8/11/2018 1º teste	Análise Complexa	FIS MIENGFIS

1. *(2 valores)* Calcule e resolva

$$\sqrt{1-i} \qquad \text{e} \qquad \sin(z) = 2\,,$$

respetivamente.

$$\sqrt[4]{2}\, e^{i(-\pi/8+k\pi)}\,,\ k = 0,1\,, \qquad \text{e} \qquad z = -i\log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + \pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

2. *(2 valores)* Verifique se a função

$$f(x+iy) = e^y(\sin x + i\cos x)\,,$$

definida em $\mathbb{C}$, é holomorfa.

É holomorfa, pois $f(z) = i\,e^{-iz}$.

3. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da seguinte série de potências, e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^n} = \frac{3}{3-z^2} \qquad \text{no disco } |z| < \sqrt{3}\,.$$

4. *(2 valores)* Calcule o segunte integral, ao longo do contorno $\gamma = \{z(t) = e^{it} \,:\, t \in [-\pi,\pi]\}$,

$$\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}\, dz\,.$$

$$\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}\, dz = 0\,.$$

5. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = i$, e o seu disco de convergência, da função

$$f(z) = (z-i)\, e^z$$

$$f(z) = (z-i)\, e^i\, e^{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!}\,(z-i)^{n+1} \qquad \text{no plano complexo}\,.$$

6. *(2 valores)* Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 da função

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}\,.$$

$$f(z) = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^{n+1} \qquad \text{em } |z| < 1\,.$$

e

$$f(z) = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \qquad \text{em } |z| > 1\,.$$

7. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas da função

$$f(z) = \frac{e^{1/(z-5)}}{z^2 - 5z + 6}\,.$$

A função $f(z)$ tem uma singularidade essencial em $p = 5$ e dois pólos simples em $p = 2$ e $p = 3$.

8. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{1/(z-5)}}{z^2 - 5z + 6}\, dz\,.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{1/(z-5)}}{z^2 - 5z + 6}\, dz = 0\,.$$

9. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{x^2 + 1}\, dx\,.$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{x^2 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-2}\,.$$

10. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos(\theta)}\,.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\,.$$

14/1/2019 2^o teste	Análise Complexa	FIS MIENGFIS

1. *(2 valores)* Determine as soluções estacionárias (ou seja, independentes do tempo t) da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ (condutor isolado).

$$u(x,t) = \text{constante}$$

2. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ (condutor isolado).

São proporcionais a

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t} \cos(nx) \qquad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

3. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de cosenos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ da função definida, no intervalo $[0, \pi]$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - \alpha| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \alpha| > \varepsilon \end{cases} ,$$

com $\alpha \in (0, \pi)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

$$\varphi(x) \sim \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda}{\pi n} \cos(n\alpha) \sin(n\varepsilon) \cos(nx) .$$

4. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ (condutor isolado), e condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 3).

$$u(x,t) \sim \frac{2\lambda\varepsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda}{\pi n} \cos(n\alpha) \sin(n\varepsilon)\, e^{-n^2 t} \cos(nx) .$$

5. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis e limitadas (com valores complexos) da equação de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

na reta real $x \in \mathbb{R}$.

São proporcionais a combinações lineares de

$$\psi(x,t) = e^{ip(x \pm ct)} \qquad \text{com } p \in \mathbb{R} .$$

6. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier da Gaussiana

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi x^2/t} \qquad \text{com } t > 0 .$$

$$\widehat{g_t}(\xi) = e^{-\pi t \xi^2} .$$

7. *(2 valores)* Mostre que
$$g_t * g_s = g_{t+s}\,.$$

A transformada de Fourier do produto de convolução $g_t * g_s$ é
$$\widehat{g_t * g_s}(\xi) = \widehat{g_t}(\xi)\,\widehat{g_s}(\xi) = e^{-\pi t\xi^2} e^{-\pi s\xi^2} = e^{-\pi(t-s)\xi^2}\,,$$
que é a transformada de Fourier de g_{t+s}.

8. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier inversa $f_k(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x}\, F_k(\xi)\, d\xi$ da gaussiana modulada
$$F_k(\xi) = e^{-(4\pi^2\xi^2 - 2\pi i\xi)\,k} \qquad \text{com } k > 0\,.$$

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-(x+k)^2/4k}\,.$$

9. *(2 valores)* Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}$$
na reta real $x \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x,0) = \phi(x)$ no espaço de Schwartz.
Se $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi t} U(\xi,t)\, d\xi$, então
$$\frac{\partial}{\partial t} U(\xi,t) = -(4\pi^2\xi^2 - 2\pi i\xi) U(\xi,t)$$
e portanto
$$U(\xi,t) = U(\xi,0)\, e^{-(4\pi^2\xi^2 - 2\pi i\xi)t}$$
Mas $e^{-(4\pi^2\xi^2 - 2\pi i\xi)t}$ é a transformada de Fourier de $f_t(x)$, portanto
$$u(x,t) = (\phi * f_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\, f_t(x-y)\, dy\,.$$

10. *(2 valores)* Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função holomorfa da variável $z = x + iy$, definida em uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mostre que a sua parte real $u(x,y)$ é uma função harmónica.
Pelas condições de Cauchy-Riemann
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$
e portanto $\Delta u = 0$.

.