25/10/2019 1º teste	Análise Complexa	FIS MIENGFIS

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Resolva a equação
$$z^3 = 1 + i\,.$$

$$z = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/12}\,, \quad z = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi 9/12} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi 17/12}$$

2. *(2 valores)* Verifique se a seguinte função, definida em $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, é holomorfa:
$$f(x+iy) = \frac{1}{x-iy}\,.$$

A função $f(z) = 1/\overline{z}$ não é holomorfa, pois $\overline{\partial} f = -1/\overline{z}^2 \neq 0$.

3. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da seguinte série de potências, e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define:
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(z-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(z-1)^n = \frac{z-1}{(2-z)^2} \qquad \text{no disco } |z-1| < 1\,.$$

4. *(2 valores)* Calcule o seguinte integral, onde $\gamma = \{z(t) = e^{it} \,:\, t \in [\pi/2\,,\, 3\pi/2]\}$,
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2}\,.$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2}\, dz = -2i\,.$$

5. *(2 valores)* Calcule o integral
$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z}\, dz\,.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z}\, dz = 0\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule o integral
$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2}\, dz\,.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i\,.$$

7. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = 0$, e o seu disco de convergência, da função
$$f(z) = z\,e^{-z^2}$$

$$z\,e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n+1} = z - z^3 + \frac{z^5}{2} - \frac{z^7}{6} + \ldots \qquad \text{se } |z| < \infty\,.$$

8. *(2 valores)* Resolva
$$\sin(z) = 2i\,.$$

$$z = -i\log(\sqrt{5}-2) + 2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad z = -i\log(\sqrt{5}+2) - \pi + 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

9. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função
$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}\,.$$

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots \qquad \text{se } |z| < 1\,.$$

e

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} + \ldots \qquad \text{se } |z| > 1\,.$$

10. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas da função
$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4+z^2}\,.$$

As singularidades isoladas são três pólos simples em 0 e $\pm i$.

20/12/2019 2^o teste	Análise Complexa	FIS MIENGFIS

Nome ....**N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=2} z^3 e^{1/z^2}\, dz\,.$$

$$\oint_{|z|=2} z^3\, e^{1/z^2}\, dz = i\pi\,.$$

2. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+9}\, dx\,.$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+9}\, dx = \frac{\pi}{6}\, e^{-3}\,.$$

3. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{3-\cos(\theta)}\, d\theta\,.$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{2+\sin(\theta)}\, d\theta = \pi \left(\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^4 + 1}{4\sqrt{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} - 6 \right) = \pi \left(\frac{17}{4}\sqrt{2} - 6 \right) \simeq 0.0327\,.$$

4. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $x \in [0,\pi]$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

$$(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \sin(nx) \qquad \text{com}\ \ n = 1, 2, 3, \dots \qquad \text{e}\ \ a_n, b_n \in \mathbb{R}\,.$$

5. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se}\ \ 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{se}\ \ \pi/2 < x \le \pi \end{cases}\,.$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n} \sin(nx)\,.$$

6. *(2 valores)* Determine a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, e condições iniciais $u(x,0) = \sin(3x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 5).

$$u(x,t) = \cos(3t)\sin(3x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n^2}\,\sin(nt)\,\sin(nx)\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi t} f(t)\,dt$ da função definida por $f(t) = 0$ se $t < 0$ e $f(t) = e^{-at}$ se $t \geq 0$, com $a > 0$.

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi + a}\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier inversa $h_b(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x}\,\widehat{h_b}(\xi)\,d\xi$ da gaussiana

$$\widehat{h_b}(\xi) = e^{-4\pi^2 b \xi^2} \qquad \text{com } b > 0\,.$$

$$h_b(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} e^{-x^2/bt}\,.$$

9. *(2 valores)* Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$

na reta real $x \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x,0) = \psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\pi x^2/\varepsilon}$, com $\varepsilon > 0$.

$$u(x,t) = e^t\,(\psi_\varepsilon * h_t)(x) = e^t \int_{-\infty} \psi_\varepsilon(y)\,h_t(x-y)\,dy\,.$$

10. *(2 valores)* Determine o limite quando $\varepsilon \to 0^+$ da solução do exercício 9.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} u(x,t) = e^t\,h_t(x)\,.$$