \Omega' \rightarrow \Omega$  é uma função holomorfa, então a composição  $u \circ g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica.*

*Demonstração.*  $u$  é localmente a parte real de uma função holomorfa  $f = u + iv$ . A composição  $u \circ g$  é localmente a parte real de  $f \circ g$ , que é uma função holomorfa.  $\square$

**ex:** Verifique que  $\Delta = 4\bar{\partial}\partial = 4\partial\bar{\partial}$ .

**ex:** Verifique que, se  $f = u + iv$  é holomorfa, então  $\nabla u$  e  $\nabla v$  são ortogonais.

**ex:** Verifique que  $z^n$  e  $\bar{z}^n$  são funções harmônicas (complexas).

**ex:** Esboce as curvas de nível das funções harmônicas conjugadas definidas pelas partes real e imaginária das seguintes funções holomorfas

$$f(z) = z^2 \quad f(z) = z^3 \quad f(z) = 1/z \quad f(z) = z + 1/z$$

**ex:** Determine, em domínios apropriados, umas funções harmônicas conjugadas de

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad u(x, y) = x - xy \quad u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Laplaciano em coordenadas polares.** A equação de Laplace em coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , definidas por  $\rho e^{i\theta} = x + iy$ , é

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (11.1)$$

Em particular, as funções harmônicas que apenas dependem de  $\rho$  são

$$a \log(\rho) + b$$

Por exemplo, em unidades convenientes, o potencial elétrico gerado por uma carga unitária colocada na origem do plano é a função  $V(z) = -\log|z|$ , harmônica no plano perfurado  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Em uma região simplesmente conexa  $\Omega$  que não contém a origem é possível definir um logaritmo  $\log(z) = \log \rho + i\theta$ , e em particular um argumento  $\theta(z)$ . Então

$$a \theta(z) + b$$

é uma função harmônica em  $\Omega$ , que não depende de  $|z|$  (ou seja, constante nas semi-retas que saem da origem). Por exemplo, o argumento principal  $\theta(z)$  é uma função harmônica no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , com limites  $\theta(x + i0^+) = 0$  se  $x > 0$  e  $\theta(x + i0^+) = \pi$  se  $x < 0$ .

**ex:** Verifique a expressão (11.1) para o Laplaciano em coordenadas polares.

**ex:** Verifique que as funções harmônicas separáveis (em coordenadas polares)  $u(\rho e^{i\theta}) = R(\rho) \Theta(\theta)$  e limitadas numa vizinhança da origem são  $\rho^{|n|} e^{in\theta}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , ou seja, as potências  $z^n$  e  $\bar{z}^n$  com expoente  $n = 0, 1, 2, \dots$

**ex:** Determine uma função harmônica  $u(z)$  no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  tal que  $u(x + iy) \rightarrow 1$  quando  $y \rightarrow 0$  e  $x > 0$  e tal que  $u(x + iy) \rightarrow -1$  quando  $y \rightarrow 0$  e  $x < 0$ .

**Campos planares e potenciais complexos.** Seja  $\mathbf{V}(x, y)$  um campo vetorial estacionário (i.e. independente do tempo) definido numa região do plano. Sejam  $A$  e  $B$  as suas coordenadas, assim que  $\mathbf{V} = (A, B)$ , ou, na identificação  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{V} = A + iB$ . Exemplos típicos são: o campo de velocidades de um fluido estacionário, um campo de forças, como um campo elétrico ou um campo magnético, um campo térmico, ...

A *circulação* do campo  $\mathbf{V}$  ao longo do contorno fechado simples  $\gamma$  é o integral  $C := \oint_{\gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ . Se  $\gamma$  é a fronteira da região  $\Omega$ , então o teorema de Green diz que

$$C = \oint_{\gamma} A dx + B dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \quad (11.2)$$

ou seja, a circulação é o integral do *rotacional*  $\nabla \times \mathbf{V} := \partial B / \partial x - \partial A / \partial y$  na região  $\Omega$ .

O campo é dito *irrotacional*, ou *potencial*, se  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ . Então a forma  $A dx + B dy$  é localmente o diferencial de uma função  $u(x, y)$ , ou seja,

$$du = A dx + B dy.$$

A função  $u$  é chamada *potencial* do campo, pois  $\mathbf{V} = \nabla u$  (mas os físicos preferem o sinal negativo), e as suas curvas de nível *curvas equipotenciais*.

O *fluxo* de  $\mathbf{V}$  através da curva  $\gamma$  é o integral  $F := \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à curva. Se  $\gamma$  é um contorno fechado simples, fronteira da região  $\Omega$ , então o teorema da divergência de Gauss diz que

$$F = \oint_{\gamma} -B dx + A dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy \quad (11.3)$$

ou seja, o fluxo é o integral da *divergência*  $\nabla \cdot \mathbf{V} := \partial A / \partial x + \partial B / \partial y$  na região  $\Omega$ .

O campo é dito *solenoidal* (ou *incompressível*, se representa o campo de velocidade de um fluido) se  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ . Então a forma  $-B dx + A dy$  é localmente o diferencial de uma função  $v(x, y)$ , ou seja,

$$dv = -B dx + A dy.$$

A função  $v$  é chamada *função de corrente*, e as suas curvas de nível são chamadas *linhas de corrente* (em inglês, *streamlines*).

Se o campo vetorial  $\mathbf{V}$  é irrotacional e solenoidal (como, por exemplo o campo de velocidades de um “fluido ideal”), então  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, como é possível ver comparando as expressões dos diferenciais  $du$  e  $dv$ . Portanto,

**Teorema 11.3.** *Se um campo planar é irrotacional e solenoidal, então o potencial  $u(x, y)$  e a função de corrente  $v(x, y)$  são funções harmônicas conjugadas.*

Então um campo irrotacional e solenoidal pode ser descrito, localmente (ou seja, numa região simplesmente conexa), por meio de uma função holomorfa

$$f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$$

chamada *potencial complexo*. Em particular, as linhas de corrente  $v = c$  e as linhas equipotenciais  $u = c$  são ortogonais. A derivada do potencial complexo é  $f' = A - iB$ . Portanto, o campo é

$$\mathbf{V} = (A, B) \approx A + iB = \overline{f'}.$$

Em geral, uma função holomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  define um campo irrotacional e solenoidal  $\mathbf{V} = \overline{f'}$  na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . O fluxo  $F$  e a circulação  $C$ , através e ao longo de um contorno  $\gamma$ , são parte real e parte imaginária de um único integral de contorno:

$$F + iC = \oint_{\gamma} f'(z) dz.$$

Estes números não são nulos se a região  $\Omega$  onde está definido o campo não for simplesmente conexa, por exemplo se o potencial complexo tiver pólos no interior da curva  $\gamma$ .

**ex:** Para cada potencial complexo  $f(z)$ , definido em um domínio conveniente, calcule o campo  $\mathbf{V}$ , e esboce algumas linhas de corrente  $v(x, y) = c$  e alguma curvas equipotenciais  $u(x, y) = c$ .

$$f(z) = z \quad f(z) = (1 + i)z \quad f(z) = z^2 \quad f(z) = z + 1/z$$

**ex:** Repita o exercício anterior (pode ser útil usar coordenadas polares, ou usar uma calculadora gráfica), e calcule também a circulação e o fluxo ao longo de contornos à volta das singularidades do campo, com os seguintes potenciais complexos.

$$f(z) = \log(z) \quad f(z) = i \log(z) \quad f(z) = (a + ib) \log(z) \quad f(z) = \log(z + 1) \pm \log(z - 1)$$

## 11.2 Princípio do valor médio e do máximo

Os valores de uma função harmônica em pontos diferentes do domínio não podem ser arbitrários, existem restrições que relacionam o comportamento local e global das funções harmônicas.

**Princípio do valor médio.** O valor de uma função harmônica num ponto do seu domínio é igual à média aritmética dos seus valores numa circunferência suficientemente pequena à volta deste ponto.

**Teorema 11.4** (princípio do valor médio). *Se  $u(z)$  é harmônica numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , então o seu valor em cada ponto  $p \in \Omega$  é a média dos seus valores numa circunferência de raio  $r > 0$  suficientemente pequeno (tal que o disco fechado de raio  $r$  e centro  $p$  esteja contido em  $\Omega$ ) à volta de  $p$ , ou seja*

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta}) d\theta. \quad (11.4)$$

*Demonstração.* Pelo teorema 11.1,  $u$  é a parte real de uma função holomorfa  $f = u + iv$  num disco  $D_\rho(p)$  com  $r < \rho$ . Então pela fórmula de Cauchy

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=r} \frac{f(z)}{z-p} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{i\theta}) d\theta.$$

A parte real é a fórmula (11.4). □

Em dimensão arbitrária, a fórmula do valor médio é consequência do teorema da divergência.

**Princípio do máximo.** Uma consequência importante do princípio do valor médio é o

**Teorema 11.5** (princípio do máximo). *Uma função harmônica e não constante não pode atingir máximo e mínimo na região (aberta)  $\Omega \subset \mathbb{C}$  onde está definida.*

*Demonstração.* Se  $p \in \Omega$  um máximo de  $u(z)$ , então  $u(z) \leq u(p)$ . Se  $r$  é suficientemente pequeno,  $u(p)$  é igual ao valor médio dos  $u(p + re^{i\theta})$  na circunferência. Mas um valor médio de uma função contínua só pode ser igual ao valor máximo quando a função é constante. Consequentemente,  $u(z) = u(p)$  para todo  $z$  numa vizinhança de  $p$ . Mas  $u(z)$  é a parte real de uma função holomorfa, que é portanto constante na região (conexa)  $\Omega$ . □

Consequentemente, o máximo e o mínimo de uma função harmônica num domínio fechado  $K \subset \mathbb{C}$  são atingidos na fronteira  $\partial K$ .

Outra consequência é que as únicas funções harmônicas e limitadas no plano complexo são as constantes (versão do teorema de Liouville para funções harmônicas).

**Unicidade da solução do problema de Dirichlet.** Uma consequência do princípio do máximo é que uma função harmônica num domínio fechado e limitado  $K$  é determinada apenas pelos seus valores na fronteira  $\partial K$ . De fato, a diferença  $u = u_1 - u_2$  entre duas funções harmônicas,  $u_1$  e  $u_2$ , que coincidem em  $\partial K$  é uma função harmônica igual a zero em  $\partial K$ , logo identicamente nula pelo princípio do máximo.

**Teorema 11.6** (unicidade). *O problema de Dirichlet numa região limitada tem, no máximo, uma solução.*

Numa região ilimitada não há unicidade. Por exemplo, as funções  $u(x, y) = 0$  e  $v(x, y) = y$  são harmônicas no semi-plano superior  $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ , e têm o mesmo valor, zero, na fronteira  $\mathbb{R}$ . No entanto, a unicidade pode ser obtida acrescentando condições de decaimento quando  $|z| \rightarrow \infty$  (que fisicamente correspondem a declarar finito o trabalho feito para afastar uma partícula de prova até ao infinito).

O problema de Dirichlet pode também não ter soluções. Por exemplo (Zaremba, 1911), não existe nenhuma função harmônica  $u(z)$  no disco perfurado  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  (que não é simplesmente conexo) que seja contínua na aderência  $\bar{\mathbb{D}}$  e assuma valores  $u(e^{i\theta}) = 0$  na circunferência unitária e  $u(0) = 1$  na origem. De fato, uma tal função, sendo limitada, pode ser estendida a uma função harmônica no disco. Mas, pelo princípio do máximo, apenas a função nula é harmônica no disco, contínua na aderência, e tem valores nulos na circunferência unitária.

### 11.3 Fórmula de Poisson

O problema de Dirichlet no disco unitário (ou qualquer outro disco) do plano complexo admite uma solução em forma de convolução.

**Fórmula de Poisson.** A fórmula do valor médio (11.4) diz que se  $u(\zeta)$  é harmônica numa vizinhança do disco unitário  $\bar{\mathbb{D}}$ , então o seu valor no centro 0 é determinado pelos seus valores na circunferência unitária  $\mathbb{S}$ . Seja  $p \in \mathbb{D}$  qualquer outro ponto do disco unitário. A transformação conforme

$$\zeta \mapsto z = \frac{\zeta - p}{1 - \bar{p}\zeta},$$

envia o disco unitário no disco unitário, o ponto  $p$  na origem 0, e envia a circunferência unitária na circunferência unitária. Portanto, a composição  $v(z) := u(\zeta(z))$  é uma função harmônica no disco, e o seu valor na origem é  $v(0) = u(p)$ . Um cálculo elementar mostra que

$$\frac{dz}{iz} = \frac{1 - |p|^2}{|\zeta - p|^2} \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

na circunferência unitária (onde  $1/z = \bar{z}$  e também  $1/\zeta = \bar{\zeta}$ ). Portanto, usando a (11.4) para  $v(0)$ , o valor de  $u(p)$  é também dado por um integral,

$$u(p) = v(0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} v(z) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta|=1} u(\zeta) \frac{1 - |p|^2}{|\zeta - p|^2} \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

Esta é chamada *fórmula de Poisson* (no disco unitário). Em coordenadas polares  $\zeta = e^{i\theta}$ , chamando  $p = z$  o ponto genérico do disco unitário, assume a forma

$$\boxed{u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta} \quad (11.5)$$

Diz que o valor  $u(z)$  de uma função harmônica num ponto genérico  $z \in \mathbb{D}$  no interior do disco unitário é uma “média pesada” dos seus valores  $u(\zeta) = u(e^{i\theta})$  na circunferência unitária, os valores sendo “pesados” pelo *núcleo de Poisson*

$$P(z, \zeta) := \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}. \quad (11.6)$$

É claro que usando translações e homotetias é possível tratar o caso de um disco genérico. Também, não é necessário que a função seja harmônica na aderência do disco.

**Teorema 11.7.** *Se  $u(z)$  é uma função harmônica no disco  $D_r(0)$  e contínua na sua fronteira, então os seus valores nos pontos  $z \in D_r(0)$  são dados pela fórmula de Poisson*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta|=r} u(\zeta) \frac{r^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

*Demonstração.* É suficiente provar o teorema para o disco unitário. Se  $u(z)$  é harmônica em  $\mathbb{D}$  e contínua na sua aderência, então é uniformemente contínua no disco unitário fechado. Se  $\rho < 1$ , então a função  $v(z) = u(\rho z)$  é harmônica na aderência do disco unitário. Se  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$u(\rho z) = v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

quando  $\rho \rightarrow 1$  pela continuidade uniforme de  $u$ , e também  $u(\rho z) \rightarrow u(z)$ .  $\square$

**Fórmula de Schwarz.** Mais um cálculo elementar mostra que

$$\frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \Re \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right)$$

ou seja, o núcleo de Poisson é a parte real de uma função de  $z$ ,

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z},$$

que é holomorfa no disco unitário para todo  $\zeta \in \mathbb{S}$  fixado (com um pólo simples em  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ ). Em particular, para cada  $\zeta \in \mathbb{S}$  fixado, o núcleo de Poisson  $P(z, \zeta)$  é uma função harmônica de  $z$  no disco unitário

Então a fórmula de Poisson (11.5) pode ser reescrita como

$$u(z) = \Re \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \right).$$

Portanto, se  $u(z)$  é uma função real harmônica no disco unitário e contínua na sua aderência, então  $u(z)$  é a parte real da função

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}} \quad (11.7)$$

(definida a menos de uma constante imaginária) que é holomorfa no disco unitário. Esta fórmula, chamada *fórmula de Schwarz*, fornece uma prova construtiva do teorema 11.1, e em particular uma fórmula explícita para uma função harmônica  $v(z)$  conjugada a  $u(z)$  no disco unitário.

**Núcleo de Poisson e problema de Dirichlet.** O integral na fórmula de Poisson faz sentido para qualquer função integrável definida na circunferência unitária, não necessariamente limite de uma função harmônica no disco. O núcleo de Poisson (11.6) define um operador  $\mathcal{P} : f \mapsto \mathcal{P}f$ , que envia uma função integrável  $f(e^{i\theta})$ , definida na circunferência unitária, numa função

$$(\mathcal{P}f)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) P(z, e^{i\theta}) d\theta \quad (11.8)$$

definida no disco unitário. Para cada  $\zeta \in \mathbb{S}$  fixado, o núcleo de Poisson  $P(z, \zeta)$  é uma função infinitamente derivável e harmônica de  $z$  no disco unitário. Se  $f(e^{i\theta})$  é uma função contínua, pela regra de Leibniz 4.9  $(\mathcal{P}f)(z)$  é uma função harmônica e infinitamente derivável no disco unitário.

Em particular, é um candidato natural para ser uma extensão harmônica de  $f$  no interior do disco unitário.

A teoria das séries de Fourier fornece mais uma interpretação do núcleo de Poisson, e portanto do operador  $\mathcal{P}$ , e uma resposta ao problema de Dirichlet. Funções holomorfas ou anti-holomorfas são harmônicas. Em particular, são harmônicas no disco unitário  $\mathbb{D}$  as potências  $z^n = \rho^n e^{in\theta}$  e  $\bar{z}^n = \rho^n e^{-in\theta}$ , com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Estas funções são as extensões harmônicas de  $e^{in\theta}$  e  $e^{-in\theta}$ , respetivamente, definidas na circunferência unitária. De acordo com a teoria das séries de Fourier, sobreposições de  $e^{\pm in\theta}$  aproximam arbitrariamente bem funções suficientemente regulares. Seja  $f(e^{i\theta})$  uma função contínua definida na circunferência unitária  $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D} \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , e seja

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

a sua série de Fourier. Por linearidade, um candidato para a extensão harmônica de  $f(e^{i\theta})$  no interior do disco unitário, i.e. nos pontos  $\rho e^{i\theta}$  com  $0 \leq \rho < 1$ , é a série

$$u(\rho e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \rho^{|n|} e^{in\theta},$$

se convergente. Usando a definição (8.6) dos coeficientes de Fourier, podemos representar

$$\begin{aligned} u(\rho e^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi \right) \rho^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta-\phi)} \right) d\phi \end{aligned}$$

como um produto de convolução na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) P_{\rho}(\theta - \phi) d\phi \tag{11.9}$$

de  $f(e^{i\theta})$  com o núcleo de Poisson na circunferência, definido por

$$P_{\rho}(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in\theta}. \tag{11.10}$$

Mas o cálculo elementar

$$P_{\rho}(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

onde  $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ , mostra que  $P_{\rho}(\theta - \phi) = P(\rho e^{i\theta}, e^{i\phi})$  e portanto que  $u(z) = (\mathcal{P}f)(z)$ . Em coordenadas polares o núcleo de Poisson é

$$P_{\rho}(\theta) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta)}. \tag{11.11}$$

e portanto a fórmula que define o operador de Poisson é

$$(\mathcal{P}f)(\rho e^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta)} d\theta \tag{11.12}$$

A série de Fourier da função contínua  $f(e^{i\theta})$  pode não ser convergente na circunferência unitária, mas a série  $\sum c_n \rho^{|n|} e^{in\theta}$  é absolutamente convergente se  $\rho < 1$ . A convergência é uniforme em cada disco  $D_r(0)$  com  $r < 1$ , e portanto a (11.12) define uma função harmônica no disco unitário.

Acontece que

**Teorema 11.8.** *A família dos núcleos de Poisson  $P_\rho(\theta)$ , com  $\rho < 1$ , é uma identidade aproximada na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  quando  $\rho \rightarrow 1^-$ .*

*Demonstração.* É imediato ver que  $P_\rho(\theta) \geq 0$  e que o seu integral é  $\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta) d\theta = 2\pi$ . Seja  $0 < \delta < \pi$ . O denominador do núcleo de Poisson é

$$1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2 = (1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos(\theta))$$

Se  $1/2 < \rho \leq 1$  e  $\delta < |\theta| \leq \pi$  então existe uma constante  $c = c(\delta)$  tal que

$$(1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos(\theta)) \geq c.$$

Consequentemente, existe uma constante  $C = C(\delta)$  tal que

$$\int_{\delta < |\theta| \leq \pi} P_\rho(\theta) d\theta \leq C(1 - \rho^2)$$

e portanto este integral  $\rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow 1$ . □

Portanto, pelo teorema 9.7,

**Teorema 11.9** (Schwarz, 1872). *Se  $f(\zeta)$  é uma função contínua na circunferência unitária  $\partial\mathbb{D}$ , então  $u(z) = (\mathcal{P}f)(z)$  é uma extensão harmônica de  $f(\zeta)$  no disco unitário  $\mathbb{D}$ , contínua em  $\mathbb{D}$ .*

Esta extensão é única pelo princípio do máximo, e resolve portanto o problema de Dirichlet  $\Delta u = 0$  em  $\mathbb{D}$  com condição de fronteira  $u|_{\partial\mathbb{D}} = f$ .

**ex:** Considere o problema de Dirichlet que consiste em determinar uma função harmônica  $u$  na região  $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0\} \subset \mathbb{C}$  com condições de fronteira

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

onde  $f(x)$  é uma função contínua que se anula nos pontos 0 e  $\pi$ , e cuja série de Fourier é  $f(x) \sim \sum c_n \sin(nx)$ . Determine as soluções separáveis  $u(x, y) = Y(y) \sin(nx)$  da equação de Laplace  $\Delta u = 0$  na região  $\Omega$  tais que  $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ , e deduza uma fórmula análoga à fórmula de Poisson.

**Propriedade do valor médio.** É interessante observar que a propriedade codificada no princípio do valor médio (uma condição que não usa, aparentemente, derivadas) também implica (e portanto é equivalente) a harmonicidade, logo a suavidade de uma função. Uma função contínua  $u(x)$ , definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , satisfaz a *propriedade do valor médio* se

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta}) d\theta$$

para todo  $p \in \Omega$  e todo  $r$  suficientemente pequeno (tal que o disco fechado de raio  $r$  e centro  $p$  esteja contido em  $\Omega$ ). É elementar verificar que esta condição é equivalente a

$$u(p) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r u(p + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta$$

(basta integrar em  $dr$ , ou, vice-versa, derivar em ordem a  $r$ ), ou seja, o valor da função num ponto é igual a média dos seus valores num disco suficientemente pequeno à volta do ponto.

A propriedade do valor médio implica (mesma prova do teorema 5.16) o princípio do máximo.

**Teorema 11.10** (Koebe, 1906). *Uma função contínua numa região  $\Omega$  que satisfaz a propriedade do valor médio é harmônica em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Fixado um disco fechado contido em  $\Omega$ , podemos considerar os valores de  $u$  na sua fronteira. A fórmula de Poisson (11.8), e o teorema 11.9, dizem que existe uma função  $v(z)$  que é harmônica no disco fechado e coincide com  $u$  na sua fronteira. Pelo princípio do máximo,  $v = u$  na aderência do disco, e portanto  $u$  é também harmônica.  $\square$

O teorema de Koebe também é válido em  $\mathbb{R}^n$ , e é um resultado fundamental da teoria das funções harmônicas. Por exemplo, implica que o limite uniforme de uma família de funções harmônicas é uma função harmônica.

**ex:** Uma função real  $f(t)$  de uma variável real  $t$  é harmônica se  $f'' = 0$ , ou seja, se é afim, da forma  $f(t) = a + bt$ . É imediato verificar que uma função afim satisfaz a propriedade do valor médio. Enuncie e prove o teorema de Koebe em dimensão um.

## 12 Transformações conformes

### 12.1 Geometria local das funções holomorfas

Uma função holomorfa é localmente invertível numa vizinhança de um ponto regular.

18 jan 2021

**Comportamento local das funções holomorfas.** Os *pontos críticos* de uma função holomorfa  $f$  são os pontos  $c$  onde  $f'(c) = 0$ . Os outros pontos do domínio, onde  $f'(p) \neq 0$ , são chamados *pontos regulares*.

Numa vizinhança de um ponto regular, uma função holomorfa é bem aproximada pela sua parte linear

$$f(z) \simeq c + \lambda(z - p)$$

com  $c = f(p)$  e  $\lambda \neq 0$ , que é um automorfismo afim do plano  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ . Em geral, uma função holomorfa e não constante admite a representação local (6.5)

$$f(z) = c + (z - p)^k g(z)$$

com  $g(z)$  holomorfa e diferente de zero numa vizinhança de  $p$ , onde o inteiro  $k \geq 1$  é a ordem da função  $f(z) - c$  em  $p$ .

**Teorema 12.1** (teorema da aplicação aberta). *Uma função holomorfa e não constante numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é aberta (ou seja, envia abertos em abertos).*

*Demonstração.* Podemos assumir, a menos de translações no domínio e no contradomínio, que o ponto regular é  $0 \in \Omega$ , e que  $f(0) = 0$ . Então  $f(z) = z^k g(z)$ , com  $g(z)$  holomorfa e  $\neq 0$  numa vizinhança de  $0$ . Portanto, os valores de  $f(z)$  são diferentes de  $0$  para todo ponto  $z \neq 0$  numa vizinhança suficientemente pequena da origem. Em particular, existem um disco  $D = D_\rho(0)$  de raio  $\rho > 0$  suficientemente pequeno e um  $\varepsilon > 0$  tais que  $|f(z)| > 0$  se  $z \in D \setminus \{0\}$  e  $|f(z)| > \varepsilon$  se  $z \in \partial D$ . Se  $|w| < \varepsilon$ , a função  $g(z) = f(z) - w$  satisfaz

$$f(z) > \varepsilon > |w| = |f(z) - g(z)|$$

nos pontos da circunferência  $\partial D$ . Pelo teorema de Rouché 6.7, a função  $g(z)$  tem, no disco  $D$ , o mesmo número de zeros da função  $f(z)$ . Isto quer dizer que para todo  $w$  suficientemente pequeno existem  $k$  pontos  $z \in D$  tais que  $f(z) = w$ . Em particular, a imagem  $f(D)$  contém o disco  $D_\varepsilon(0)$ .  $\square$

Uma primeira consequência é mais uma prova do

**Teorema 12.2** (princípio do módulo máximo). *Se o módulo  $|f|$  de uma função holomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  atinge um máximo num ponto  $p$  de uma região aberta  $\Omega$ , então  $f$  é constante.*

*Demonstração.* Seja  $p \in \Omega$ , e  $f$  não é constante, pelo teorema da aplicação aberta 12.1 existem  $\varepsilon > 0$  e um disco  $D = D_\rho(p)$  tais que  $D_\varepsilon(c) \subset f(D)$ , onde  $c = f(p)$ . Em particular, existem pontos  $z \in D$  onde  $|f(z)| = |c| + \varepsilon/2 > |c|$ , logo  $p$  não pode ser um máximo de  $f$ .  $\square$

Em particular, o máximo módulo de uma função holomorfa definida numa região limitada  $\Omega$  é atingido na fronteira  $\partial\Omega$ .

Uma outra consequência imediata da prova do teorema da aplicação aberta 12.1 (no caso em que  $k = 1$ ) é

**Teorema 12.3** (teorema da função inversa). *Uma função holomorfa é localmente invertível numa vizinhança de um ponto regular.*

Ou seja, se  $p$  é um ponto regular da função holomorfa  $f$ , então existe uma vizinhança aberta (um disco suficientemente pequeno)  $D = D_\rho(p)$  de  $p$  tal que  $f|_D : D \rightarrow f(D)$  é uma função holomorfa e injetiva. A função inversa  $g : f(D) \rightarrow D$  é também holomorfa, sendo representada pelo integral de contorno

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz$$

se  $\rho > 0$  é suficientemente pequeno. De fato, a função  $h(z) = z f'(z)/(f(z) - w)$  tem um único pólo simples  $z = g(w)$  no disco  $D$ , e o seu resíduo é

$$\text{Res}(h, h(w)) = \lim_{z \rightarrow g(w)} (z - g(w)) h(z) = \lim_{z \rightarrow g(w)} \frac{z - g(w)}{f(z) - f(g(w))} z f'(z) = g(w)$$

Este é um resultado local. Uma função holomorfa pode não ser (globalmente) invertível numa região sem pontos críticos. Por exemplo,  $f(z) = z^2$  não é invertível no plano perfurado  $\mathbb{C}^\times$ , mas é invertível no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ .

Por outro lado, uma função holomorfa  $f(z)$  não pode ser injetiva numa vizinhança de um ponto crítico. A menos de translações (no domínio e no contradomínio), podemos assumir que o ponto crítico é  $c = 0$ , e que é um zero de ordem  $\text{ord}(f, 0) = k \geq 2$  da função  $f$ . Então

$$f(z) = a_k z^k (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$$

com  $a_k \neq 0$  numa vizinhança da origem, e portanto (usando a fórmula do binômio)

$$f(z) = (bz(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots))^k$$

com  $b^k = a_k$ , e, em particular,  $b \neq 0$ . Pelo teorema da função inversa, existe uma função holomorfa  $w = g(z)$ , invertível numa vizinhança da origem, tal que  $f(z) = w^k$ . Portanto, a equação  $f(z) = \varepsilon$  admite  $k$  soluções distintas se  $\varepsilon \neq 0$  é suficientemente pequeno.

**ex:** Dê um exemplo de uma função holomorfa numa região ilimitada  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que não atinge o máximo na fronteira  $\partial\Omega$ .

**Equivalências conformes.** Uma função holomorfa é também conforme (i.e. preserva os ângulos) fora dos pontos críticos. Uma função holomorfa e bijetiva  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ , cuja inversa é necessariamente holomorfa pelo teorema da função inversa 12.3, é chamada *equivalência conforme* (ou *isomorfismo analítico*) entre a região  $\Omega$  e a região  $f(\Omega) = \Omega'$ .

Um exemplo trivial é a função identidade  $f : \Omega \rightarrow \Omega$ , definida por  $f(z) = z$ .

Uma equivalência conforme pode ser pensada com uma mudança de variável conforme, da variável  $z \in \Omega$  à variável  $w = f(z) \in \Omega'$ . Duas regiões equivalentes têm as mesmas funções holomorfas, e portanto as mesmas funções harmônicas, a menos de uma mudança de coordenadas.

Regiões importantes ou interessantes, por razões óbvias, são o próprio plano complexo  $\mathbb{C}$ , o disco unitário  $\mathbb{D}$ , o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , a esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Também interessantes são os anéis  $A_{r,R}(p)$ , que não são simplesmente conexos.

**Automorfismos.** A composição de duas equivalências conformes  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  e  $g : \Omega' \rightarrow \Omega''$  é uma equivalência conforme  $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega''$ . Em particular, fixada uma região  $\Omega$ , a família das transformações conformes invertíveis  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  forma um grupo (o produto sendo a composição e o elemento neutro sendo a transformação identidade), chamado grupo dos *automorfismos* (conformes) da região  $\Omega$ , e denotado por  $\text{Aut}(\Omega)$ .

Importante é compreender os automorfismos do próprio plano complexo  $\mathbb{C}$ , do disco unitário  $\mathbb{D}$  e do semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , da a esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ .

## 12.2 Grupo de Möbius

Os grupos dos automorfismos conformes do plano complexo, do disco unitário e da esfera de Riemann são isomorfos a grupos de matrizes.

**Automorfismos do plano complexo: grupo afim.** A região mais simples é o próprio plano complexo  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 12.4.** *O grupo  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  dos automorfismos do plano complexo é o grupo  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  das transformações afins, as transformações*

$$f(z) = az + b$$

com  $a \in \mathbb{C}^\times$  e  $b \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Um automorfismo do plano complexo é uma função inteira  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . O ponto  $w = 0$  não pode ser uma singularidade essencial de  $g(w) := f(1/w)$ . De fato, pelo teorema de Casorati-Weierstrass 6.3,  $f(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$  seria um subconjunto denso em  $\mathbb{C}$ , mas também fechado porque  $f$  é um homeomorfismo, e portanto necessariamente igual ao próprio  $\mathbb{C}$ , o que é impossível se  $f$  é invertível. Então existe um inteiro  $k \geq 0$  tal que  $g(w)/w^k$  tem uma singularidade removível em  $w = 0$ , e portanto  $f(z)z^k$  é limitada numa vizinhança de  $z = \infty$ . A desigualdade de Cauchy (5.7) então implica que  $f(z)$  é um polinômio (de grau  $\leq k$ ). Mas os únicos polinômios invertíveis são os polinômios de grau um, ou seja  $f(z) = az + b$ , com derivada  $f'(z) = a$  diferente de zero.  $\square$

**Automorfismos da esfera de Riemann: grupo de Möbius.** O grupo de Möbius é o grupo  $\text{Mob}$  das transformações  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  do género

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{12.1}$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tais que  $ad - bc \neq 0$ . Cada matriz  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  define uma transformação linear invertível de  $\mathbb{C}^2$ , que envia  $(z_0, z_1)$  em  $(z'_0, z'_1) = (az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1)$ . Em particular, envia retas que passam pela origem em retas que passam pela origem: as imagens das retas  $z_0/z_1 = z$ , parametrizadas por  $z \in \mathbb{C}$ , são as retas  $z'_0/z'_1 = f(z)$ , e a imagem da reta  $z_1 = 0$ , que corresponde a  $z = \infty$ , é a reta  $z'_0/z'_1 = a/c$ . O espaço  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  das retas que passam pela origem de  $\mathbb{C}^2$  é isomorfo à esfera de Riemann  $\bar{\mathbb{C}}$ . Duas matrizes invertíveis proporcionais,  $M$  e  $\lambda M$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , induzem a mesma transformação de  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \approx \bar{\mathbb{C}}$ , e portanto o grupo de Möbius é isomorfo ao quociente  $\text{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ , ou também ao quociente  $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) := \text{SL}(2, \mathbb{C})/\pm I$ . Em particular, a inversa da transformação de Möbius (12.1) é a transformação induzida por qualquer matriz proporcional a  $M^{-1}$ , por exemplo  $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , e a composição  $f \circ g$  de duas transformações de Möbius, induzidas pelas matrizes invertíveis  $M$  e  $N$ , respetivamente, é a transformação induzida pelo produto  $MN$ .

Toda transformação de Möbius é uma composição de transformações afins e uma inversão  $I(z) = 1/z$ . De fato, a transformação (12.1) pode ser obtida como

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}$$

**Teorema 12.5.** *O grupo  $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$  dos automorfismos da esfera de Riemann é o grupo de Möbius  $\text{Mob} \approx \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Seja  $f$  um automorfismo da esfera de Riemann, tal que  $f(\infty) = d$ . Então a composição  $h = g \circ f$  de  $f$  com a transformação de Möbius  $g(z) = 1/(z - d)$  é um automorfismo do plano complexo, pois fixa o ponto  $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ . Pelo teorema 12.4,  $h$  é uma transformação afim  $h(z) = az + b$ , e portanto  $f = g^{-1} \circ h \in \text{Mob}$ .  $\square$

Uma “circunferência da esfera de Riemann” é uma circunferência ou uma reta euclidiana de  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 12.6.** *Uma transformação de Möbius envia circunferência em circunferências (da esfera de Riemann).*

*Demonstração.* A propriedade é óbvia para transformações afins, portanto é suficiente provar o teorema para a inversão  $I(z) = 1/z$ . Mas a equação de uma circunferência da esfera de Riemann é

$$a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

com  $c \neq 0$  se  $b = 0$ , ou  $b \neq 0$  se  $a = 0$ . Na variável  $w = 1/z$  esta equação é transformada em

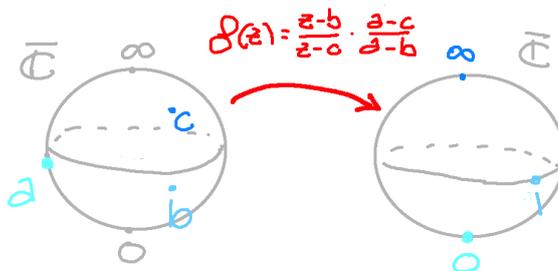
$$a + \bar{b}\bar{w} + bw + c|w|^2 = 0,$$

que é também a equação de uma circunferência da esfera de Riemann.  $\square$

**Razão cruzada e circunferências.** É imediato verificar que a única transformação de Möbius que fixa os pontos  $1, 0$  e  $\infty$  é a transformação identidade. Dados três pontos distintos  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , existe portanto uma única transformação de Möbius  $f \in \text{Mob}$  que envia  $a, b, c$  em  $1, 0, \infty$ , nesta ordem, ou seja,  $f(a) = 1, f(b) = 0$  e  $f(c) = \infty$ . Esta transformação é

$$f(z) = \frac{(z-b)(a-c)}{(z-c)(a-b)}$$

Em particular, o grupo de Möbius age “triplamente transitivamente” na esfera de Riemann: para cada  $a, b, c \in \mathbb{C}$  distintos e  $a', b', c' \in \mathbb{C}$  distintos, existe uma única  $f \in \text{Mob}$  tal que  $f(a) = a', f(b) = b'$  e  $f(c) = c'$ .



A *razão cruzada* (em inglês, *cross-ratio*) dos quatro pontos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  é a imagem de  $z_1$  pela única  $f \in \text{Mob}$  que envia  $z_2, z_3, z_4$  em  $1, 0, \infty$ , e é denotada por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := f(z_1) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

Em particular,  $(z, 1, 0, \infty) = z$ . A razão cruzada é invariante pelas transformações de Möbius.

**Teorema 12.7.** *Se  $g \in \text{Mob}$ , e  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  são quatro pontos distintos, então*

$$(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

*Demonstração.* Se  $f \in \text{Mob}$  envia  $z_2, z_3, z_4$  em  $1, 0, \infty$ , então  $fg^{-1}$  envia  $g(z_2), g(z_3), g(z_4)$  em  $1, 0, \infty$ . Então  $(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = fg^{-1}(g(z_1)) = f(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ .  $\square$

Os três pontos  $1, 0, \infty$  determinam uma única reta, a reta real, que deve ser pensada como uma circunferência de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Um ponto  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  pertence a esta circunferência sse  $z = (z, 1, 0, \infty) \in \mathbb{R}$ .

A imagem da reta real por uma transformação de Möbius arbitrária  $f \in \text{Mob}$  é uma circunferência (uma reta ou uma circunferência euclidiana em  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ ), e todas as circunferências são assim obtidas. Pela invariância da razão cruzada podemos concluir que

**Teorema 12.8.** *Quatro pontos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$  estão numa circunferência sse a razão cruzada  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  é real.*

Portanto, a (única) circunferência que passa pelos pontos (distintos)  $a, b$  e  $c$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  pode ser definida pela equação cartesiana  $\Im((z, a, b, c)) = 0$ .

**ex:** Determine uma equação cartesiana da circunferência que passa pelos pontos  $1, -1$  e  $i$ .

**Lema de Schwarz.** A resultado importante para compreender o grupo conforme do disco unitário é a seguinte aplicação do princípio do módulo máximo 12.2.

**Teorema 12.9** (lema de Schwarz). *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  uma função holomorfa do disco unitário no próprio disco unitário que fixa a origem, ou seja, tal que  $f(0) = 0$ . Então*

$$|f(z)| \leq |z|$$

para todos  $z \in \mathbb{D}$ , e  $|f'(0)| \leq 1$ . Se existir um ponto  $p \in \mathbb{D}$  onde  $|f(p)| = |p|$ , então  $f$  é uma rotação, ou seja,

$$f(z) = \lambda z$$

para alguma constante  $\lambda = e^{i\theta}$  de valor absoluto 1.

*Demonstração.* A série de Taylor de  $f(z)$ , que é convergente no disco  $\mathbb{D}$ , é do género

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Então a função  $g(z)$ , definida por

$$g(z) := \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + \dots$$

quando  $z \neq 0$ , é também uma função holomorfa no disco, se definimos  $g(0) = f'(0) = a_1$ . A desigualdade  $|f(z)| < 1$  (os valores de  $f(z)$  estão no disco unitário) implica que  $|g(z)| < 1/r$  se  $|z| = r < 1$ . Pelo princípio do módulo máximo 12.2, o mesmo acontece quando  $|z| \leq r$ . Passando ao limite quando  $r \rightarrow 1$ , concluímos que  $|g(z)| \leq 1$ , ou seja, que  $|f(z)| \leq |z|$ . Se acontece que  $|g(p)| = 1$  num ponto  $p \in \mathbb{D}$ , então o princípio do módulo máximo implica que a função  $g(z)$  é uma constante de valor absoluto igual a um. Isto prova a segunda afirmação.  $\square$

**Automorfismos do disco unitário.** Se  $\alpha \in \mathbb{D}$ , então a transformação de Möbius

$$f_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

preserva o disco unitário, pois envia  $\alpha$  na origem e os pontos  $e^{i\theta}$  da circunferência unitária nos pontos

$$g_\alpha(e^{i\theta}) = -e^{-i\theta} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{\bar{\alpha} - e^{-i\theta}},$$

que também estão na circunferência unitária. A sua restrição define portanto uma transformação invertível  $f_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , e fato uma involução do disco, pois é imediato verificar que a inversa de  $f_\alpha$  é a própria  $f_\alpha$ . Um automorfismo do disco  $\mathbb{D}$  que fixa a origem é, pelo lema de Schwarz, uma rotação  $g(z) = e^{i\theta}z$ . Consequentemente,

**Teorema 12.10.** *O grupo  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  dos automorfismos conformes do disco unitário é o grupo das transformações de Möbius*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \tag{12.2}$$

com  $\alpha \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

**Transformação de Cayley.** A transformação de Cayley é a transformação de Möbius

$$z \mapsto w = h(z) := \frac{z-i}{z+i} \quad (12.3)$$

É imediato verificar que envia a reta real  $\mathbb{R}$  na circunferência unitária  $\partial\mathbb{D}$ , pois os pontos da reta real são equidistantes dos pontos  $\pm i$ . De outra forma, porque se  $x \in \mathbb{R}$  então

$$|h(x)| = \frac{|x-i|}{|x+i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

O limite quando  $x \rightarrow \infty$  também mostra que  $h(\infty) = 1$ . Também envia o semi-plano superior  $\mathbb{H}$  no disco unitário  $\mathbb{D}$ . De fato, se  $z = x+iy$  com  $y > 0$ , então  $(y+1)^2 = y^2+2y+1 > y^2-2y+1 = (y-1)^2$ , logo

$$|z+i| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} > \sqrt{x^2+(y-1)^2} = |z-i|$$

e conseqüentemente

$$|h(z)| = \frac{|z-i|}{|z+i|} < 1.$$

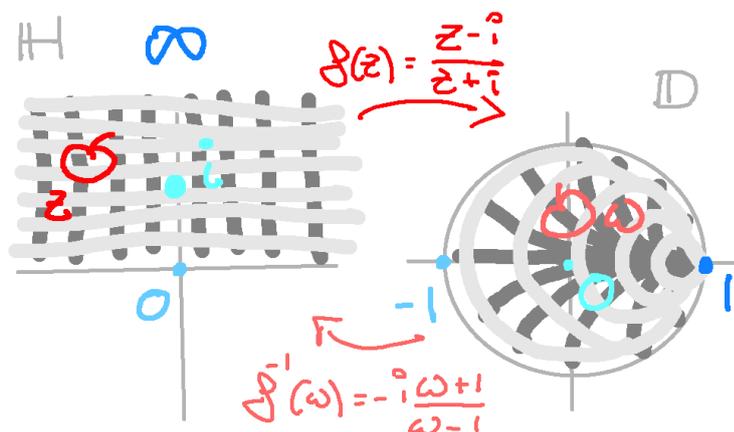
A transformação inversa é a transformação de Möbius

$$w \mapsto z = h^{-1}(w) = -i \frac{w+1}{w-1} \quad (12.4)$$

Portanto, a transformação de Cayley define uma equivalência conforme  $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  do semi-plano superior sobre o disco unitário. A imagem de  $i \in \mathbb{H}$  é a origem  $0 \in \mathbb{D}$ . As imagens das retas horizontais  $\Im(z) = c > 0$  são circunferências tangentes à circunferência unitária no ponto 1.

A transformação de Cayley também envia a fronteira do semi-plano superior (pensado como um aberto da esfera de Riemann)  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  na circunferência unitária  $\mathbb{S}$ . A imagem da reta real  $\mathbb{R}$  é  $\mathbb{S} \setminus \{1\}$ . Também,  $h(\infty) = 1$ ,  $h(-1) = i$ ,  $h(0) = -1$  e  $h(1) = i$ .

Observe que a restrição de  $h^{-1}$  à circunferência unitária é  $h^{-1}(e^{i\theta}) = \tan(\theta/2)$ .



**Automorfismos do semi-plano superior.** Se  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  é um automorfismo do semi-plano superior, então  $h \circ f \circ h^{-1}$  é um automorfismo do disco unitário, e vice-versa, se  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  é um automorfismo do disco, então  $h^{-1} \circ g \circ h$  é um automorfismo do semi-plano superior. Conseqüentemente, o grupo  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  dos automorfismos do semi-plano superior é o grupo  $h^{-1} \circ \text{Aut}(\mathbb{D}) \circ h$ . É possível verificar (embora com muito trabalho) que  $h^{-1} \circ \text{Aut}(\mathbb{D}) \circ h$  é o grupo das transformações de Möbius com coeficientes reais. De fato, estas são as únicas transformações de Möbius que preservam a “circunferência real”  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  e a sua orientação.

**Teorema 12.11.** O grupo  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  dos automorfismos conformes do semi-plano superior é o grupo das transformações

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad (12.5)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e determinante  $ad - bc \neq 0$ , e portanto é isomorfo ao grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

**ex:** Verifique que  $g_\alpha \circ g_\alpha$  é a identidade.

**ex:** Sejam  $f_\alpha(z) = e^{i\theta}(\alpha - z)/(1 - \bar{\alpha}z)$  com  $\alpha \in \mathbb{D}$ , e  $h(z) = (z - 1)/(z + i)$  a transformação de Cayley definida em (12.3). Verifique, com muita paciência, que  $f = h^{-1} \circ f_\alpha \circ h$  é a transformação de Möbius  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$  com coeficientes reais dados por

$$\begin{aligned} a &= \Im(e^{i\theta/2}\alpha) - \sin(\theta/2) & b &= \Re(e^{i\theta/2}\alpha) + \cos(\theta/2) \\ c &= \Re(e^{i\theta/2}\alpha) - \cos(\theta/2) & d &= -\Im(e^{i\theta/2}\alpha) - \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

**ex:** Verifique que uma transformação de Möbius (12.5) com coeficientes reais fixa a reta real  $\Im(z) = 0$  e envia  $\mathbb{H}$  em  $\mathbb{H}$ .

**ex:** Determine um automorfismo do semi-plano superior  $\mathbb{H}$  que envia o ponto  $i$  no ponto  $a \in \mathbb{H}$ .

**ex:** Determine uma equivalência conforme do primeiro quadrante  $Q_1$  no disco unitário  $\mathbb{D}$ .

**ex:** Verifique que

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

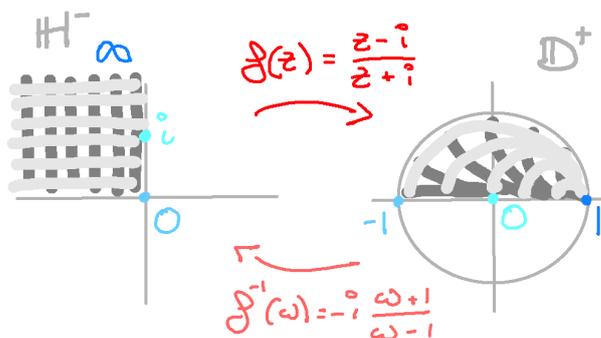
define uma equivalência conforme do semi-disco superior  $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$  sobre o primeiro quadrante  $Q_1 = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ , e calcule a transformação inversa.

### 12.3 Transformações conformes elementares

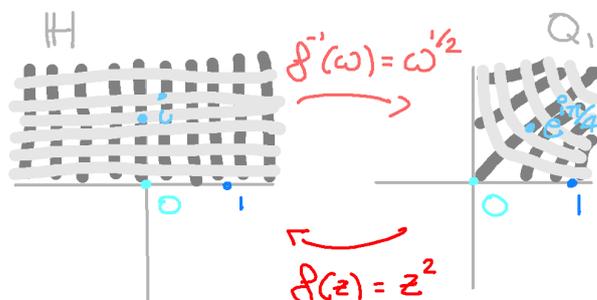
Funções holomorfas elementares definem equivalências conformes entre regiões simples do plano.

**Transformações afins.** As transformações afins permitem definir equivalências conforme entre o semi-plano superior  $\mathbb{H}$  e qualquer outro semi-plano do plano complexo. Também permitem definir equivalências conforme entre o disco unitário  $\mathbb{D}$  e qualquer outro disco  $D_r(p)$  de raio e centro arbitrários.

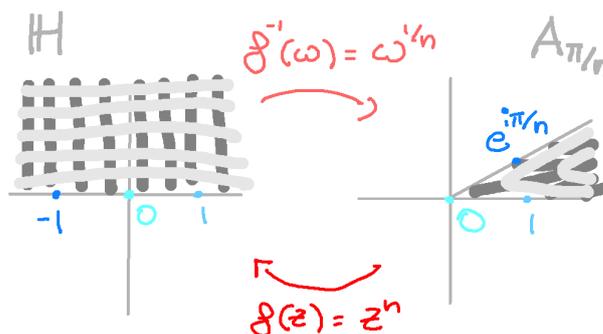
**Semi-plano superior e disco unitário.** Já vimos que a transformação de Cayley (12.3) é uma equivalência conforme entre o semi-plano superior e o disco unitário. Um cálculo mostra que a parte imaginária da sua imagem é  $\Im(h(z)) = -2\Re(z)$ . Consequentemente, a transformação de Cayley também define uma equivalência conforme do semi-plano superior esquerdo  $\mathbb{H}^- := \mathbb{H} \cap \{\Re(z) < 0\}$  sobre o semi-disco superior  $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \{\Im(z) > 0\}$ .



**Potências.** As potências também definem equivalências conformes interessantes. Por exemplo,  $f(z) = z^2$  define uma equivalência conforme do primeiro quadrante  $Q_1 := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$  sobre o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ .

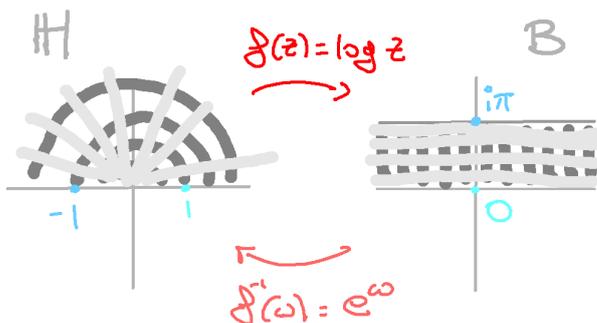


As potências  $f(z) = z^n$ , com  $n$  inteiro positivo, definem equivalências conformes dos ângulos  $A_{\pi/n} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \pi/n\}$  sobre  $\mathbb{H}$ , cujas inversas são as raízes  $g(z) = z^{1/n}$ , definidas usando o ramo principal do logaritmo.

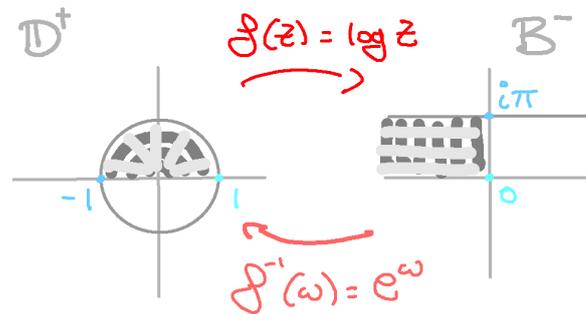


Em geral, as potências fracionárias  $f(z) = z^{1/\alpha}$ , com  $0 < \alpha < 2$  (definidas usando o ramo apropriado do logaritmo), definem equivalências conformes de  $A_{\alpha\pi} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \alpha\pi\}$  sobre  $\mathbb{H}$ .

**Exponencial e logaritmo.** A função exponencial  $f(z) = e^z$  envia o plano complexo  $\mathbb{C}$  no plano perfurado  $\mathbb{C}^\times$ , a imagem inversa de cada ponto sendo formada por infinitos pontos que diferem por múltiplos inteiros de  $2\pi i$ . Em particular, define uma equivalência conforme da faixa horizontal  $B = \{0 < \Im(z) < \pi\}$  sobre o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ . Vice-versa, o ramo principal do logaritmo,  $g(z) = \log(z)$ , envia  $\mathbb{H}$  sobre  $B$ .



O exponencial de um número complexo com parte real negativa tem módulo inferior a um. Então o ramo principal do logaritmo também define uma equivalência conforme do semi-disco superior  $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$  sobre a faixa horizontal direita  $B^+ = B \cap \{\Re(z) < 0\}$ .



**ex:** Determine regiões simples (ou seja, discos, semi-discos, semi-planos, quadrantes, ângulos, ...) onde as seguintes expressões definem funções injetivas, logo equivalências conformes, e determine as respectivas imagens:

$$iz \quad z^2 \quad e^z \quad \log(z) \quad \sin(z) \quad e^{iz} \quad 1/z$$

**ex:** Esboce as imagens das famílias de retas ortogonais  $x = c$  e  $y = c$  pela transformações  $f(z) = z^2$  e  $f(z) = 1/z$ .

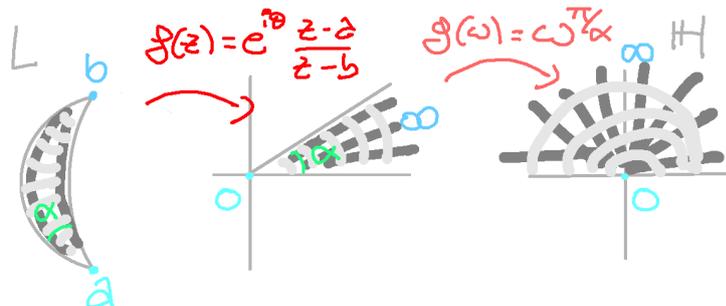
**ex:** Determine uma equivalência conforme entre o primeiro quadrante  $Q_1 := \{\Re(z) > 0\} \cap \mathbb{H}$  e o semi-plano inferior  $-\mathbb{H} := \{\Im(z) < 0\}$ ,

**ex:** Determine uma equivalência conforme entre o segundo quadrante  $Q_2 := \{\Re(z) < 0\} \cap \mathbb{H}$  e o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ .

**ex:** Determine a imagem da faixa horizontal direita  $B^+ = \{0 < \Im(z) < \pi\} \cap \{\Re(z) > 0\}$  pela transformação conforme  $f(z) = e^z$ .

**ex:** Deduza do teorema de Liouville 5.9 que não existe uma equivalência conforme  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ .

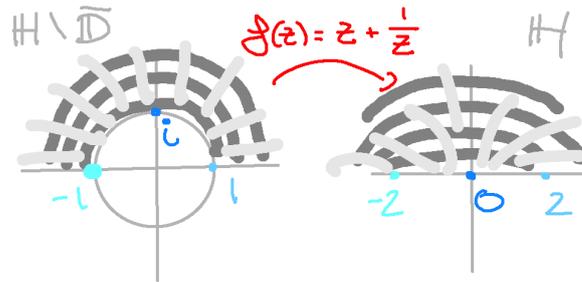
**Luas.** Uma lua, ou *biângulo*, é uma interseção  $L = D_1 \cap D_2$  entre dois discos da esfera de Riemann (cada circunferência da esfera de Riemann divide a esfera em dois discos, cujas fronteira comum é a circunferência), ou seja, uma região  $L \subset \bar{\mathbb{C}}$  limitada entre dois arcos de circunferência que formam dois ângulos iguais, de uma certa amplitude  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , nos vértices  $a$  e  $b$ . Usando uma transformação de Möbius (a transformação  $z \mapsto (z - a)/(z - b)$ ), podemos assumir que os vértices são os pontos  $0$  e  $\infty$ , e portanto, depois de uma rotação, que  $L$  é um ângulo  $L = \{0 < \arg(z) < \alpha\}$ . Então a transformação conforme  $f(z) = z^\beta$ , com  $\beta = \pi/\alpha$ , envia  $L$  sobre  $\mathbb{H}$ .



Um caso limite é quando o ângulo entre as duas circunferência é nulo, ou seja, as circunferências são tangentes. Uma transformação de Möbius envia o ponto de tangência em  $\infty$ , e portanto podemos considerar, depois de uma transformação afim, que  $B = \{0 < \Im(z) < \pi\}$ . Então a transformação conforme  $f(z) = e^z$  envia  $B$  sobre  $\mathbb{H}$ .

**Transformação de Levi-Civita/Jukovski.** Um caso particular é a lua  $A = \mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , limitada pelas circunferências  $\Im(z) = 0$  e  $|z| = 1$ , que é enviada conformemente no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  pela transformação de Levi-Civita<sup>22 23</sup>, ou de Jukovski,

$$w = J(z) := z + \frac{1}{z}.$$



A imagem da circunferência unitária é o segmento  $[-2, 2]$ . Cada ponto  $w$  fora do segmento  $[-2, 2]$  admite duas pre-imagens, que por simetria estão uma dentro e a outra fora do disco unitário. Ou seja,  $J$  é injetiva em  $\mathbb{D}$  e em  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , e envia cada uma destas regiões em  $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ . As circunferências  $|z| = \rho$ , com  $\rho \neq 1$ , são enviadas nas “elipses de Jukovski”

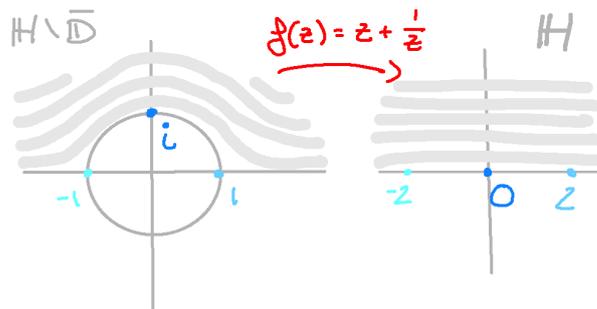
$$\frac{\Re(w)^2}{\rho + \rho^{-1}} + \frac{\Im(w)^2}{\rho - \rho^{-1}} = 1$$

centradas em 0 com focos  $\pm 2$  e semi-eixos  $\rho \pm \rho^{-1}$ . Os raios  $\text{Arg}(z) = \theta$  são enviados nas hipérbolas

$$\frac{\Re(w)^2}{4 \cos^2 \theta} - \frac{\Im(w)^2}{4 \sin^2 \theta} = 1$$

com focos  $\pm 2$ .

Em particular,  $J(z)$  define uma equivalência conforme de  $\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  sobre  $\mathbb{H}$ , e portanto as curvas de nível  $\Im(z + 1/z) = c$  são as linhas de corrente de um fluido ideal que corre horizontalmente no semi-plano superior quando encontra um obstáculo descrito pela metade superior do disco unitário.



**ex:** Verifique que  $-J(z) = -(z + 1/z)$  define uma equivalência conforme do semi-disco superior  $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$  sobre o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ .

**ex:** Observe que  $\sin(z)$  é a composição

$$z \mapsto e^{iz} \mapsto ie^{iz} \mapsto -J(ie^{iz})/2$$

Deduzza que  $\sin(z)$  define uma equivalência conforme de  $C^+ = \mathbb{H} \cap \{\pi/2 < \Re(z) < \pi/2\}$  sobre  $\mathbb{H}$ .

<sup>22</sup>V.I. Arnold, *Huyghens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser, 1990.

<sup>23</sup>T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Math.* 42 (1920), 99-144.

**ex:** Verifique que o coseno hiperbólico  $z \mapsto \cosh z$  define uma equivalência conforme entre  $B^+ = \{\Re(z) > 0\} \cap \{0 < \Im(z) < i\pi\}$  e o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , que envia os pontos de fronteira  $0$  e  $i\pi$  em  $\pm 1$ .

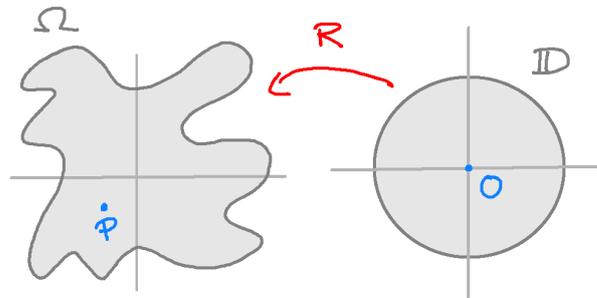
## 12.4 Teorema de uniformização de Riemann

Todas as regiões simplesmente conexas do plano complexo, diferentes do próprio plano, são conformemente equivalentes, e em particular conformemente equivalentes ao disco unitário.

**Teorema de uniformização de Riemann e princípio de Dirichlet.** Toda região simplesmente conexa  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , diferente do próprio plano complexo  $\mathbb{C}$ , é conformemente equivalente ao disco unitário (ou ao semi-plano superior). A existência de uma equivalência conforme  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  é o conteúdo do famoso *teorema de uniformização de Riemann* (ou *Riemann mapping theorem*), conjecturado por Riemann em 1851 e provado por Carathéodory e Koebe sessenta anos depois.

**Teorema 12.12** (teorema de uniformização de Riemann). *Seja  $\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$  uma região simplesmente conexa cuja fronteira contém pelo menos dois pontos (logo diferente do próprio plano complexo). Então existe uma equivalência conforme  $R : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ . O mapa de Riemann  $R$  é único uma vez fixados a imagem  $R(0)$  e o argumento da derivada  $R'(0)$ .*

A unicidade é uma consequência do lema de Schwarz. A existência precisa de mais instrumentos teóricos, e portanto é tratada na seção seguinte. No entanto, é particularmente interessante acompanhar o argumento heurístico do próprio Riemann, que revela o significado físico do teorema quando a fronteira de  $\Omega$  é uma curva regular.



Procuramos uma função holomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  (a inversa do mapa de Riemann  $R$ ) que seja contínua na aderência  $\bar{\Omega}$ , que envie  $f(p) = 0$ , e que assuma valores unitários  $|f(z)| = 1$  nos pontos  $z \in \partial\Omega$ . Uma conjectura natural, se queremos uma função injetiva, é

$$f(z) = (z - p) e^{g(z)}$$

para alguma função holomorfa  $g(z)$ . Se  $g(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ , então a condição de fronteira  $|f(z)| = 1$  corresponde a

$$\log |z - p| + u(z) = 0$$

se  $z \in \partial\Omega$ . Assim, a parte real de  $g(z)$  deve ser uma função harmônica  $u(x, y)$  definida em  $\Omega$  com valores  $\log |z - p|$  na fronteira  $\partial\Omega$ . A função

$$G(z, p) := \log |z - p| + u(z),$$

harmônica em  $\Omega \setminus \{p\}$ , com uma singularidade logarítmica em  $p$  e nula na fronteira, é chamada *função de Green* da região  $\Omega$  centrada no ponto  $p$ . É o potencial gerado no interior de  $\Omega$  por uma carga unitária colocada no ponto  $p$  se a fronteira  $\partial\Omega$  é mantida com energia potencial igual a zero. Se acreditamos, com Riemann (e com qualquer físico que vive num mundo bidimensional e pode

fazer a experiência de colocar a tal carga unitária . . .), que este problema de Dirichlet admite uma solução  $u(x, y)$  (o conteúdo do que o próprio Riemann chamou mais tarde *princípio de Dirichlet*), então podemos encontrar uma função harmónica conjugada  $v(x, y)$  (pois  $\Omega$  é simplesmente conexo) e consequentemente a função holomorfa procurada  $g(z)$ .

**Um método para resolver o problema de Dirichlet.** Vice-versa, o mapa de Riemann pode ser usado para resolver o problema de Dirichlet numa região simplesmente conexa com fronteira regular, que consiste em determinar uma extensão harmónica  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de uma função contínua  $u_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se assumimos que o mapa de Riemann estende a uma bijeção contínua  $R : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ , então podemos usar a fórmula de Poisson para estender a função contínua  $H_0 = h_0 \circ R$  a uma função harmónica  $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  no interior do disco. A solução do problema de Dirichlet é então  $h = H \circ R^{-1}$ . Condições para que o mapa de Riemann estenda com continuidade à fronteira foram encontradas por Carathéodory.

**Famílias normais e teorema de Montel.** A prova original de Koebe do teorema de uniformização de Riemann é essencialmente construtiva, e está esboçada em um exercício em [Ru87] ou em um problema em [SS03b]. A versão clássica simplificada, explicada por exemplo em [Ah78, Ru87], usa a noção de família normal e portanto o teorema de Montel.

Sejam  $X$  um espaço métrico e  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$  uma família de funções contínuas  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . A família  $\mathcal{F}$  é *normal* se toda sucessão  $(f_n)$  formada por  $f_n \in \mathcal{F}$  admite uma subsucessão que converge uniformemente em cada subconjunto compacto  $K \subset X$ .

O caso interessante para nós é uma família  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  de funções holomorfas  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definidas numa região  $\Omega$  do plano complexo. Se uma sucessão de  $f_n \in \mathcal{F}$  converge uniformemente em cada subconjunto compacto  $K \subset \Omega$  então, pelo teorema 5.8, o limite é também uma função holomorfa em  $\Omega$ .

O teorema de Ascoli-Arzelá, que pode ser enunciado em diferentes formas essencialmente equivalentes, caracteriza as famílias normais por meio de propriedades locais, tipicamente mais simples de verificar.

A família  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$  é *equicontínua* no ponto  $p \in X$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  se  $x, y \in U$ . É dita *localmente equicontínua* se é equicontínua em todos os pontos de  $X$ .

A família  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$  é *pontualmente limitada* se para cada  $p \in X$  o conjunto dos valores  $\{f(p) : f \in \mathcal{F}\}$  é um subconjunto limitado de  $\mathbb{C}$ . Os conjuntos limitados dos espaços euclidianos de dimensão finita são relativamente compacto, i.e. têm aderência compacta. Isto significa que para cada sucessão  $(f_n)$  de elementos  $f_n \in \mathcal{F}$  e para cada ponto  $p \in X$ , a sucessão dos  $f_n(p)$  admite uma subsucessão convergente.

Um espaço métrico é *separável* se admite um subconjunto numerável denso. Exemplos são os espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , logo  $\mathbb{C}$ , onde um conjunto numerável denso é, por exemplo, o conjunto dos pontos com coordenadas racionais.

**Teorema 12.13** (Ascoli-Arzelà). *Seja  $X$  um espaço métrico separável. Uma família  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$  de funções contínuas definidas em  $X$  é normal sse é pontualmente limitada e localmente equicontínua.*

*Demonstração.* Provamos a implicação  $\Leftarrow$ . Seja  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\} \subset X$  um subconjunto numerável denso, e sejam  $f_n^0 : X \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , os termos de uma sucessão arbitrária de elementos de  $\mathcal{F}$ . Se  $\mathcal{F}$  é pontualmente limitada, então para cada  $p \in P$  a sucessão dos valores  $f_n^0(p)$  é limitada, logo admite subsucessões convergentes. Um argumento diagonal mostra então que  $(f_n^0)$  admite uma subsucessão convergente em todos os pontos de  $S$ . De fato, existe uma subsucessão  $(f_n^1)$  de  $(f_n^0)$  tal que os  $f_n^1(p_1)$  convergem. Existe uma subsucessão  $(f_n^2)_{n=1}^\infty$  da precedente tal que também os  $f_n^2(p_2)$  convergem . . . Então é claro que a subsucessão “diagonal”, definida por  $f_n := f_n^n$ , é tal que os seus valores  $f_n(p)$  em cada  $p \in P$  convergem.

Mostramos agora que se  $\mathcal{F}$  é localmente equicontínua, então a subsucessão  $(f_n)$  converge uniformemente em cada compacto  $K \subset X$ . De fato, seja  $\varepsilon > 0$ . Pela equicontinuidade local, cada ponto  $k \in K$  admite uma vizinhança  $U(k)$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$  se  $x, y \in U(k)$  e  $f \in \mathcal{F}$ . Como  $K$  é compacto, um número finito  $U_i = U(k_i)$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$ , destas vizinhanças é suficiente para cobrir  $K$ . Ou seja, cada  $x \in K$  pertence a um  $U_i$ . Mas cada uma destas vizinhanças

contém um ponto  $s_i \in U_i$  do conjunto denso  $P$ . Pela convergência dos  $f_n(p_j)$ 's, existe um tempo  $\bar{n}$  tal que  $|f_n(p_j) - f_m(p_j)| < \varepsilon/3$  se  $n, m \geq \bar{n}$  para cada um destes  $p_1, p_2, \dots, p_m$  (que são finitos). Consequentemente, se  $x \in K$  está em  $U_i$ ,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(p_i)| + |f_n(p_i) - f_m(p_i)| + |f_m(p_i) - f_m(x)| < \varepsilon$$

se  $n, m \geq \bar{n}$ , ou seja,  $(f_n)$  converge uniformemente em  $K$ .

A implicação contrária  $\Rightarrow$  não é útil neste contexto, e portanto pode ficar como exercício.  $\square$

A família  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$  é *localmente limitada* se cada ponto  $p \in X$  admite uma vizinhança  $U$  e uma constante  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  se  $x \in U$  e  $f \in \mathcal{F}$ . É claro que uma família localmente limitada é pontualmente limitada. A observação de Montel é que, no contexto das funções holomorfas, uma família localmente limitada é também equicontínua, logo normal.

**Teorema 12.14** (Montel). *Seja  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  uma família de funções holomorfas definidas numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Se  $\mathcal{F}$  é localmente limitada então  $\mathcal{F}$  é uma família normal.*

*Demonstração.* Pelo teorema de Ascoli-Arzelà 12.13, é suficiente mostrar que a família é localmente equicontínua. Seja  $\varepsilon > 0$ . Fixado um ponto  $p \in \Omega$ , existe uma bola fechada suficientemente pequena  $\overline{B_r(p)}$  onde o valor absoluto das  $f \in \mathcal{F}$  é limitado por alguma constante  $M$ . Se  $z, \zeta \in B_r(p)$ , então, pela fórmula de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z) - f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-p|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{f(w)}{w-\zeta} dw \\ &= \frac{\zeta-z}{2\pi i} \oint_{|\zeta-p|=r} \frac{f(w)}{(w-z)(w-\zeta)} dw \end{aligned}$$

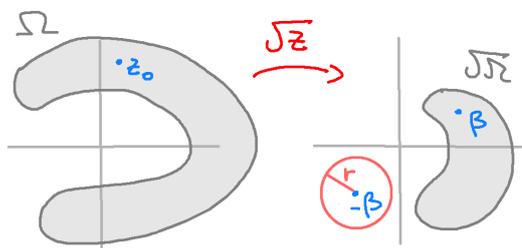
Se agora escolhermos  $z$  e  $\zeta$  na bola  $B_{r/2}(p)$ , então  $|(w-z)(w-\zeta)| > r^2/4$  quando  $w \in \partial B_r(p)$ , e portanto podemos estimar

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq |z - \zeta| \frac{4M}{r}$$

Esta quantidade é  $< \varepsilon$  se  $z$  e  $\zeta$  estão no disco de raio  $\delta = \min\{r/2, \varepsilon r/4M\}$  centrado em  $p$ .  $\square$

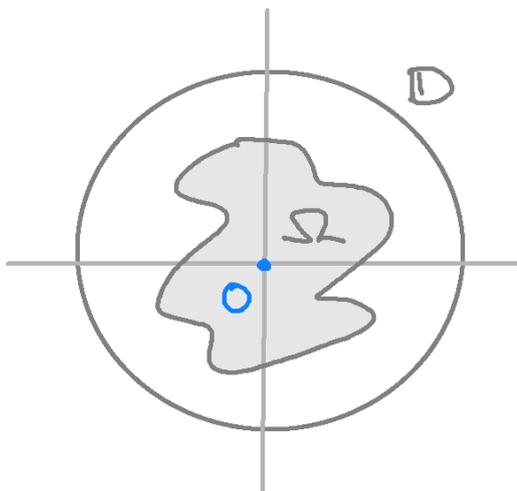
**Prova do teorema de Riemann.** Seja  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$  uma região simplesmente conexa que omite pelo menos dois pontos. Usando, se necessário, uma transformação de Möbius, podemos assumir que um destes pontos omitidos é  $\infty$  e o outro é a origem, e portanto que  $\Omega \subset \mathbb{C}$  e  $0 \notin \Omega$ .

O primeiro passo consiste em mostrar que existe uma equivalência conforme entre  $\Omega$  e um subconjunto do disco unitário, ou seja, uma função holomorfa e injetiva  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ . De fato, como  $\Omega$  é simplesmente conexo e não contém a origem, é possível definir em  $\Omega$  um ramo do logaritmo  $\log z$ , e portanto da raiz quadrada  $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2} \log z)$ . Ou seja, existe uma função holomorfa  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $g(z)^2 = z$ . Esta função é injetiva, pois se  $g(z_1) = g(z_2)$  então também  $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$ , logo  $z_1 = z_2$ . Como assume apenas um dos valores  $\pm\sqrt{z_0}$ , por exemplo  $\beta$ , então omite o outro,  $-\beta$ . Pelo teorema da aplicação aberta 12.1, a imagem  $g(\Omega)$  contém um disco aberto em torno de  $\beta$ . Consequentemente,  $g(\Omega)$  omite um inteiro disco fechado de algum raio  $r > 0$  em torno de  $-\beta$ , ou seja,  $|g(z) + \beta| > r$  para todo  $z \in \Omega$ .



É imediato então verificar que  $f(z) = r/(g(z) + \beta)$  define uma função holomorfa e injetiva  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ , i.e. uma equivalência conforme entre  $\Omega$  e  $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ .

Isto mostra que podemos assumir que  $\Omega$  é uma região simplesmente conexa contida no disco unitário, i.e.  $\Omega \subset \mathbb{D}$ . Usando, se necessário, um automorfismo do disco, podemos também assumir que  $0 \in \Omega$ . O teatro portanto é apenas o disco unitário, e uma região simplesmente conexa  $\Omega \subset \mathbb{D}$  que contém a origem.



A ideia original de Koebe consiste agora em definir iterativamente equivalências conforme de  $\Omega$  sobre regiões cada vez maiores do disco unitário. A prova simplificada clássica, no entanto, usa as seguintes ideias.

O segundo passo começa pela observação que a família  $\mathcal{F}$  de todas as funções holomorfas e injetivas  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  que fixam a origem é uma família normal, pelo teorema de Montel 12.14. Não é vazia porque contém pelo menos a função identidade. A fórmula de Cauchy implica que a derivada na origem é limitada. A ideia agora é maximizar o valor absoluto da derivada na origem. Seja  $\lambda = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| < \infty$ , e seja  $(f_n)$  uma sucessão de  $f_n \in \mathcal{F}$  tal que  $|f'_n(0)| \rightarrow \lambda$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela compacidade relativa existe uma subsucessão  $(f_{n_k})$  que é uniformemente convergente em cada compacto para uma função holomorfa  $f_\infty$ . É claro que  $f_\infty(0) = 0$ , e que  $f'_\infty(0) \neq 0$ , pois o seu valor absoluto é  $\lambda > 0$ . Em particular  $f_\infty$  não é identicamente nula, e, pelo teorema de Hurwitz 6.9, é uma função injetiva pois as  $f_n$ 's são injetivas. Também, pelo teorema da aplicação aberta 12.1, a sua imagem está contida em  $\mathbb{D}$  (pois deve ser um aberto contido no disco fechado), e portanto  $f_\infty \in \mathcal{F}$ .

O último passo agora consiste em mostrar, usando o lema de Schwarz 12.9, que  $f_\infty$  (que maximiza a derivada na origem) não pode omitir nenhum ponto do disco unitário, e portanto é uma equivalência conforme de  $\Omega$  sobre  $\mathbb{D}$  (o inverso do mapa de Riemann). Se  $f_\infty(\Omega)$  não é todo o disco, então omite pelo menos um ponto  $\alpha \in \mathbb{D}$ . O automorfismo do disco  $g_\alpha : z \mapsto (\alpha - z)/(1 - \bar{\alpha}z)$  envia  $f_\infty(\Omega)$  numa região  $g_\alpha \circ f_\infty(\Omega)$  que omite a origem. Nesta região, que é simplesmente conexa, é possível definir um ramo da raiz quadrada  $R(w) = \sqrt{w}$ , que é injetiva e envia  $\alpha = g_\alpha(0)$  em algum  $\beta \in \mathbb{D}$ . Então o automorfismo do disco  $g_\beta : z \mapsto (\beta - z)/(1 - \bar{\beta}z)$  permite definir a transformação holomorfa

$$F_\infty = g_\beta \circ R \circ g_\alpha \circ f_\infty,$$

que envia  $\Omega$  no disco unitário. Também  $F_\infty$  pertence à família  $\mathcal{F}$ , pois fixa a origem. Então podemos escrever  $f_\infty = (g_\alpha \circ Q \circ g_\beta) \circ F_\infty$ , onde  $Q(z) = z^2$ . A composição  $h = g_\alpha \circ Q \circ g_\beta$  é uma função holomorfa do disco unitário no disco unitário que fixa a origem. Não sendo injetiva (pois a função quadrado não é), tem derivada  $|h'(0)| < 1$  na origem pelo lema de Schwarz 12.9. Isto implica que

$$|f'_\infty(0)| = |h'(0)| \cdot |F'_\infty(0)| > |F'_\infty(0)|,$$

e portanto que  $f_\infty$  não maximiza a derivada na origem dentro da família  $\mathcal{F}$ . Esta contradição termina a prova do teorema de Riemann 12.12.

## 13 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é, entre outras coisas, um instrumento que usa o princípio de sobreposição para determinar soluções de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes.

### 13.1 Transformada de Laplace

**Transformada de Laplace.** No contexto do estudo das equações diferenciais ordinárias, o domínio natural da transformada de Laplace é o espaço das funções *causais*. Estas são funções (com valores reais ou complexos)  $f(t)$  definidas apenas para tempos  $t \geq 0$  (ou definidas para todos os tempos reais mas nulas para tempos negativos). Também consideramos apenas funções causais seccionalmente contínuas, logo Riemann integráveis em cada intervalo limitado.

A transformada de Laplace da função  $f(t)$  é a função  $(\mathcal{L}f)(z) = F(z)$ , formalmente definida pelo integral impróprio

$$F(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (13.1)$$

O argumento  $z$  é um parâmetro complexo. A restrição de  $F(z)$  à recta real é tradicionalmente denotada por  $F(s)$ , sendo  $s = \Re(z)$ . Se  $t$  é um tempo, então  $s$  é uma frequência.

**Transformada de Laplace e função geradora.** A transformada de Laplace pode ser pensada como uma generalização da função geradora de uma sucessão  $(a_n)$ , que é a série de potências (formal, porque o raio de convergência pode ser nulo)

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

De fato, seja  $f(t)$  a função escada que vale  $f(t) = a_n$  no intervalo  $n \leq t < n+1$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Então a sua transformada de Laplace é

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_n^{n+1} e^{-zt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{-zn} - e^{-z(n+1)}}{z} = \frac{1 - e^{-z}}{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-zn} \\ &= \frac{1 - e^{-z}}{z} G(e^{-z}) \end{aligned}$$

**Região de convergência.** Para que o integral impróprio (13.1) seja absolutamente convergente numa região não trivial do plano complexo, é necessário que o crescimento da função  $f(t)$  não seja demasiado rápido.

A função causal  $f(t)$  tem *ordem/crescimento exponencial*, se existir um expoente real  $\mu \geq 0$  tal que o seu módulo é limitado por

$$|f(t)| \leq M e^{\mu t}$$

para todos os tempos  $t \geq 0$  e alguma constantes reali  $M$ . O espaço das funções causais seccionalmente contínuas satisfazendo esta condição, para um  $\mu \geq 0$  fixado e  $M$  arbitrário, pode ser chamado  $\mathcal{E}_\mu^+$ . Em particular,  $\mathcal{E}_0^+$  é o espaço das funções limitadas. É claro que  $\mathcal{E}_\mu^+ \subset \mathcal{E}_\nu^+$  se  $\mu \leq \nu$ . A reunião  $\mathcal{E}^+ = \cup_{\mu \geq 0} \mathcal{E}_\mu^+$  é o espaço das funções de crescimento exponencial. Este espaço contém, naturalmente, todas as funções elementares (polinómios, funções trigonométricas e hiperbólicas, ...) úteis nas aplicações.

Se  $f \in \mathcal{E}_\mu^+$ , então o integral (13.1) que define a transformada de Laplace de  $f(t)$  é absolutamente convergente para cada  $z$  no semi-plano  $\{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \Re(z) > \mu\}$ . O maior destes semi-planos é

chamado *região de convergência* de  $f$ , ou  $\text{RoC}(f)$ . De fato, se  $|f(t)| \leq Me^{\mu t}$  para todo  $t \geq 0$  e  $\Re(z) = s > \mu$ , então

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{-zt} f(t) dt \right| &\leq \int_0^T |e^{-zt} f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^T e^{-(s-\mu)t} dt = M \frac{1 - e^{-(s-\mu)T}}{s - \mu} \leq \frac{M}{s - \mu} \end{aligned}$$

para todo  $T > 0$ . O valor da transformada de Laplace em cada  $z$  neste semi-plano é então o limite dos integrais

$$F_T(z) := \int_0^T e^{-zt} f(t) dt \quad (13.2)$$

quando  $T \rightarrow \infty$ . A convergência é uniforme em cada semi-plano  $\Re(z) = s \geq \mu + \varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$  fixado. De fato, nestas regiões

$$\begin{aligned} |F_{n+m}(z) - F_n(z)| &\leq \int_n^{n+m} e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_n^{n+m} e^{-(s-\mu)t} dt = M \frac{e^{-\varepsilon n}}{\varepsilon} \end{aligned}$$

e portanto a sucessão das  $F_n(z)$ , com  $n$  natural, é uma sucessão fundamental pela norma do sup.

No resto da capítulo, assumimos implicitamente que todas as funções causais consideradas, e das quais calculamos a transformada de Laplace, são seccionalmente contínuas e de crescimento exponencial.

**ex:** Verifique as seguintes fórmulas para as transformadas de Laplace das funções elementares:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\}(z) = \frac{1}{z} \quad \mathcal{L}\{t\}(z) = \frac{1}{z^2} \quad \dots \quad \mathcal{L}\{t^n\}(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{em } \Re(z) > 0. \\ \mathcal{L}\{e^{kt}\}(z) = \frac{1}{z - k} \quad \text{em } \Re(z) > k. \end{aligned}$$

**ex:** A função *salto unitário* em  $\tau \geq 0$  é definida por

$$u_\tau(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < \tau \\ 1 & \text{se } t \geq \tau \end{cases}.$$

Verifique que a sua transformada de Laplace é

$$U_\tau(z) = \frac{e^{-\tau z}}{z} \quad \text{em } \Re(z) > 0.$$

**ex:** Verifique que a transformada de Laplace da potência  $f(t) = t^q$ , com  $q \geq 0$  não necessariamente inteiro, é

$$F(z) = \frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}} \quad \text{em } \Re(z) > 0,$$

onde a *função Gama* é definida pelo integral impróprio

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{em } \Re(z) > 0.$$

Mostre que  $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ , e que  $\Gamma(1) = 1$ . Deduza que  $\Gamma$  estende o factorial, ou seja,  $\Gamma(n+1) = n!$  se  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**ex:** Mostre que a transformada de Laplace da função sinus cardinalis  $h(t) = \frac{\sin t}{t}$  é

$$H(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{\sin t}{t} dt = \arctan(1/z) \quad \text{em } \Re(z) > 0$$

**Propriedades elementares.** Sendo um integral, a transformada de Laplace é linear. Ou seja, se  $f$  e  $g$  são funções causais e  $\lambda \in \mathbb{C}$ , então

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}f + \mathcal{L}g \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}f$$

na interseção das regiões de convergência.

O efeito de uma homotetia no espaço dos tempos é também uma homotetia, juntamente com uma multiplicação, no espaço das frequências. Se  $F(z)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ , definida na região de convergência  $\Re(z) > \mu$ , então a transformada de Laplace de  $f(\lambda t)$ , com  $\lambda$  real e positivo, é

$$\frac{1}{\lambda} F(z/\lambda)$$

na região  $\Re(z) > \lambda\mu$ .

As translações no espaços dos tempos não enviam necessariamente funções causais em funções causais. Mais interessante são os “retardos”. Se  $F(z)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ , definida na região de convergência  $\Re(z) > \mu$ , então a transformada de Laplace de  $u_\tau(t) f(t - \tau)$ , com  $\tau > 0$ , é

$$e^{-\tau z} F(z) \quad \text{em } \Re(z) > \mu$$

Por outro lado, uma translação no espaço das frequências corresponde a multiplicar por um exponencial a função no espaço dos tempos. Se  $F(z)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ , definida na região de convergência  $\Re(z) > \mu$ , então a transformada de Laplace de  $e^{kt} f(t)$ , com  $k$  real, é

$$F(z - k)$$

na região  $\Re(z) > \mu + k$ .

As provas são exercícios elementares.

**ex:** Verifique que a transformada de Laplace de  $f(t) = e^{i\omega t}$  é

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}(z) = \frac{1}{z - i\omega} \quad \text{em } \Re(z) > 0$$

Deduzo, calculando parte real e imaginária, que

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}.$$

**Derivadas da transformada de Laplace.** A transformada de Laplace é uma sobreposição, ou seja, uma média pesada, das funções holomorfas  $e^{-zt}$ , com pesos  $f(t)$ . De acordo com um princípio geral sobre integrais absolutamente convergentes de funções holomorfas, podemos calcular a sua derivada derivando dentro do integral. Uma integração por partes formal sugere que

$$F'(z) = - \int_0^\infty e^{-zt} t f(t) dt$$

Este cálculo é justificado pelo seguinte resultado.

**Teorema 13.1.** *A transformada de Laplace  $F(z)$  de uma função  $f(t)$  com crescimento exponencial é uma função holomorfa na região de convergência.*

*Demonstração.* Fixado um tempo finito  $T > 0$ , o integral (13.2) define uma função holomorfa em  $\Re(z) > \mu$ , com derivada  $F'_T(z) = - \int_0^T e^{-zt} t f(t) dt$ . De fato, se  $\Re(z) = s > \mu$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_T(z + \zeta) - F_T(z)}{\zeta} + \int_0^T e^{-zt} t f(t) dt \right| &= \left| \int_0^T \left( 1 - \frac{1 - e^{-\zeta t}}{\zeta t} \right) e^{-zt} t f(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^T |\zeta t| e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq |\zeta| M \int_0^T t^2 e^{-(s-\mu)t} dt \rightarrow 0 \quad \text{quando } \zeta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pois o módulo de  $1 - \frac{1-e^{-\zeta t}}{\zeta t} = \frac{1}{2} \zeta t - \frac{1}{6} (\zeta t)^2 + \dots$  é limitado por  $|\zeta t|$  se  $|\zeta t| \leq |\zeta| T$  é suficientemente pequeno. A transformada de Laplace  $F(z)$  é o limite, por exemplo, da sucessão de funções  $F_n(z)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como vimos, a sucessão de funções holomorfas  $F_n(z)$  converge uniformemente em cada semi-plano  $\Re(z) \geq \mu + \varepsilon$ , e portanto em cada subconjunto compacto da região de convergência. Pelo teorema 5.8, o limite  $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z)$  é holomorfo em  $\Re(z) > \mu$ .  $\square$

Sendo holomorfa, a transformada de Laplace é infinitamente derivável. De acordo com a prova do teorema 13.1, as suas derivadas podem ser obtida derivando dentro do integral. Por indução, é imediato ver que a  $n$ -ésima derivada de  $F(z)$  é a transformada de Laplace de  $(-1)^n t^n f(t)$ , i.e.

$$\frac{d^n F}{dz^n}(z) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-zt} t^n f(t) dt.$$

Tipicamente, como mostram os exemplos das funções elementares, as transformadas de Laplace admitem extensões meromorfas em todo o plano complexo.

**Transformada de Laplace de funções periódicas.** Sej  $f(t)$  uma função causal periódica de período  $T$ . Então o integral que define a sua transformada de Laplace pode ser decomposto numa soma

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-zt} f(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-znT} \int_0^T e^{-zt} f(t) dt \end{aligned}$$

onde usamos a periodicidade  $f(nT + t) = f(t)$ . Sendo a soma da série geométrica de razão  $e^{-zT}$  igual a  $1/(1 - e^{-zT})$ , o resultado é que

$$F(z) = \frac{F_T(z)}{1 - e^{-zT}} \quad \text{onde} \quad F_T(z) = \int_0^T e^{-zt} f(t) dt$$

**ex:** Determine a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas: <sup>24</sup>

$$f(t) = t - [t] \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 & \text{se } [t] \text{ é ímpar} \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} t - [t] & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 + [t] - t & \text{se } [t] \text{ é ímpar} \end{cases}$$

**Produto de convolução.** O produto de convolução das funções causais  $f(t)$  e  $g(t)$  é a função causa  $f * g(t)$  definida por

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \tag{13.3}$$

O produto de convolução é simétrico, ou seja,  $f * g = g * f$ .

Um famoso teorema de Titchmarsh <sup>25 26</sup> afirma que se o produto de convolução  $f * g$  de duas funções contínuas é nulo num intervalo  $[0, T]$  então existem tempos  $\alpha$  e  $\beta$  com  $\alpha + \beta \geq T$  tais que  $f$  é nula em  $[0, \alpha]$  e  $g$  é nula em  $[0, \beta]$ .

A propriedade importante é que “a transformada de Laplace envia produtos de convolução no espaço dos tempos em produtos pontuais no espaço das frequências”. Ou seja,

<sup>24</sup> $[t]$  denota a parte inteira de  $t$ , ou seja, o maior inteiro  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n \leq t$ .

<sup>25</sup>E.C. Titchmarsh, The zeros of certain integral functions, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1926), 283-302.

<sup>26</sup>R. Doss, An elementary proof of Titchmarsh’s convolution theorem, *Proc. Am. Math. Soc.* **104** (1988), 181-184.

**Teorema 13.2.** Se  $F(z)$  e  $G(z)$  são as transformadas de Laplace de  $f(t)$  e  $g(t)$ , respectivamente, então a transformada de Laplace de  $(f * g)(t)$  é igual ao produto pontual

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-zt} (f * g)(t) dt = F(z) G(z)} \quad (13.4)$$

no semi-plano onde as três transformadas estão definidas.

*Demonstração.* De fato, usando a substituição  $(\tau, t) \mapsto (\tau, \xi)$  com  $\xi = t - \tau$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-zt} (f * g)(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z(\tau + \xi)} f(\tau) g(\xi) d\tau d\xi \end{aligned}$$

□

**ex:** Considere a (13.4) com  $g(t) = 1$ , e deduza que a transformada de Laplace da primitiva de  $f(t)$  (que vale 0 para  $t = 0$ ) é

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} \left( \int_0^t f(x) dx \right) dt = \frac{1}{z} F(z)$$

Ou seja, a primitivação no espaço dos tempos corresponde à multiplicação por  $z^{-1}$  no espaço das frequências.

**Derivadas e transformada de Laplace.** Mais importante, para a resolução de equações diferenciais, é que se também as derivadas  $f'$ ,  $f''$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}$  são seccionalmente contínuas e de crescimento exponencial, então a integração por partes implica que

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} f'(t) dt = zF(z) - f(0) \quad (13.5)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} f''(t) dt = z^2 F(z) - zf(0) - f'(0) \quad (13.6)$$

e, por indução,

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} f^{(n)}(t) dt = z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - z f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (13.7)$$

Em particular,

**Teorema 13.3.** Seja  $f(t)$  uma função causal tal que as suas primeiras  $n$  derivadas são seccionalmente contínuas e têm crescimento exponencial, e seja  $F(z)$  a sua transformada de Laplace. Se a função  $f(t)$  e as suas primeiras  $n - 1$  derivadas são nulas no instante inicial  $t = 0$ , i.e. se  $f^{(k)}(0) = 0$  para  $0 \leq k \leq n - 1$ , então

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-zt} f^{(n)}(t) dt = z^n F(z).}$$

Ou seja, a transformada de Laplace transforma derivadas em ordem ao tempo em potências da frequência complexa. Portanto, transforma equações diferenciais (lineares com coeficientes constantes) em equações algébricas, em princípio mais fáceis de resolver.

**ex:** Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções (pensadas como funções causais):

$$\begin{aligned}
 & t^2 - 2t + 1 \quad 2 + e^{3t} - 5 \sin(\pi t) \quad (t-1)e^{2t} \quad \sin(5t) \cos(4t) \\
 & t^n e^{kt} \quad \cosh(\beta t) \quad \sinh(\beta t) \\
 & e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \quad e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \quad t \cos(\omega t) \quad t \sin(\omega t) \\
 & u_a(t)e^{-\alpha t} \quad u_a(t) \sin(\omega t) \quad (1 - u_a(t)) t. \\
 & A \sin(\omega t + \varphi) \quad Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \quad Ae^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \varphi) \\
 & A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t) \quad A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) \\
 & Ae^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + \varphi) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2 \gamma^2}} \sin(\gamma t + \phi)
 \end{aligned}$$

**Transformada de Laplace da delta de Dirac.** A função delta de Dirac  $\delta(t)$  é definida pela identidade formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) dt = f(t),$$

onde  $f(t)$  é uma função contínua arbitrária. Formalmente,  $\delta(t - \tau)$  é a derivada da função salto unitário  $u_\tau(t) = \Theta(t - \tau)$ . Um cálculo formal mostra que a transformada de Laplace de  $\delta(t - \tau)$ , com  $\tau \geq 0$ , é

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} \delta(t - \tau) dt = e^{-\tau z},$$

que é, de fato, igual a  $zU_\tau(z)$ .

## 13.2 Transformada de Laplace inversa

**Transformada de Laplace inversa.** Se  $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$  é a transformada de Laplace da função  $f(t)$ , então a própria função  $f(t)$  é dita *transformada de Laplace inversa* de  $F(z)$ , e denotada por  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}(t)$ .

Não existe uma fórmula geral para a transformada inversa, devido à ambiguidade sobre o domínio da própria transformada e portanto à impossibilidade de caracterizar a sua imagem. Também é claro que uma transformada inversa, se existir, não é única, pois podemos modificar os valores de uma função apenas num número finito ou numerável de pontos sem mudar a sua transformada.

No entanto, as propriedades elementares da transformada de Laplace podem ser utilizadas para “adivinhar” umas transformadas inversas de funções suficientemente simples, essencialmente funções racionais.

**ex:** Determine uma transformada de Laplace inversa das seguintes funções  $F(z)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{z} + \frac{1}{z^4} \quad \frac{2}{z^2 + 9} \quad \frac{1}{z(z^2 + 1)} \quad \frac{z - 1}{z^2 - 2z + 5} \\
 & \frac{e^{-3z}}{z} \quad \frac{e^{-z}}{(z - 2)^2} \quad \frac{e^{-4z} - e^{-7z}}{z^2} \quad \frac{1}{z^3 + 4z^2 + 3z}
 \end{aligned}$$

**Unicidade da transformada.** A unicidade da transformada inversa é garantida dentro do espaço das funções causais contínuas e limitadas.

**Teorema 13.4** (unicidade da transformada de Laplace inversa). *Seja  $f(t)$  uma função contínua e limitada. Se a sua transformada de Laplace  $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$ , definida no semi-plano direito  $\Re(z) > 0$ , é identicamente nula, então também  $f(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ .*

*Demonstração.* A mudança de variável  $x = e^{-t}$  transforma o integral

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^1 x^{z-1} g(x) dx$$

onde  $g(x) := f(-\log x)$ . Se  $F(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}_+$ , então, por linearidade, também

$$\int_0^1 p(x) g(x) dx = 0$$

para todo polinómio  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ . Pelo teorema de aproximação de Weierstrass 9.11, o mesmo acontece para toda função contínua  $p(x)$ , e em particular para a própria  $g(x)$ . Mas

$$\int_0^1 g(x)^2 dx = 0$$

implica que  $g(x) = 0$  para todo  $x$  entre 0 e 1, e portanto  $f(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ .  $\square$

Consequentemente, duas funções causais conínuas e limitadas com a mesma transformada de Laplace são necessariamente iguais.

**Fórmula de inversão de Mellin.** Se  $f(t)$  tem crescimento exponencial e portanto a sua transformada de Laplace é holomorfa num semi-plano  $\Re(z) > \mu$ , então nos pontos de continuidade de  $f(t)$  vale a *fórmula de inversão de Mellin* (ou *integral de Bromwich*)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{zt} F(z) dz \quad (13.8)$$

onde  $\beta > \mu$ .

Para compreender a origem desta fórmula, parametrizamos o caminho de integração como  $\omega \mapsto \beta + i\omega$ , onde  $\omega$  é uma frequência real. Então o integral (13.8) fica

$$f(t) = e^{\beta t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(\beta + i\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Ou seja,  $e^{-\beta t} f(t)$  é a transformada de Fourier inversa da função  $G(\omega) := F(\beta + i\omega)$  (escrita na notação dos engenheiros). Por outro lado,

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-\beta t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt$$

é a transformada de Fourier de uma função que vale  $g(t) = e^{-\beta t} f(t)$  para tempos  $t \geq 0$  e  $g(t) = 0$  para tempos  $t < 0$ . A função  $g(t)$  é limitada por  $|g(t)| \leq M e^{-(\beta-\mu)t}$ , e, sendo  $\beta > \mu$ , é absolutamente integrável e também de quadrado integrável. É claro então que a fórmula de Mellin (13.8) é essencialmente uma fórmula de inversão de Fourier (que nós apenas provamos para funções no espaço de Schwartz) no espaço de certas particulares funções em  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

**Uma ideia da demonstração.** Queremos provar que, assumindo que o teorema de Fubini permita mudar a ordem de integração,

$$\begin{aligned} g(t) &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} g(s) ds \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega(t-s)} \frac{d\omega}{2\pi} \right) g(s) ds \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega(t-s))}{\pi(t-s)} g(s) ds \end{aligned}$$

ou seja, que  $g = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} S_{\Omega} * g$  (convolução na reta real), onde a família das *funções de Shannon* é definida por

$$S_{\Omega}(t) := \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\Omega t)}{t}$$

Lamentavelmente, apesar de ter integral constante igual a  $\int_{-\infty}^{\infty} S_{\Omega}(t) dt = 1$  e de ser assintoticamente concentrada na origem, a família das  $S_{\Omega}$  não forma uma identidade aproximada quando  $\Omega \rightarrow \infty$ . O problema é que as  $S_{\Omega}(t)$  não são uniformemente integráveis! De fato,  $S_{\Omega}(t)$  não é absolutamente integrável, a convergência do seu integral impróprio é apenas devida a cancelações que dependem das oscilações do seno.

Precisaremos de condições locais sobre  $f(t)$ , e de usar o lema de Riemann-Lebesgue. Condições suficientes (mas não necessárias!) para provar a fórmula de inversão de Mellin são as seguintes:

**Teorema 13.5.** *Seja  $f(t)$  uma função integrável de crescimento exponencial, e seja  $F(z)$  a sua transformada de Laplace. Nos pontos  $t$  onde  $f(t)$  é Lipschitziana (por exemplo diferenciável), o valor de  $f(t)$  é dado pela fórmula de Mellin (13.8).*

*Demonstração.* Seja  $t$  um ponto onde a função  $f(t)$  é Lipschitziana, i.e. onde

$$|f(t') - f(t)| \leq L |t' - t|$$

se  $|t' - t| \leq \delta$  para todo  $\delta > 0$  suficientemente pequeno e alguma constante  $L > 0$ . Fixado um tal  $\delta > 0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} (S_{\Omega} * g)(t) - g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(t-s) - g(t)) S_{\Omega}(s) ds \\ &= \int_{|s| \leq \delta} (g(t-s) - g(t)) S_{\Omega}(s) ds + \int_{|s| > \delta} (g(t-s) - g(t)) S_{\Omega}(s) ds \end{aligned}$$

Para estimar o segundo integral, observamos que

$$(g(t-s) - g(t)) S_{\Omega}(s) = \frac{e^{-\beta(t-s)} f(t-s) - e^{-\beta t} f(t)}{\pi s} \sin(\Omega s)$$

é o produto de uma função absolutamente integrável na região  $|s| > \delta$  (lembre que  $g(t)$  é nula se  $t < 0$ , e igual a  $e^{-\beta t} f(t)$  se  $t \geq 0$ ) vezes a função oscilante  $\sin(\Omega t)$ . Pelo lema de Riemann-Lebesgue 8.3, o limite do integral quando  $\Omega \rightarrow \infty$  é

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{|s| > \delta} (g(t-s) - g(t)) S_{\Omega}(s) ds = 0$$

Para estimar o primeiro integral, observamos que se  $|s| \leq \delta$  então

$$\begin{aligned} |g(t-s) - g(t)| &= |e^{-\beta(t-s)} f(t-s) - e^{-\beta(t-s)} f(t) + e^{-\beta(t-s)} f(t) - e^{-\beta t} f(t)| \\ &\leq |e^{-\beta(t-s)}| |f(t-s) - f(t)| + e^{-\beta t} |e^{\beta s} - 1| |f(t)| \\ &\leq e^{\beta(\delta-t)} L |s| + e^{-\beta t} e^{\beta \delta} |s| |f(t)| \\ &\leq e^{\beta(\delta-t)} (L + |f(t)|) |s| \leq e^{\beta \delta} K |s| \end{aligned}$$

onde  $K$  é uma constante que apenas depende de  $t$ , do valor  $|f(t)|$  e da constante de Lipschitz  $L$ . Portanto, o módulo do primeiro integral é limitado por

$$\int_{|s| \leq \delta} e^{\beta \delta} K |s| |S_{\Omega}(s)| ds \leq \frac{1}{\pi} \int_{|s| \leq \delta} e^{\beta \delta} K |\sin(\Omega s)| ds \leq \frac{2e^{\beta \delta} K}{\pi} \delta$$

Ao fazer depois o limite quando  $\delta \rightarrow 0$  temos o resultado.  $\square$

**ex:** Use a fórmula de Mellin (13.8) para calcular a transformada de Laplace inversa de  $F(z) = \frac{1}{z-a}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

**Inversão de transformadas meromorfas.** Ao resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, transformadas típicas (chamadas “funções de transferência”) são funções racionais. Para esta classe de funções existe uma fórmula mais simples para a transformada de Laplace inversa, que mostra que a informação significativa sobre  $f(t)$  está nos pólos e respectivos resíduos da transformada de Laplace  $F(z)$ .

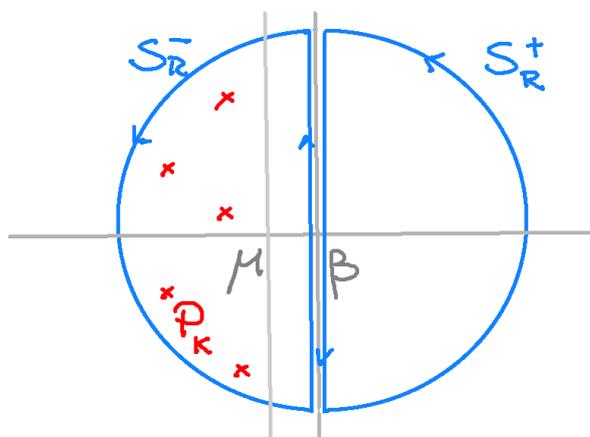
**Teorema 13.6.** *Seja  $F(z)$  uma função meromorfa, com um número finito de singularidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , holomorfa num semi-plano  $\Re(z) > \mu$ , e tal que  $M(R) := \sup_{|z|=R} |F(z)| \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ . Então  $F(z)$  é a transformada de Laplace de*

$$f(t) = \sum_k \text{Res}(e^{zt} F(z), p_k) \quad (13.9)$$

Se sabemos “a priori” que  $F(z)$  é a transformada de Laplace de uma função de crescimento exponencial  $f(t)$ , é claro que a fórmula (13.9) é uma consequência da fórmula de Mellin (13.8). De fato, seja  $\beta > \mu$ , e consideramos o integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-iR}^{\beta+iR} e^{zt} F(z) dz$$

O caminho de integração divide a bola  $B_R(\beta)$  em duas metades  $B_R^-$  e  $B_R^+$ , esquerda e direita, cujas fronteiras são formadas pelo próprio segmento vertical e por duas semi-circunferências  $S_R^-$  e  $S_R^+$ , respetivamente. Os pólos de  $F(z)$  estão a esquerda da linha  $\Re(z) = \beta$ , e portanto dentro de  $B_R^-$  se  $R$  é suficientemente grande.



Pelo teorema dos resíduos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R^-} e^{zt} F(z) dz = \sum_k \text{Res}(e^{zt} F(z), p_k)$$

Se  $t > 0$ , o lema de Jordan 6.10 implica que o limite do integral  $\int_{S_R^-} e^{zt} F(z) dz$  quando  $R \rightarrow \infty$  é nulo, e portanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{zt} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial B_R^-} e^{zt} F(z) dz = \sum_k \text{Res}(e^{zt} F(z), p_k) \quad \text{se } t > 0.$$

Por outro lado, sendo  $F(z)$  holomorfa em  $\Re(z) > \beta$ , o integral  $\oint_{\partial B_R^+} e^{zt} F(z) dz = 0$ . Se  $t < 0$ , o lema de Jordan 6.10 implica que o limite do integral  $\int_{S_R^+} e^{zt} F(z) dz$  quando  $R \rightarrow \infty$  é nulo, e portanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{zt} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial B_R^+} e^{zt} F(z) dz = 0 \quad \text{se } t < 0.$$

No entanto, é possível dar uma prova do teorema 13.6 que não depende da fórmula de Mellin.

*Demonstração.* A soma dos resíduos na fórmula 13.9 é igual ao integral de contorno

$$\oint_{|\zeta|=R} e^{\zeta t} F(\zeta) d\zeta$$

ao longo de uma circunferência de raio  $R$  suficientemente grande. Seja  $\beta > \mu$ . A reta vertical  $\Re(z) = \beta$  divide a bola de raio  $R$  em duas partes (se  $R$  é suficientemente grande), esquerda e direita, cujas fronteiras orientadas denotamos por  $S_R^-$  e  $S_R^+$ , respetivamente. Sendo os pólos de  $F(z)$  na região  $\Re(z) < \beta$ , o candidato a função inversa é

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_R^-} e^{zt} F(z) dz$$

A sua transformada de Laplace num ponto com  $\Re(z) > \beta$  é portanto o limite

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^T e^{-zt} \oint_{S_R^-} e^{\zeta t} F(\zeta) d\zeta dt &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \oint_{S_R^-} F(\zeta) \int_0^T e^{(\zeta-z)t} dt d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{S_R^-} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \end{aligned}$$

Se  $z$  está no interior de  $S_R^+$ , ou seja, se  $R$  é suficientemente grande, podemos usar a fórmula de Cauchy e observar que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{S_R^-} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{S_R^-} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_R^+} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_R^+} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + F(z). \end{aligned}$$

Pelas hipóteses sobre o crescimento de  $F(z)$ , o último integral de linha é limitado por

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \right| \leq \frac{R}{(R-|z|)} M(R) \rightarrow 0$$

quando  $R \rightarrow \infty$ . □

**ex:** Use a fórmula dos resíduos (13.9) para calcular as transformadas de Lapalace inversas de

$$\frac{1}{z-\alpha} \quad \frac{1}{(z-\alpha)^2} \quad \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)^2}$$

### 13.3 Função de transferência e resposta impulsiva

**Função de transferência e resposta impulsiva.** Seja  $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0I$  um operador diferencial linear com coeficientes constantes  $a_k$ 's. As soluções de uma equação diferencial ordinária linear homogénea  $(Lx)(t) = 0$  são, se o polinómio caraterístico  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  do operador diferencial não tem raízes repetidas, sobreposições de exponenciais  $e^{z_k t}$ , onde as frequências complexas  $z_k$ 's são as raízes de  $P(z)$ . Se o segundo membro, uma força externa  $f(t)$ , da equação diferencial não homogénea  $(Lx)(t) = f(t)$  é também uma sobreposição de exponenciais, então é claro que uma solução particular pode ser representada como sobreposição  $x(t) = \sum_k X_k e^{z_k t}$ , com certos coeficientes  $X_k$ . Isto sugere a ideia de procurar soluções num espaço de combinações lineares de exponenciais. Os espaço das combinações finitas sendo demasiado pequeno, podemos tentar combinações lineares "infinitas", ou seja, integrais. A conjectura é portanto que a solução de  $(Lx)(t) = f(t)$  é um integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} X(z) e^{zt} dz,$$

onde a função  $X(z)$  generaliza os coeficientes, e  $\gamma$  é um contorno no plano complexo. Se o integral é o integral da fórmula de Mellin (13.8), então  $X(z)$  é transformada de Laplace de  $x(t)$ .

Assumimos que também o segundo membro  $f(t)$  é um integral do género

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) e^{zt} dz.$$

Se aplicamos o operador diferencial  $L$ , e derivamos dentro do integral, descobrimos que, pelo menos formalmente, a equação diferencial  $(Lx)(t) = f(t)$  é equivalente a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P(z) X(z) e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) e^{zt} dz,$$

onde  $P(z)$  é o polinómio característico do operador diferencial  $L$ . Esta identidade sugere então que  $X(z) = F(z)/P(z)$ . Ou seja, transformamos uma equação diferencial no espaço dos tempos  $t$  numa equação algébrica, logo muito mais simples, no espaço das frequências complexas. É conveniente representar a “resposta” do sistema ao “input”  $F(z)$  como um produto

$$X(z) = F(z) H(z)$$

da força  $F(z)$  vezes um fator

$$H(z) = \frac{1}{P(z)}$$

chamado *função de transferência* do sistema. De acordo com a fórmula (13.4), o produto  $F(z) H(z)$ , traduzido no espaço dos tempos, determina uma resposta  $x(t)$  na forma de um produto de convolução

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) H(z) e^{zt} dz = \int_0^t f(s) h(t-s) ds$$

uma média pesada dos valores da força  $f(s)$  entre o instante inicial  $s = 0$  e o instante final  $s = t$ . O peso

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} H(z) e^{zt} dz$$

é chamado *resposta impulsiva* do sistema, e é tudo o que um engenheiro deve saber sobre um operador diferencial  $L$  para calcular as soluções das equações  $(Lx)(t) = f(t)$ .

**Equações lineares de segunda ordem.** Consideramos uma EDO linear de segunda ordem

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = f(t).$$

onde a força  $f(t)$  é uma função causal. Se  $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ , então a transformada de Laplace  $X(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} x(t) dt$  da solução  $x(t)$  com condições iniciais triviais  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$  satisfaz a equação algébrica  $P(z) X(z) = F(z)$  onde  $P(z) = z^2 + \alpha z + \beta$  é o polinómio característico do operador diferencial linear  $L = D^2 + \alpha D + \beta$ . A *função de transferência* é o quociente

$$H(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z^2 + \alpha z + \beta}$$

e a *resposta impulsiva* é a sua transformada de Laplace inversa, ou seja, uma função  $h(t)$  tal que

$$H(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt$$

Portanto,  $X(z) = H(z) F(z)$ , e a resposta do sistema pode ser representada como o produto de convolução  $x = h * f$ , ou seja,

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

**ex:** Mostre que a resposta impulsiva  $h(t)$  é a solução da equação homogênea  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$  com condição inicial  $h(0) = 0$  e  $\dot{h}(0) = 1$ .

**ex:** Mostre que a resposta impulsiva  $h(t)$  é a solução da equação diferencial  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = \delta(t)$  com condição inicial trivial.

**ex:** Resolva, usando a transformada de Laplace, os seguintes problemas de Cauchy:

$$\dot{x} + x = 0 \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = -e^t \quad \text{com } x(0) = \sqrt{2}$$

$$\ddot{x} + 4x = 3t \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = -1 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = 1 \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 4x = 1 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = t - [t] \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \delta(t - t_0) \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1$$

$$\ddot{x} + \pi^2 x = 3(1 - u_{t_0}(t)) \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

**Oscilações.** Considere as equações das *oscilações forçadas* e das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t) \quad \text{e} \quad \ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2 q = f(t).$$

**ex:** Determine a função de transferência e a resposta impulsiva dos dois sistemas.

**ex:** Determine a solução do problema de Cauchy com condição inicial  $q(0) = q_0$  e  $\dot{q}(0) = v_0$ , quando a força é

$$f(t) = f_0\delta(t - t_0) \quad f(t) = f_0u_{t_0}(t) \quad f(t) = f_0(1 - u_{t_0}(t)) \quad f(t) = f_0\cos(\gamma t).$$

**Circuito RL.** Considere a equação

$$L\dot{I} + RI = V,$$

que descreve a corrente  $I(t)$  num circuito RL alimentado com tensão  $V(t)$ .

**ex:** Determine a função de transferência do circuito.

**ex:** Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a  $V_0$ , é desligado no instante  $t_0 > 0$ , dada uma corrente inicial (lei de Ohm)  $I(0) = V_0/R$ .

**ex:** Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante  $t_0 > 0$  e fornece uma tensão constante  $V(t) = V_0u_{t_0}(t)$  ou alternada  $V(t) = V_0u_{t_0}(t)\sin(\omega t)$ , dada uma corrente inicial nula.

**Circuito RCL.** Considere a equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

que descreve a corrente  $I(t)$  num circuito RLC alimentado com tensão  $V(t)$ .

**ex:** Determine a função de transferência do circuito e uma fórmula integral para a corrente  $I(t)$ , dada uma corrente inicial  $I(0) = 0$  e  $\dot{I}(0) = 0$ .

**ex:** Determine a corrente quando o gerador, que inicialmente fornece uma tensão constante e igual a  $V_0$ , é desligado no instante  $t_0 > 0$ , dada uma corrente inicial estacionária  $I(0) = V_0/R$  e  $\dot{I}(0) = 0$ .

**ex:** Determine a corrente quando o gerador é ligado no instante  $t_0 > 0$  e fornece uma tensão constante  $V(t) = V_0 u_{t_0}(t)$  ou alternada  $V(t) = V_0 u_{t_0}(t) \sin(\omega t)$ , dada uma corrente inicial  $I(0) = 0$  e  $\dot{I}(0) = 0$ .

**Injeções.** A quantidade de medicamento que circula no sangue de um paciente decresce segundo o modelo exponencial  $\dot{x} = -\beta x$ , com  $\beta > 0$ . Uma injeção com dose  $a > 0$  no instante  $\tau$  é idealizada como sendo um impulso instantâneo  $a\delta_\tau(t)$ , e portanto

$$\dot{x} = -\beta x + a\delta_\tau(t).$$

**ex:** Determine a quantidade de medicamento  $x(t)$  que circula no sangue de um paciente que recebe uma série de injeções nos instantes  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , com doses  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivamente, dada uma quantidade inicial  $x(0) = 0$ .

**Impedância complexa.** A resposta estacionária (ou seja, para tempos grandes) de um circuito elétrico alimentado com tensão “harmônica” com intensidade  $V_0$  e frequência  $\omega$ , idealizado matematicamente por uma tensão complexa  $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$  (fisicamente, por exemplo pela parte real  $V_0 \cos(\omega t)$ ) é uma corrente também harmônica e do mesmo período, mas possivelmente desfasada,  $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$ , onde  $\varphi$  é uma fase. O quociente

$$Z := \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} e^{i\varphi}$$

que não depende do tempo, é chamado *impedância complexa* do circuito. Assim, a resposta do circuito, por quanto complexo (mas linear!), é descrita por uma “lei de Ohm”  $V(t) = Z \cdot I(t)$ , e é determinada apenas por um número complexo, um valor absoluto  $|Z| = V_0/I_0$ , chamado *reatância*, e uma fase  $\varphi$ .

Se o circuito é formado por apenas uma resistência  $R$ , então a lei de Ohm  $V = RI$  diz que a sua impedância é real e igual a

$$Z_R = R$$

Se o circuito é formado por apenas uma bobina de indutância  $L$ , então a lei  $V = L\dot{I}$  implica que  $V_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i\omega t}$ , e portanto a sua impedância é puramente imaginária

$$Z_L = i\omega L$$

e a sua fase é  $\varphi = \pi/2$ . Finalmente, se o circuito é formado por apenas uma capacidade de capacitância  $C$ , então a lei  $\dot{V} = I/C$  implica que  $i\omega V_0 e^{i\omega t} = (I_0/C) e^{i\omega t}$ , e portanto a sua impedância é também puramente imaginária

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

e a sua fase é  $-\pi/2$ . A linearidade da equação de um circuito *RLC* implica que a sua impedância é uma soma  $Z = Z_R + Z_L + Z_C$ . Mais em geral, se uns circuitos de impedância  $Z_1, Z_2, Z_3$  estão em séries, então o circuito resultante tem impedância  $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$ . Por outro lado, se uns circuitos de impedância  $Z_1, Z_2, Z_3$  estão em paralelo, então o circuito resultante tem impedância  $Z$  tal que  $1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + \dots$ .

Também interessante é a potência  $P = VI$  dissipada pelo circuito, ou melhor a sua média  $\langle P \rangle$  calculada ao longo de um período  $T = 2\pi/\omega$ . Neste cálculo é necessário usar as quantidades físicas, ou seja, as partes reais dos exponenciais complexos, os cosenos. Então a potência instantânea é  $P(t) = (V_0^2/|Z|) \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$ , e a sua média é

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{|Z|} \cos \varphi$$

Em particular, a potência dissipada é máxima quando  $\varphi = 0$  (por exemplo, apenas uma resistência), e é nula quando  $\varphi = \pm\pi/2$  (por exemplo, apenas uma bobina ou uma capacidade).

### 13.4 Teoremas abelianos e tauberianos

**Teoremas abelianos e tauberianos.** A transformada de Laplace  $F(z)$  é uma “suavização” de uma função  $f(t)$ , assim como o operador de Abel suaviza uma série  $\sum a_n$  ao produzir uma série de potências  $\sum a_n z^n$ . Se  $f(t)$  é limitada, é natural esperar uma relação entre o integral impróprio  $\int_0^\infty f(t) dt$  e a extensão analítica da transformada de Laplace  $F(z)$ , holomorfa no semi-plano direito  $\Re(z) > 0$ , na reta crítica  $\Re(z) = 0$ . O teorema de Abel 3.10 generaliza como

**Teorema 13.7.** *Seja  $f(t)$  uma função seccionalmente contínua e limitada. Se existe o integral impróprio  $\int_0^\infty f(t) dt = \alpha$ , então a transformada de Laplace  $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ , definida no semi-plano direito  $\Re(z) > 0$ , admite o limite*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \alpha$$

*Demonstração.* A menos de uma translação, podemos assumir que  $\alpha = \int_0^\infty f(t) dt = 0$ . Seja  $g(t) = \int_0^t f(s) ds$  a primitiva de  $f(t)$  que vale zero na origem. Sendo  $\alpha = 0$ , temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  e portanto  $g(t)$  é limitada, ou seja,  $|g(t)| \leq M$ . Em particular, a sua transformada de Laplace  $G(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t) dt$  é também definida no semi-plano  $\Re(z) > 0$ . Uma integração por partes mostra que

$$F(z) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-zt} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} (g(b)e^{-zb} - g(0)e^{-z0}) + z \int_0^b e^{-zt} g(t) dt = zG(z)$$

Podemos portanto representar  $F(z)$  como soma

$$F(z) = z \int_0^b e^{-zt} g(t) dt + z \int_b^\infty e^{-zt} g(t) dt$$

e estimar

$$|F(z)| \leq |z| \int_0^b e^{-\Re(z)t} |g(t)| dt + |z| \int_b^\infty e^{-\Re(z)t} |g(t)| dt$$

Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ , existe  $b \gg 1$  tão grande que  $|g(t)| < \varepsilon$  quando  $t \geq b$ . Então, se  $|z| < 1$ ,

$$|z| \int_b^\infty e^{-\Re(z)t} |g(t)| dt \leq \varepsilon |z| e^{-\Re(z)b} < \varepsilon$$

Por outro lado,

$$|z| \int_0^b e^{-\Re(z)t} |g(t)| dt \leq |z| bM < \varepsilon$$

se também  $|z| < \varepsilon/bM$ . □

**ex:** Calcule a transformada de Laplace da função de Shannon  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$ , calcule o seu limite quando  $z \rightarrow 0^+$ , e deduza o valor do integral impróprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

**Teoremas Tauberianos para transformada de Laplace.** O teorema de Tauber 3.11 admite uma série de generalizações, devidas a Hardy, Littlewood, Wiener, Ikehara, ... Nesta seção ilustramos a versão do teorema para transformada de Laplace, utilizada por Newman<sup>27</sup> para dar uma demonstração “simples” do *teorema dos números primos*, que diz que a cardinalidade  $\pi(x)$  dos primos  $p \leq x$  é assintótica a  $x/\log x$ .

<sup>27</sup>D.J. Newman, Simple analytic proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 693-696.

**Teorema 13.8.** *Seja  $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ , com  $z$  no semi-plano direito  $\Re(z) > 0$ , a transformada de Laplace da função seccionalmente contínua e limitada  $f(t)$ . Se  $F(z)$  extende a uma função holomorfa num aberto que contem o semi-plano fechado  $\Re(z) \geq 0$  (ou seja, se os seu pólos têm parte real negativa), então o integral impróprio  $\int_0^\infty f(t) dt$  é convergente e é igual ao valor da transformada de Laplace na origem, i.e.*

$$\int_0^\infty f(t) dt = F(0).$$

*Demonstração.* A primeira observação é que é suficiente provar o teorema no caso em que  $F(0) = 0$ . De fato, se  $F(0) = \alpha$ , podemos considerar a função  $g(t) = f(t) - \alpha e^{-t}$ , cuja transformada de Laplace é  $G(z) = F(z) - \frac{\alpha}{z+1}$  no semi-plano  $\Re(z) > 0$ . Então  $\int_0^\infty g(t) dt = 0$  é equivalente a  $\int_0^\infty f(t) dt = \alpha$  (e as condições do teorema são igualmente satisfeitas para as duas funções).

Assumimos portanto que  $F(z) = 0$ . Para  $T > 0$ , as funções

$$F_T(z) := \int_0^T e^{-zt} f(t) dt$$

são inteiras (por ser integrais definidos de funções inteiras dependentes de um parâmetro), e valem  $F_T(0) = \int_0^T f(t) dt$  na origem. O que temos que provar é portanto que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_T(0) = F(0) = 0$$

De acordo com Newman, dado  $R > 0$ , definimos a função inteira

$$N_{R,T}(z) := e^{Tz} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right)$$

O produto  $F_T(z) N_{R,T}$  é uma função inteira, em particular holomorfa em qualquer disco  $B_R(0)$ . Logo, pela fórmula de Cauchy,

$$F_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_R} F_T(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z}$$

onde  $S_R = \partial B_R(0)$  é a circunferência de raio  $R$  centrada da origem. Por outro lado, pelas hipóteses o teorema, o produto  $F(z) N_{R,T}(z)$  é holomorfo num aberto que contem o semi-plano fechado  $\Re(z) \geq 0$ , e portanto no hemi-disco direito  $B_R^+ = B_R(0) \cap \{\Re(z) \geq 0\}$ , cuja fronteira é a reunião da semi-circunferência direita  $S_R^+ = S_R(0) \cap \{\Re(z) \geq 0\}$  e o segmento vertical  $L_R := [-iR, iR]$ . Sendo  $F(0) = 0$ , o produto  $F(z) N_{R,T}(z) / z$  tem uma singularidade removível na origem. Pelo teorema de Cauchy

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R^+} F(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_R^+} F(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} F(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z}.$$

Portanto, podemos representar a diferença entre  $F_T(0)$  e  $F(0) = 0$  como soma dos integrais

$$\begin{aligned} F_T(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_R^+} (F_T(z) - F(z)) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{S_R^-} F_T(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} F(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (13.10)$$

onde  $S_R^-$  é a semi-circunferência esquerda  $S_R(0) \cap \{\Re(z) \leq 0\}$ . Estimamos estes três integrais separadamente.

Na circunferência  $S_R$ , onde  $z = Re^{i\theta}$ , o produto da função de Newman  $N_{R,T}(z)$  vezes  $1/z$  é limitado por

$$\left| N_{R,T}(z) \frac{1}{z} \right| \leq e^{TR \cos \theta} \frac{1}{R} |e^{-i\theta} + e^{i\theta}| \leq e^{TR \cos \theta} \frac{2 |\cos \theta|}{R} \quad (13.11)$$

Pela hipótese, a função  $f(t)$  é limitada, ou seja, existe  $M > 0$  tal que  $|f(t)| \leq M$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto, se  $z = Re^{i\theta}$  e  $\Re(z) > 0$ ,

$$|F_T(z) - F(z)| = \left| \int_T^\infty e^{-zt} f(t) dt \right| \leq M \int_T^\infty |e^{-zt}| dt = \frac{M}{R \cos \theta} e^{-TR \cos \theta}$$

Então, sendo  $\pi R$  o comprimento da semi-circunferência, o primeiro integral da (13.10) é limitado por

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_R^+} (F_T(z) - F(z)) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{M}{R} \quad (13.12)$$

Por outro lado, se  $z = Re^{i\theta}$  e  $\Re(z) < 0$ , então

$$|F_T(z)| = \left| \int_0^T e^{-zt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^T |e^{-zt}| dt = \frac{M}{R |\cos \theta|} e^{-TR \cos \theta}$$

Usando mais uma vez a (13.11) temos que também o segundo integral da (13.10) é limitado por

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_R^-} F_T(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{M}{R} \quad (13.13)$$

Parametrizando o terceiro integral por  $z = it$ , com  $-R \leq t \leq R$ , observamos que é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} F(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R F(it) e^{iTt} \left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R G_R(t) e^{iTt} dt \end{aligned}$$

onde  $G_R(t) := F(it)(1 - t^2/R^2)/it$  é o valor da função  $F(z)(1 + z^2/R^2)/z$  quando  $z = it$  está no eixo imaginário. Sendo esta uma função holomorfa numa vizinhança de  $L_R$ , portanto infinitamente diferenciável, existe uma constante  $C_R > 0$  (que depende apenas de  $R$ ) tal que

$$|G_R(t)| \leq C_R \quad \text{e} \quad |G'_R(t)| \leq C_R$$

para todo  $|t| \leq R$ . Integrando por partes,

$$\int_{-R}^R G_R(t) e^{iTt} dt = \frac{1}{iT} \left( G_R(R) e^{iTR} - G_R(-R) e^{-iTR} + \int_{-R}^R G'_R(t) e^{iTt} dt \right)$$

vemos que

$$\left| \int_{-R}^R G_R(t) e^{iTt} dt \right| = \frac{1}{T} (2C_R + 2RC_R)$$

Portanto, o terceiro integral na (13.10) é limitado por

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} F(z) N_{R,T}(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{K_R}{T} \quad (13.14)$$

onde  $K_R = 2C_R(1 + R)/2\pi$  é uma constante que apenas depende de  $R$ .

Pelas (13.12), (13.13) e (13.14),

$$|F_T(0)| \leq \frac{2M}{R} + \frac{K_R}{T}$$

Para cada  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher primeiro  $R$  tão grande que  $2M/R < \varepsilon/2$ , e depois  $T$  tão grande que  $K_R/T < \varepsilon/2$ , assim que  $|F_T(0)| < \varepsilon$ . Isto prova que  $\lim_{T \rightarrow \infty} F_T(0) = 0$ .  $\square$

(espaço dos tempos  $t \geq 0$ , com  $|f(t)| \leq Me^{\mu t}$ ) (espaço das frequências  $z$ , com  $\Re(z) > \mu$ )

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{zt} F(z) dz$$

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$$

(linearidade)	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(s) + \mu G(s)$
(homotetias no espaço dos tempos)	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F(s/\lambda)$
(translações no tempo, retardo)	$f(t - \tau)u(t - \tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$
(translações na frequência)	$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(s + \alpha)$
(funções periódicas)	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
(convolução)	$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
(integração no tempo)	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s} F(s)$
(integração na frequência)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_m^\infty F(s) ds$
(derivação no tempo)	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$\ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f^{(k)}(t)$	$s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$
(derivação na frequência)	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
(salto unitário em $\tau \geq 0$ )	$u_\tau(t) = u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
(impulso unitário em $\tau \geq 0$ )	$\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
(potências inteiras)	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
(outras potências, $q \geq 0$ )	$t^q$	$\frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$
(crescimento/decaimento exponencial)	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
(potências com decaimento)	$e^{-\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
(potências com decaimento retardadas)	$e^{-\alpha(t-\tau)}(t - \tau)^n u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s + \alpha)^{n+1}}$
(coseno e seno)	$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$	$\frac{1}{s - i\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(coseno e seno hiperbólicos)	$\cosh(\beta t)$ e $\sinh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$ e $\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$
(oscilações amortecidas)	$e^{-\alpha t} e^{i\omega t} = e^{-\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$	$\frac{s + \alpha + i\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

## 14 Avaliação assintótica de integrais

25 jan 2021

A resolução de muitos problemas de física-matemática (soluções de equações diferenciais, transformadas de Fourier e Laplace, ...) conduz à necessidade de estimar integrais do género

$$L(\lambda) = \int_{\gamma} g(z) e^{-\lambda f(z)} dz$$

onde  $\gamma$  é um caminho no plano complexo (por exemplo, um intervalo da reta real) e  $f$  e  $g$  são funções dadas, reais ou complexas. Os integrais são, na maioria das vezes, impossíveis de calcular exatamente. Tipicamente estamos interessados em grandes valores de  $\lambda$ , ou melhor na assintótica da função  $L(\lambda)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Propagadores ou integrais de Feynman.** Em mecânica quântica ou em teoria dos campos, por exemplo quando o integral é um “propagador”

$$\langle q' | e^{-itH/\hbar} | q \rangle \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\frac{p^2}{2m\hbar} + i\frac{q' - q}{\hbar} p} dp$$

o parâmetro  $\lambda$  é o inverso da “constante de Planck”  $\hbar$ . O limite quando  $\hbar \rightarrow 0$  corresponde ao “limite semi-clássico”.

**Funções de partição.** Em mecânica estatística, por exemplo quando o integral é uma função de partição

$$Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n} \simeq \int e^{-\beta E(x)} dx$$

o parâmetro é  $\beta = 1/kT$ , o inverso da temperatura absoluta vezes a constante de Boltzmann. O limite quando  $\beta \rightarrow \infty$  corresponde a temperaturas próximas do zero absoluto.

### 14.1 Fórmula de Laplace

**Integrais de Laplace.** Quando o argumento do exponencial é uma função real o integral

$$\int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx$$

é dito *integral de Laplace*. É claro que quando  $\lambda$  é grande o integral tende a seleccionar os valores menores de  $f(x)$ .

Assumimos que  $f(x)$  e  $g(x)$  sejam suficientemente regulares, por exemplo, infinitamente diferenciáveis, e que  $f(x)$  assume um único mínimo global num ponto  $x_0$  no interior do intervalo  $(a, b)$ . A menos de uma translação, podemos assumir que  $x_0 = 0$ , onde o mínimo é  $f(0) = m$  e a segunda derivada é  $c := f''(0) > 0$ . Então podemos considerar a aproximação  $f(x) \simeq m + \frac{1}{2}cx^2$  numa vizinhança de raio  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno em torno de 0, e estimar

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx &\simeq e^{-m\lambda} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\lambda cx^2} g(x) dx \\ &\simeq e^{-m\lambda} g(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\lambda cx^2} dx \\ &\simeq e^{-m\lambda} g(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda cx^2} dx \\ &= e^{-m\lambda} g(0) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c\lambda}} \end{aligned}$$

onde, no último passo, calculamos o integral gaussiano completo.

Estes passos podem ser justificados rigorosamente, e os erros estimados. O resultado é a seguinte fórmula assintótica de Laplace <sup>28</sup>.

<sup>28</sup>P.S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, Oeuvres complètes 7, Gauthier-Villars, 1886.

**Teorema 14.1** (Laplace). *Se  $f(x)$  assume um mínimo absoluto em um único ponto  $x_0 \in (a, b)$ , onde  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , então*

$$\int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx = e^{-\lambda f(x_0)} \left( C/\sqrt{\lambda} + \mathcal{O}(1/\lambda) \right)$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , onde a constante  $C$  é

$$C = \sqrt{2\pi} \frac{g(x_0)}{\sqrt{f''(x_0)}}.$$

*Demonstração.* Podemos assumir que  $x_0 = 0$ . Sejam  $m = f(0)$  e  $f''(0) = c > 0$ . A estimação inicial, em que substituímos  $f(x) - m$  com a parte quadrática  $cx^2/2$  num pequeno intervalo em torno de 0, pode ser justificada usando uma mudança de variável tal que  $f(x) - m = \frac{1}{2}cy^2$ . Sendo  $f(x) - m = \frac{1}{2}cx^2(1 + \mathcal{O}(x))$ , basta definir  $y = x\sqrt{2(f(x) - m)/cx^2}$ , e observar que então  $y = x\sqrt{1 + \mathcal{O}(x)} = x + \mathcal{O}(x^2)$ . Consequentemente,  $x \mapsto y(x)$  é um difeomorfismo de uma vizinhança suficientemente pequena de 0, com derivada  $dy/dx(0) = 1$ , e inversa  $y \mapsto x(y)$  tal que  $x(y) = y + \mathcal{O}(y^2)$ . Então podemos estimar

$$\int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx \simeq \int_{\delta_-}^{\delta_+} g(x) e^{-\lambda f(x)} dx = e^{-m\lambda} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\lambda cy^2} g(x(y)) dy$$

onde  $\delta_{\pm} = y^{-1}(\pm\varepsilon)$  (sendo  $\delta_-$  negativo e  $\delta_+$  positivo) e  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno. O erro introduzido neste primeiro passo é composto pelos integrais

$$\int_a^{\delta_-} g(x) e^{\lambda f(x)} dx \quad \text{e} \quad \int_{\delta_+}^b g(x) e^{\lambda f(x)} dx,$$

Nestas regiões,  $f(x)$  é superior ou igual a algum  $M > m$ , e portanto a soma dos módulos destes integrais é limitada por  $e^{-\lambda M}$  vezes o integral  $\int_a^b |g(x)| dx$ . Assim, o erro é da ordem de  $\mathcal{O}(e^{-\lambda M})$ .

No segundo passo, usamos a aproximação linear  $g(x(y)) \simeq g(0) + \mathcal{O}(y)$ , e portanto introduzimos um erro da ordem de  $e^{-m\lambda}$  vezes o integral

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\lambda cy^2} |y| dy.$$

A substituição  $t = y^2$  mostra que este integral é limitado por  $2/\lambda c$ , logo da ordem de  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ .

No terceiro passo, substituímos o integral Gaussiano completo ao integral no intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . O erro introduzido é da ordem de  $e^{-m\lambda}$  vezes o dobro do integral

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda cy^2} dy.$$

É elementar verificar que este integral é da ordem  $\mathcal{O}(e^{-p\lambda})$  para algum  $p > c\varepsilon^2/2 > 0$ . □

Em particular, em primeira ordem a fórmula de Laplace diz que

$$\boxed{\int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx \sim \sqrt{2\pi} \frac{g(x_0)}{\sqrt{f''(x_0)}} e^{-\lambda f(x_0)} \lambda^{-1/2}} \quad (14.1)$$

**Método do “steepest descent”.** Em geral, se  $f(z)$  e  $g(z)$  são funções holomorfas, a ideia de Riemann<sup>29</sup> e de Debye<sup>30</sup> é usar o teorema de Cauchy para deformar o contorno de integração até poder aplicar o teorema de Laplace (ou seja, encontrar um contorno onde a parte imaginária de  $f(z)$  seja constante e onde a parte real assuma um mínimo absoluto).

<sup>29</sup>B. Riemann, Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita. Unpublished note, 1863.

<sup>30</sup>P. Debye, Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index, *Mathematische Annalen* **67** (1909), 535-558.

**Aproximação de Stirling.** A função Gama é definida pelo integral impróprio

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (14.2)$$

no semi-plano direito  $\Re(z) > 0$  do plano complexo. Uma integração por partes mostra que a função Gama satisfaz a equação funcional

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

com condição inicial  $\Gamma(1) = 1$ . Isto significa que  $\Gamma$  estende o factorial, ou seja, que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

se  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . A mudança de variável  $t = nx$  no integral que calcula  $n!$  mostra que

$$n! = n^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-n(x-\log x)} dx.$$

O mínimo da função  $f(x) = x - \log x$  no intervalo  $(0, \infty)$  é o ponto  $x = 1$ , onde  $f(1) = f''(1) = 1$ . A fórmula de Laplace (14.1) implica a *aproximação/fórmula de Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Ou seja,  $n!$  cresce como  $\exp((n+1/2) \ln n - n)$ .

**ex:** Mostre (por exemplo, usando a substituição  $u = \sqrt{t}$  no integral (14.2)), que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

e calcule  $\Gamma(3/2)$ .

**ex:** Mostre, usando a mudança de variável  $x = t^n$ , que se  $n \geq 3$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^n} dt = \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

**ex:** Estime o valor do integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\lambda \cos t} dt$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

## 14.2 Integrais oscilatórios e princípio da fase estacionária

**Integrais oscilatórios.** Quando o argumento do exponencial é imaginário puro, podemos pensar que é da forma  $i\lambda\varphi(x)$  com  $\varphi(x)$  real, uma “fase”, e o integral correspondente (dito de tipo Fourier)

$$\int_a^b a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx \quad (14.3)$$

é “oscilatório”. A função  $a(x)$  representa uma “amplitude”. É conveniente tratar o caso de amplitudes no espaço de Schwartz ou, melhor, no espaço das *funções teste*  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , as funções infinitamente diferenciável com suporte compacto (e neste caso podemos assumir que os limites de integração são  $\pm\infty$ ).

**Cancelações.** Um caso trivial é uma fase constante, por exemplo  $\varphi(x) = 1$ . Então o integral é simplesmente  $e^{i\lambda}$  vezes o integral  $\int a(x) dx$  da amplitude  $a(x)$  (que assumimos integrável!). Em particular, o seu módulo é limitado pela norma  $\|a\|_1 := \int |a(x)| dx$ .

Se a fase é linear, por exemplo  $\varphi(x) = x$ , então o integral é a transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda x} dx = (\mathcal{F}a)(\lambda)$$

da amplitude  $a(x)$ . Pelo lema de Riemann-Lebesgue 8.3,  $(\mathcal{F}a)(\lambda) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . De fato, se a amplitude é uma função teste  $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , então a sua transformada de Fourier decai mais rápido de qualquer potência, ou seja, é  $(\mathcal{F}a)(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-n})$  para todo  $n \geq 0$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$  (isto significa que para todo  $n \geq 0$  o seu módulo é limitado por  $|(\mathcal{F}a)(\lambda)| \leq C\lambda^{-n}$ , onde a constante  $C = C_{a,n}$  depende das primeiras  $n$  derivadas de  $a(x)$ ). Mas uma função é praticamente linear numa vizinhança de um ponto que não é crítico. Uma integração por partes mostra que se  $\varphi'$  é diferente de zero no suporte (compacto) de  $a(x)$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} (a(x)/\varphi'(x))' e^{i\lambda\varphi(x)} dx$$

Iterando, temos o

**Teorema 14.2** (princípio da fase não-estacionária). *Sejam  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  e  $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ . Se  $\varphi(x)$  não tem pontos críticos no suporte de  $a(x)$ , então para todo  $n \geq 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \mathcal{O}(\lambda^{-n})$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Princípio da fase estacionária.** De acordo com o princípio da fase não-estacionária 14.2, esperamos que os contributos principais ao integral oscilatório (14.3) sejam devidos aos pontos críticos de  $\varphi(x)$ , os pontos onde a fase é “estacionária”. Numa vizinhança de um ponto crítico, que podemos assumir ser  $x_0 = 0$ , onde a fase é  $\varphi(x) \simeq \varphi(0) \pm \frac{1}{2}cx^2$  com  $c = |\varphi''(0)|$ , podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx &\sim a(0) e^{i\lambda\varphi(0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\pm i\lambda cx^2/2} dx \\ &\sim a(0) e^{i\lambda\varphi(0)} \sqrt{2/c} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\pm i\lambda x^2} dx \end{aligned}$$

O último integral é essencialmente um integral de Fresnel (calculado em (4.13))

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\pm i\lambda x^2} dx \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda x^2/\hbar} dx = \sqrt{\pi/\lambda} e^{\pm i\pi/4}$$

É possível provar, como no caso dos integrais tipo Laplace (que diferem destes por uma rotação de Wick), que os erros introduzidos por estas aproximações são pequenos comparados com a ordem de grandeza assintótica calculada  $\sim \lambda^{-1/2}$ . O resultado é o

**Teorema 14.3** (princípio da fase estacionária). *Se a amplitude  $a(x)$  tem suporte compacto e se a fase  $\varphi(x)$  admite um único ponto crítico não degenerado  $x_0$  no suporte de  $a(x)$ , então*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx \sim C e^{i\lambda\varphi(x_0)} \lambda^{-1/2}}$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , onde a constante  $C$  é dada por

$$C = \sqrt{2\pi} \frac{a(x_0)}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{\pm i\pi/4}$$

e  $\pm$  denota o sinal de  $\varphi''(x_0)$ .

**Assimptótica das funções de Bessel.** Uma aplicação típica é a assimptótica quando  $x \rightarrow \infty$  da função de Bessel  $J_0(x)$ , que resolve a equação diferencial

$$xy'' + y + xy = 0$$

É possível mostrar (por exemplo, usando a técnica da transformada de Laplace) que  $J_0(x)$  é dada pelo integral oscilatório

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$$

O princípio da fase estacionária 14.3 implica que

$$J_0(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cos(x - \pi/4)$$

quando  $x \rightarrow \infty$ .

### 14.3 Aproximação semi-clássica

Uma das aplicações físicas mais importantes do princípio da fase estacionária é ao estudo da aproximação semi-clássica da mecânica quântica.

**Soluções semi-clássicas da equação de Schrödinger.** O problema é calcular os níveis de energia  $E$ , e possivelmente as soluções aproximadas, da equação de Schrödinger estacionária

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(x) \psi = E \psi \quad (14.4)$$

para a função de onda  $\psi(x)$ , onde  $x$  é uma variável real espacial. O parâmetro pequeno é a constante de Planck reduzida  $\hbar = h/2\pi$ , e a expectativa é que se as soluções sejam próximas das trajetórias clássicas.

A partícula livre, em um potencial nulo (ou constante), tem soluções oscilantes proporcionais a

$$\psi_{\pm}(x) = A e^{\pm i p x / \hbar},$$

com momento  $p = \sqrt{2m(E - V)}$  e  $V < E$ . Outras soluções são ilimitadas, logo não físicas.

Consideramos agora um potencial  $V(x)$  cuja variação é lenta se comparada com o comprimento de onda  $\hbar/p$  (e portanto não tratamos configurações com momento pequeno). assumimos também que o potencial cresce  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , assim que as trajetórias clássicas com qualquer energia  $E$  são confinadas numa região limitada onde  $V(x) \leq E$ .

O exemplo básico é o oscilador harmônico, com potencial  $V(x) = kx^2/2$ . As trajetórias clássicas com energia positiva são elipses no espaço de fases, definidas pelos conjuntos de nível da energia  $E = p^2/2m + \omega q^2/2$ , e o movimento tem frequência  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

A ideia principal é fazer a “conjetura” (os alemães dizem *ansatz*, e os ingleses *educated guess*)

$$\psi(x) = A(x) e^{iS(x)/\hbar}$$

onde  $S(x)$  e  $A(x)$  são uma fase e uma amplitude variáveis. Ao substituir a expressão da segunda derivada

$$\psi'' = \left( A'' + \frac{i}{\hbar} (2A'S' + AS'') - \frac{1}{\hbar^2} AS'^2 \right) e^{S/\hbar}.$$

na equação de Schrödinger (14.4), e ao separar a parte real da parte imaginária, deduzimos que a fase e a amplitude satisfazem as duas equações

$$(S')^2 = 2m(E - V) + \hbar^2 \frac{A''}{A} \quad \text{e} \quad 2A'S' + AS'' = 0$$

A aproximação semi-clássica, também chamada aproximação WKB<sup>31 32 33</sup>, consiste em ficar com a primeira ordem em  $\hbar$ , logo desprezar o termo de ordem  $\hbar^2$ . Se definimos o momento local

$$p(x) := \pm \sqrt{2m(E - V(x))}$$

obtemos a equação de Hamilton-Jacobi (também chamada equação eikonal)

$$(S')^2 = p^2 \quad (14.5)$$

pela fase, e a equação de transporte (homogénea)

$$2S'A' + S''A = \frac{1}{A} \frac{d}{dx} (S' A^2) = 0 \quad (14.6)$$

pela amplitude, onde a derivada da fase é uma velocidade. Naturalmente, a aproximação é razoável se  $\hbar^2 A''/A \ll p^2$ , ou seja, se a amplitude  $A(x)$  varia sensivelmente apenas em intervalos grandes se comparados com o comprimento de onda local  $\hbar/p$ .

A equação eikonal (14.5) diz que o incremento da fase de uma partícula que viaja com energia  $E$  do ponto  $q_0$  ao ponto variável  $q$  é dado pela ação, o integral

$$S(q) = \int_{q_0}^q p(x) dx$$

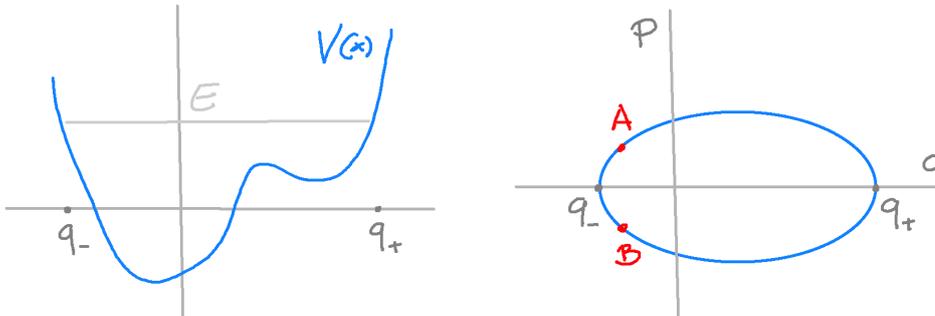
(uma notação correta deve incluir a posição inicial  $q_0$  e o valor da energia  $E$ , naturalmente). A equação de transporte (14.6), juntamente com a eikonal, então implica que o produto  $pA^2$  é constante, portanto que a amplitude da função de onda é inversamente proporcional à raiz quadrada do momento local. Assim,

$$\psi(q) \simeq \frac{C}{|p(q)|^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar} S(q)} \quad (14.7)$$

para alguma constante de normalização  $C$ , que faz a probabilidade total  $\int |\psi(q)|^2 dq = 1$ .

A “geometria simplética” (uma área exótica e lindíssima da física-matemática contemporânea, motivada exatamente por este género de questões) interpreta estes dados, fase a amplitude da função de onda semi-clássica, como uma “sub-variedade lagrangiana projetável” do espaço das fases e uma “meia-densidade” definida nela que é invariante pelo fluxo clássico, respetivamente.

**Índice de Maslov e quantização semi-clássica** Os cálculos feitos até agora falham nos pontos de virada da trajetória clássica, os pontos  $q_{\pm}$  onde  $E = V$ , e onde o momento se anula e portanto  $A''/A$  não é desprezável comparado com o comprimento de onda local.



<sup>31</sup>G. Wentzel, Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik, *Zeitschrift für Physik* **38** (1926), 518-529.

<sup>32</sup>H.A. Kramers, Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung, *Zeitschrift für Physik* **39** (1926), 828-840.

<sup>33</sup>L. Brillouin, La mécanique ondulatoire de Schrödinger: une méthode générale de résolution par approximations successives, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **183** (1926), 24-26.

Como observado por Maslov<sup>34</sup>, esta singularidade é só aparente, no sentido em que a trajetória clássica é tão regular como em qualquer outro instante. O que acontece é que apenas estamos a olhar para a coordenada errada no espaço de fases, que é erfeitamente simétrico nas coordenadas  $q$  e  $p$  (a menos de um sinal). Se observamos a trajetória usando o momento, os pontos de viragem são pontos regulares de  $p(t)$ . A passagem da representação da posição à representação do momento, e vice-versa, é feita pela transformada de Fourier e a sua inversa, de acordo com

$$\widehat{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(q) e^{-ipq/\hbar} dq \quad \text{e} \quad \psi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \widehat{\psi}(p) e^{ipq/\hbar} dp$$

A ideia de Maslov é ent ao a seguinte: passar à representação do momento logo antes do ponto de virada, e voltar à representação da posição logo depois do ponto de virada. Calcular a transformada de Fourier de (14.7) apenas antes do ponto de virada  $q_-$ , por exemplo o ponto  $B$  da figura, significa calcular o integral oscilatório

$$\widehat{\psi}_B(p) \simeq \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{1}{|p(q)|^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(S(q)-pq)} dq$$

O ponto estacionário da fase é a solução de  $S'(q) - p = 0$ , e neste ponto  $q$  a segunda derivada da fase é  $S''(q) = p'(q) < 0$ , pois  $p$  decresce quando  $q$  cresce ao longo da trajetória clássica. De acordo com o princípio da fase estacionária 14.3, com  $\lambda = 1/\hbar$ , o integral é assimpótico a

$$\widehat{\psi}_B(p) \sim \frac{C}{|p(q)p'(q)|^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(S(q)-pq)} e^{-i\pi/4}$$

A fase desta função de onda é portanto a *transformada de Legendre* da ação, definida por

$$S^*(p) := \sup_q (pq - S(q))$$

A constante de normalização da função de onda é dividida pela raiz quadrada de  $p(q)p'(q) = \frac{1}{2}(p^2)'(q)$ , proporcional a  $V'(q)$ , que é diferente de zero numa vizinhança do ponto de virada. Uma vez passado  $q_-$ , podemos voltar à representação da posição, por exemplo no ponto  $A$  da figura. isto significa calcular a transformada de Fourier inversa

$$\psi(q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{C}{|p(q)p'(q)|^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(pq-S^*(p))} e^{-i\pi/4} dp$$

Mas este é o mesmo cálculo que acabamos de fazer, a menos de substituir  $(q, p) \mapsto (-p, q)$ . O resultado é

$$\psi_A(q) \simeq \frac{C}{|p(q)|^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}S(q)} e^{-i\pi/2}$$

porque a transformada de Legendre é uma involução (é a sua própria inversa), o sinal da fase é  $\tilde{S}''(p) = -q'(p) < 0$  numa vizinhança de  $A$ , e  $p'(q)q'(p) = 1$ . Finalmente, descobrimos que ao passar um ponto de virada a função de onda ganha uma fase  $-\pi/2$ . Como uma trajetória clássica fechada em dimensão dois tem exatamente  $m = 2$  pontos de virada, a fase semiclássica deve ganhar uma fase  $-m\pi/2 = -\pi$  em cada volta. Mas uma função de onda tem apenas um valor, independentemente do número de voltas que imaginamos fazer. Isto significa que o incremento  $-m\pi/2$  que calculamos deve ser compensado pelo incremento da fase, a ação  $S = \frac{1}{\hbar} \oint p dq$ , ao longo de cada revolução. Consequentemente, a função de onda (14.7) deve satisfazer a *condição de quantização semi-clássica*

$$\boxed{\oint p dq = h \left( n + \frac{m}{4} \right)}$$

onde  $n$  é um inteiro e  $m$  é um inteiro par, chamado *índice de Maslov* da trajetória periódica (que em dimensão dois é  $m = 2$ ). O integral de linha, o valor da ação ao longo de uma trajetória clássica periódica, é a área limitada pela órbita fechada no espaço de fases. Assim, a condição de quantização diz que esta área deve ser igual, em unidades de Planck, a um inteiro mais uma “fase topológica”  $m/4$ .

<sup>34</sup>V.P. Maslov, *Théorie des Perturbations et Méthodes Asymptotiques*, Paris, 1972.

**Energia do oscilador harmónico quântico** No caso do oscilador harmónico, é fácil calcular que a área limitada por uma órbita fechada de energia  $E$  no espaço de fases é  $2\pi E/\omega$ . Consequentemente, os níveis de energia do oscilador são quantizados de acordo com

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Misteriosamente, apesar de todas as aproximações e ingenuidades feitas nestes cálculos, estes são mesmo os níveis de energia do verdadeiro oscilador harmónico quântico!

## Referências

- [Ah78] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [Ap76] T.M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [Ar04] V.I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS, 2004.
- [Ba09] L. Barreira, *Análise Complexa e Equações Diferenciais*, IST Press, 2009.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Bi80] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, MIR, 1980.
- [Ca95] H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Dover, 1995. [*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961]
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [Co73] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, GTM **11**, Springer-Verlag, 1973.
- [CH53] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, 1953. [*Methoden der mathematischen Physik*, Springer, 1924.]
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000.]
- [Er56] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover, 1956.
- [FLS63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Fo92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Society, 1992.
- [Gam01] T.W. Gamelin, *Complex analysis*, Springer, 2001.
- [GdF87] D. Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1987.
- [Ha49] G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford University Press, 1949.
- [HC89] D. Hilbert and R. Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, Verlag, 1924 [*Methods of mathematical physics*, Wiley-VCH, 1989].
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press, 1959.
- [KF83] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1983.
- [KKR62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics, Mechanics*, McGraw-Hill, 1962.
- [Io05] V. Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [La03] S. Lang, *Complex Analysis*, GTM **103**, Springer Verlag, 2003.
- [LC72] M. Laurentiev et B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, MIR, 1972.
- [LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.

- [LN96] A. Lins Neto, *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.
- [MF05] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953 [Feshbach Publishing, 2005].
- [MG14] P. Martins Girão, *Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais*, IST Press, 2014.
- [MH99] J.E. Marsden and M.J. Hoffmann, *Basic complex analysis*, W.H. Freeman, 1999.
- [Na06] P.J. Nahin, *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*, Princeton University Press, 2006.
- [O'N99] P.V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1999.
- [Pe05] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Vintage Books, 2005.
- [Pi91] M.A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.
- [PPZ17] M. Petrini, G. Pradisi and A. Zaffaroni, *A Guide to Mathematical Methods for Physicists, with Problems and Solutions*, World Scientific, 2017.
- [PPZ18] M. Petrini, G. Pradisi and A. Zaffaroni, *A Guide to Mathematical Methods for Physicists, Advanced Topics and Applications*, World Scientific, 2018.
- [RB12] H.J.J. van Roessel and J.C. Bowman, [Asymptotic Methods](#), University of Alberta, Edmonton, Canada, 2012.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Third Edition, Cambridge University Press, 2006.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Si63] G.F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, Singapore 1963.
- [Sm03a] G. Smirnov, *Análise Complexa e Aplicações*, Escolar Editora, 2003.
- [Sm03b] G. Smirnov, *Curso de Análise Linear*, Escolar Editora, 2003.
- [SS03a] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis I, Princeton University Press, 2003.
- [SS03b] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, 2003.
- [St08] W. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2nd ed, Wiley, 2008.
- [ST71] A.G. Svesnikov and A.N. Tichonov, *The Theory of Functions of a Complex Variable*, MIR, 1971.
- [TS81] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*, MIR, 1981.

# Índice

- ação, 123, 222
- aberto, 22
- aderência, 22
- argumento, 11
  - principal, 11
- auto-correlação, 164
- automorfismo conforme, 187
  
- biângulo, 194
  
- caminho, 27
- campo
  - irrotacional, 179
  - solenoidal, 179
- circunferência, 15
- circunferência unitária, 10
- coeficientes de Fourier, 132
- compacto, 23
- condições
  - de Cauchy-Riemann, 29
- conexo, 28
- conjugação, 9
- continuidade uniforme, 25
- contorno, 58
- contrátil, 69
- convergência
  - absoluta, 39
  - condicional, 40
  - uniforme, 41
- convexo, 28, 70
- corda vibrante, 107
- crescimento exponencial, 200
- curva, 27
  - de Jordan, 71
  
- delta de Dirac, 121, 150, 161
- derivada complexa, 26
- desigualdade
  - de Bessel, 132
  - de Cauchy, 81
  - de Cauchy-Schwarz, 131
- disco
  - de convergência, 43
- disco unitário, 15
- discriminante, 10
  
- energia, 109, 114
  - de Dirichlet, 125
- equação
  - de Schrödinger, 221
  - de calor, 110
  - de Cauchy-Riemann, 29
  - de Hamilton-Jacobi, 222
  - de Laplace, 122
  - de onda, 103
  - de Poisson, 121
  - de Schrödinger, 119
  - de Schrödinger estacionária, 120
  - de transporte, 118, 222
  - eikonal, 222
- equações de Euler-Lagrange, 123
- equivalência conforme, 187
- esfera de Riemann, 20
- espaço
  - $L^2(\mathbb{R})$ , 165
  - de Schwartz, 159
- espectro, 157
- exponencial, 12, 50
- exterior, 71
  
- fórmula
  - de Barrow, 56
  - de d'Alembert, 104, 169
  - de de Moivre, 13
  - de Euler, 11
  - de Hadamard, 43
  - de Mellin, 206
  - de Poincaré, 67
  - de Poisson, 181
  - de Schwarz, 182
  - de Stirling, 219
  - do somatório de Poisson, 172
  - do valor médio, 86
  - integral de Cauchy, 77
- família
  - equicontínua, 197
  - normal, 197
- fechado, 22
- fenômeno de Gibbs, 149
- fronteira, 22
  - parabólica, 111
- função
  - de transferência, 210
- função
  - analítica, 44
  - causal, 200
  - de Green, 196
  - de Heaviside, 161
  - de onda, 221
  - escada, 54
  - Gama, 219
  - geradora, 45
  - geradora de probabilidades, 48
  - harmônica, 103, 122, 177
  - hiperbólica, 51
  - holomorfa, 26
  - meromorfa, 92
  - racional, 36

- seccionalmente regular, 144
  - teste, 126, 219
  - trigonométrica, 51
- gaussiana, 71, 162
- grau, 33, 37
- homotopia, 68
- identidade aproximada, 150, 162
- índice, 78
  - de Maslov, 223
- integral
  - de Bromwich, 206
  - de contorno, 59
  - de Fresnel, 72
  - de Laplace, 217
  - de Riemann, 55
  - tipo Fourier, 219
- interior, 71
- inversão, 37
- laço, 28
- lagrangiana, 123
- laplaciano, 103, 122
- lema
  - de Abel, 47
  - de Jordan, 99
  - de Riemann-Lebesgue, 136
  - de Schwarz, 190
- limite, 16, 23
- logaritmo, 74, 75
- módulo, 9
- modos, 115
  - normais, 123
- núcleo
  - de Dirichlet, 147
  - de Fejer, 152
  - de Poisson, 170, 181
  - do calor, 162
- número complexo, 7
- noma
  - $L^2$ , 130
- norma
  - uniforme, 41
- ondas
  - estacionárias, 108
  - planas, 103
  - viajantes, 104
- operador de Hodge, 177
- ordem, 90
- orientação positiva, 71
- pólo, 37, 91
- parte imaginária, 9
- parte principal, 88
- parte real, 9
- polinómio, 10, 33
- polinómios de Chebyshev, 13
- potencial, 63, 121
  - complexo, 179
- primitiva, 56, 62, 63
- princípio
  - da fase estacionária, 220
  - da fase não estacionária, 220
  - de Dirichlet, 128, 197
  - de indeterminação de Heisenberg-Weyl, 166
  - de mínima ação, 123
  - do argumento, 95
  - do máximo, 112, 180
  - do módulo máximo, 86, 186
  - do valor médio, 180
  - variacional, 127
- problema
  - de Dirichlet, 122
  - de Sturm-Liouville, 120
- produto de convolução, 146, 160, 203
- produto interno  $L^2$ , 130, 164
- projeção estereográfica, 20
- pulso, 158
- raízes da unidade, 12
- raiz, 10, 33
- razão cruzada, 189
- região, 29
  - de convergência, 201
- regra de Leibniz, 60
- representação polar, 11
- resíduo, 93
  - no infinito, 94
- resposta impulsiva, 210
- série, 39
  - binomial, 84
  - de Fourier, 133
  - de Laurent, 88
  - de Mercator, 83
  - de potências, 43
  - de Taylor, 82
  - geométrica, 39, 42
  - harmónica, 39
- salto unitário, 161
- semi-plano superior, 14
- separável, 197
- separação de variáveis, 107, 117
- simplesmente conexo, 69
- singularidade
  - essencial, 90
  - isolada, 90
  - removível, 90
- sinus cardinalis, 101, 158

- subsucessão, 17
- sucessão, 16
  - fundamental, 17
- teorema
  - da aplicação aberta, 186
  - da curva de Jordan, 70
  - da função inversa, 186
  - da interseção de Cantor, 25
  - de Abel, 47
  - de amostragem de Nyquist-Shannon, 174
  - de aproximação de Weierstrass, 153
  - de Ascoli-Arzelá , 197
  - de Bolzano-Weierstrass, 17
  - de Casorati-Weierstrass, 91
  - de Cauchy, 70
  - de Cauchy-Goursat, 65
  - de Euler-Poincaré, 63
  - de Fejer, 152
  - de Gauss, 34, 83
  - de Green-Stokes, 64
  - de Hurwitz, 96
  - de inversão, 164
  - de Koebe, 184
  - de Liouville , 82
  - de Montel , 198
  - de Morera, 81
  - de Parseval, 155
  - de Plancherel, 164
  - de Rouché, 95
  - de Tauber, 49
  - de uniformização de Riemann , 196
  - de Weierstrass , 25
  - do rearranjo de Riemann, 41
  - dos resíduos, 94
  - fundamental da álgebra, 34
  - fundamental do cálculo, 56
- teste
  - da raiz, 40
  - de Cauchy, 18
  - de Weierstrass, 42
- topologia, 22
- toro, 51
- transformação
  - conforme, 32
  - de Cayley , 191
  - de Levi-Civita/Jukovski, 194
  - de Möbius, 37, 188
- transformada
  - de Fourier, 156
  - de Laplace, 200
  - de Legendre, 223
- valor absoluto, 9
- valor principal de Cauchy, 100
- variação, 68
- vizinhança, 22