

ENGFIS FIS

2018/19

Análise Complexa

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL

gab CG - Edifício 6 - 3.48, tel 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

17 de Janeiro de 2019

Resumo

This is not a book! These are notes written for personal use while preparing lectures on “Análise Complexa” for students of FIS and MIENGFIS during the a.y.’s 2014/15, 2017/18 and 2018/19. They are rather informal and certainly contain mistakes (indeed, they are constantly actualized). I tried to be as synthetic as I could, without missing the observations that I consider important.

Most probably I will not lecture all I wrote, and did not write all I plan to lecture. So, I included sketched or even empty paragraphs, about material that I think should/could be lectured within the same course, given enough time.

References contain some introductory manuals that I like, some classics, books where I have learnt things in the past century, recent books which I find interesting. Almost all material can be found in the great series [SS03I, SS03II] by Stein and Shakarchi. More classical references are Ahlfors and Rudin [Ah78, Ru87] for complex analysis, and [BDP92] for partial differential equations. Good material and further references can easily be found in the web, for example in [Scholarpedia](#), in [Wikipedia](#), or in the [MIT OpenCourseWare](#).

Everything about the course may be found in my web pages

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/salteaching.html>

The notation is as follows:

Black paragraphs form the main text.

e.g. means EXEMPLI GRATIA, that is, “for example”, and is used to introduce important or (I hope!) interesting examples.

ex: means “exercise”, to be solved at home or in the classroom.

ref: means “references”, places where you can find and study what follows inside each section.

Blue paragraphs deal with applications and ideas relevant in physics, engineering or other sciences. They are the main reason why all this maths is worth studying for you.

Red paragraphs (mostly written in english) are more advanced or non trivial facts and results which may be skipped in a first (and also second) reading.

□ indicates the end of a proof.

Pictures were made with *Grapher* on my MacBook, or taken from [Wikipedia](#), or produced with [Matlab](#) or [Mathematica](#)^{®8}.



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 2.5 Portugal License](#).

Conteúdo

1	Álgebra e geometria dos números complexos	6
1.1	Números complexos	6
1.2	Representação polar	8
1.3	Geometria elementar	9
1.4	Sucessões e limites	10
1.5	Esfera de Riemann	12
2	Funções holomorfas	13
2.1	Topologia elementar	13
2.2	Funções holomorfas	14
2.3	Polinómios	17
2.4	Funções racionais	18
3	Séries de potências e funções analíticas	20
3.1	Séries de funções	20
3.2	Séries de potências e funções analíticas	22
3.3	Exponencial e funções trigonométricas	23
4	Integração complexa e teorema de Cauchy	26
4.1	Contornos	26
4.2	Integrais de contorno	27
4.3	Teorema de Cauchy-Goursat	30
4.4	Logaritmos	34
5	Fórmula integral de Cauchy e séries de Taylor	36
5.1	Fórmula de Cauchy	36
5.2	Teoremas de Liouville e Gauss	38
5.3	Séries de Taylor	39
6	Séries de Laurent e cálculo dos resíduos	43
6.1	Séries de Laurent	43
6.2	Singularidades isoladas	45
6.3	Teorema e cálculo dos resíduos	46
6.4	Cálculo de integrais	49
7	Separação de variáveis, harmónicas e modos	55
7.1	Corda vibrante	55
7.2	Equação de calor	56
7.3	Separação de variáveis	59
8	Séries de Fourier	62
8.1	Funções periódicas e polinómios trigonométricos	62
8.2	Séries de Fourier	65
8.3	Derivadas e decaimento dos coeficientes de Fourier	67
8.4	Aplicações das séries de Fourier às EDPs	68
9	Convergência das séries de Fourier	73
9.1	Convergência uniforme	73
9.2	Produto de convolução e convergência pontual	76
9.3	Identities aproximadas e teorema de Fejer	79
9.4	Convergência em média quadrática	81
10	Transformada de Fourier	83
10.1	Transformada de Fourier	83
10.2	Identities aproximadas e fórmula de inversão	86
10.3	Aplicações da transformada de Fourier às EDPs	90

11 Funções harmónicas	97
11.1 Funções harmónicas	97
11.2 Princípio do valor médio	99
11.3 Fórmula de Poisson	100
11.4 Potenciais complexos	103
12 Transformações conformes	105
12.1 Transformações conformes	105
12.2 Grupo de Möbius	107
12.3 Equivalências conformes	110
13 Avaliação assintótica de integrais	112
13.1 Método de Laplace	112
13.2 Integrais oscilatórios e método da fase estacionária	113

Notações

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Notação de Landau. Se $f(t)$ e $g(t)$ são duas funções definidas numa vizinhança do ponto $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$, então

- $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ (“ f is big-O of g ”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que existe uma constante $C > 0$ tal que $f(t) \leq C \cdot g(t)$ para todos os t numa vizinhança de a ,
- $f(t) = o(g(t))$ (“ f is small-o of g ”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que o quociente $f(t)/g(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow a$.
- $f(t) \asymp g(t)$ (“ f and g are within a bounded ratio”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ e $g(t) = \mathcal{O}(f(t))$, ou seja, que existe uma constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{C} \cdot g(t) \leq f(t) \leq C \cdot g(t)$ para todos os t numa vizinhança de a ,
- $f(x) \sim g(x)$ (“ f and g are asymptotically equal”) quando $t \rightarrow a$ quer dizer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$

Espaço euclidiano. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço Euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano ou no espaço Euclidiano 3-dimensional são também denotados, conforme a tradição, por $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

O produto interno Euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

O produto interno realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio $\mathbb{R}^n$: o valor da forma linear $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$.

A norma Euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “velocidade”, a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita “velocidade escalar”, e a segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “aceleração”.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F_i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $\text{Jac}\mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\partial F_i / \partial x_j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde dx_k , o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ em $dx_k \cdot \mathbf{v} := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \langle \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$$

para todo os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

1 Álgebra e geometria dos números complexos

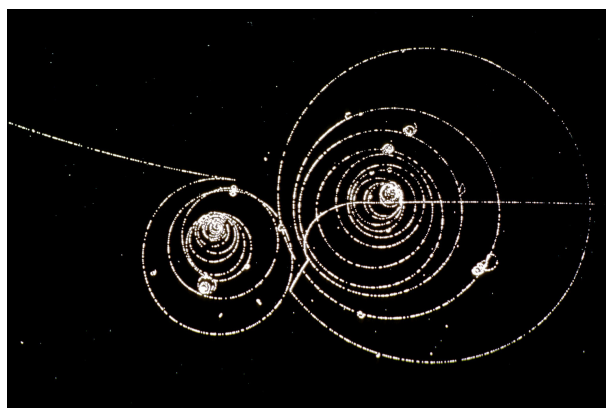
10 set 2018

Very short history. Complex numbers were invented/discovered in the XVI century as a “sophistic” device/trick to solve cubic equations like $x^3 + px + q = 0$. Today, they enter in our formulation of most fundamental laws of Nature, as for example in the *Schrödinger equation*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

or in *Feynman path integrals* of quantum field theory

$$\int_{\text{paths}} e^{iS[x]/\hbar} \mathcal{D}x.$$



1.1 Números complexos

O corpo dos números complexos. O corpo dos *números complexos* é $\mathbb{C} := \mathbb{R}(i)$, onde $i^2 = -1$. Ou seja, é o conjunto $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ dos números/pontos $z = x + iy \approx (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, munido das operações binárias “soma”, definida por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

(que corresponde à soma dos vetores $z_1 \approx (x_1, y_1)$ e $z_2 \approx (x_2, y_2)$ do plano $\mathbb{R}^2$), e “multiplicação”, definida por

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.2)$$

Em particular, se $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$, então $i \cdot i = -1$, ou seja, $\pm i$ são (as únicas) “raízes quadradas de -1 ”. De fato (e esta é a origem das fórmulas acima, que não devem ser decoradas!), somas e multiplicações de números complexos podem ser manipuladas como as correspondentes operações entre números reais (ou seja, usando as propriedades associativas, comutativas e distributivas), e depois substituindo $i \cdot i$ por -1 .

O conjunto $\mathbb{C}$, munido da operação $+$ definida em (1.1), é um grupo (abeliano) aditivo, cujo elemento neutro é $0 := 0 + i0$. Somar um número complexo z , i.e. fazer $w \mapsto w + z$, corresponde a uma translação no plano complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$.

Todo $z = x + iy \neq 0$ admite um inverso multiplicativo, um número complexo $1/z$ tal que $z \cdot (1/z) = (1/z) \cdot z = 1$, dado por

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

como é fácil verificar (observe que se $z \neq 0$ então $x^2 + y^2 > 0$). De consequência, o conjunto $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munido da operação $\cdot$ definida em (1.2), é um grupo (abeliano) multiplicativo, o grupo multiplicativo dos números complexos invertíveis, cujo elemento neutro é $1 := 1 + i0$ (o significado geométrico da multiplicação deve esperar mais um pouco).

Potências. As potências inteiras de um número complexo são definidas por recorrência: $z^{n+1} := z \cdot z^n$, se $n \geq 1$, sendo $z^0 := 1$. Se $z \in \mathbb{C}^\times$, então as potências negativas são definidas por $z^{-n} := (1/z)^n$.

Conjugação. O conjugado de $z = x + iy$ é

$$\bar{z} := x - iy,$$

ou seja, a imagem do ponto $x + iy \approx (x, y)$ pela reflexão na reta $y = 0$ do plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. A conjugação respeita soma e produtos, ou seja, verifica

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{e} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

(a segunda identidade não é óbvia, mas um milagre que relaciona multiplicação e geometria do plano). Observe também que a conjugação é uma involução, ou seja, $\bar{\bar{z}} = z$.

Os números reais

$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$, respetivamente. Observe que $z = \bar{z}$ sse z é real, i.e. sse $\Im(z) = 0$.

Módulo. A conjugação permite definir $N(z) := z\bar{z} = x^2 + y^2$, que é um número real não-negativo (o “módulo” de z no sentido da teoria de números), e portanto o *módulo*, ou *valor absoluto*, de $z = x + iy$,

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que é a norma euclidiana do vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Em particular, $|z| = 0$ sse $z = 0$. O valor absoluto é multiplicativo, ou seja, $|zw| = |z||w|$, e $|z/w| = |z|/|w|$ se $w \neq 0$. O inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0$ é então

$$1/z = \bar{z}/|z|^2.$$

ex: Calcule

$$(2 + i3) + (3 - i2) \quad (1 - i) \cdot (2 - i) \quad (1 + i) + (1 - i) \cdot (2 - i5)$$

ex: Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexos

$$1/i \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2 \quad i^{17} \quad (2 \pm i)^3$$

ex: Verifique que, na identificação $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ definida por $x + iy \approx (x, y)$, o produto $(a + ib)(x + iy)$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em particular, se $a + ib \neq 0$, então o produto é

$$\sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde $\tan \theta = b/a$ se $a \neq 0$, ou $\theta = \pi/2$ se $a = 0$. Deduza que a multiplicação por $a + ib \neq 0$ é invertível, e determine uma fórmula para a sua inversa.

ex: Interprete, e prove, a seguinte identidade entre números reais:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

ex: Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

1.2 Representação polar

13 set 2018

Representação polar. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ é o módulo de z , $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é um *argumento* de z , ou seja, um ângulo tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$ (logo definido a menos de múltiplos inteiros de 2π), e o número complexo $e^{i\theta} \in \mathbb{S} := \{|z| = 1\}$ é (provisoriamente) definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta). \quad (1.3)$$

Pode ser útil escolher um valor do argumento, e chamar *argumento principal* de um número z o único argumento que satisfaz $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

Interpretação geométrica da multiplicação. Se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então as fórmulas de adição para seno e cosseno mostram que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

e, se $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Estas fórmulas revelam o significado geométrico da multiplicação entre números complexos. Uma primeira consequência é que o inverso do número complexo $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$, é $z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$. Outra é que a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$, no plano $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, ou seja, a transformação $w \mapsto zw$, corresponde a uma homotetia $w \mapsto \rho w$ de razão $|z| = \rho > 0$ (uma dilatação ou contração se $\rho \neq 1$) e uma rotação $w \mapsto e^{i\theta} w$ de um ângulo θ . Em particular, a multiplicação por um número complexo de módulo um, ou seja, da forma $e^{i\theta}$, corresponde a uma rotação. Por exemplo, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é uma “raiz quadrada” da rotação $z \mapsto e^{i\pi} z = -z$ de um ângulo π , i.e. uma rotação de um ângulo $\pi/2$.

Raízes. Se $n = 1, 2, 3, \dots$, então cada número complexo $w \neq 0$ possui n *raízes n -ésimas*, i.e. n números complexos z que resolvem

$$z^n = w.$$

De fato, as raízes n -ésimas de $w = \rho e^{i\theta}$, com $\rho \neq 0$, são os números

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Os pontos z_k formam os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$ e centro 0. Em particular, os números complexos

$$\zeta_k := e^{i2\pi k/n},$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, que resolvem $(\zeta_k)^n = 1$ e portanto pertencem a circunferência unitária, são chamados *raízes n -ésimas da unidade*. Observe que $\zeta_k = (\zeta_1)^k$, onde $\zeta_1 = e^{i2\pi/n}$ é uma raiz “primitiva”.

ex: Represente na forma polar os seguintes números complexos:

$$-i \quad i-1 \quad 1+i$$

ex: Use a representação polar e a fórmula de Euler (1.3) para provar a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Deduza as fórmulas

$$\cos(n\theta) = \dots \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \dots$$

ex: Verifique que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

ex: Calcule

$$e^{i\pi} \quad e^{-i\pi/2} \quad \sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i} \quad \sqrt[4]{i}$$

ex: Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^5 = 1$ e $z^3 = 81$.

ex: Verifique que $(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$, e portanto, se $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Considere $z = e^{i\theta}$ com $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$ e real, calcule a parte real e deduza

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2 \sin(\theta/2)}$$

Mostre que se ω é uma raiz n -ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

1.3 Geometria elementar

Desigualdades. É evidente que a parte real e a parte imaginária de um número complexo são limitadas pelo módulo, i.e.

$$-|z| \leq \Re(z) \leq |z| \quad \text{e} \quad -|z| \leq \Im(z) \leq |z| \quad (1.4)$$

Por outro lado, um cálculo direto mostra que $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2 \Re(z\bar{w})$. Usando as (1.4), deduzimos a *desigualdade do triângulo*

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|} \quad (1.5)$$

Norma e métrica euclidiana. A desigualdade do triângulo diz que $|z|$ é uma norma, e portanto

$$d(z, w) := |z - w|$$

é uma métrica no plano complexo. Ou seja, é positiva quando $z \neq w$, nula sse $z = w$, e satisfaz a desigualdade do triângulo

$$\text{dist}(z, w) \leq \text{dist}(z, p) + \text{dist}(p, w).$$

De fato, como já observado, é a métrica euclidiana de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, definida pelo produto escalar euclidiano $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy' = \Re(z\bar{z}')$.

ex: Diga quando valem as igualdades nas (1.4) e (1.5).

ex: Mostre que

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

ex: Prove a desigualdade

$$|z - w| \geq ||z| - |w||$$

ex: Seja $\|z\|_\infty := \max\{|\Re(z)|, |\Im(z)|\}$. Mostre que

$$\|z\|_\infty \leq |z| \leq \sqrt{2} \|z\|_\infty \quad (1.6)$$

Discos e bolas. O *disco* (ou *bola*) aberto de raio $r > 0$ e centro $p \in \mathbb{C}$ é

$$D_r(p) := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z - p| < r\}.$$

Particularmente importante é o *disco unitário* $\mathbb{D} := D_1(0)$, formado pelos números complexos de módulo $|z| < 1$.

ex: Esboce os lugares do plano definidos pelas seguintes equações ou desigualdades:

$$|z - i| = 2 \quad 0 < \Re(z) < 1 \quad \Im(z) > 0 \quad 4/z = \bar{z}$$

$$|z - i| > |z + i| \quad |z - 1| + |z + 1| = 3 \quad |z + 1| - |z - 1| = 1$$

ex: Mostre que se $z \in D_r(p)$, então $D_{r'}(z) \subset D_r(p)$ se $r' < r - \text{dist}(z, p)$.

Circunferências. A circunferência (ou círculo) $C_\rho(a)$ de centro $a \in \mathbb{C}$ e raio $\rho > 0$ é o lugar dos pontos que satisfazem $|z - a| = \rho$. Ao calcular os quadrados, temos $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = \rho^2$, ou seja,

$$z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + b = 0. \quad (1.7)$$

onde $b := |a|^2 - \rho^2 \in \mathbb{R}$. Por exemplo, a circunferência unitária $\mathbb{S} := C_1(0)$ é definida pela equação cartesiana $|z|^2 = 1$.

Retas. A equação paramétrica de uma reta passando pelo ponto $p \in \mathbb{C}$ com velocidade $v \in \mathbb{C}^\times$ é $z(t) = p + vt$, com $t \in \mathbb{R}$. Ao resolver para t , a condição “ t real” traduz-se $\Im((z - p)/v) = 0$. Portanto, uma reta no plano complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ pode ser definida por uma equação cartesiana da forma $\Im(\alpha z + \beta) = 0$, onde $\alpha = 1/v \in \mathbb{C}^\times$ e $\beta = -p/v \in \mathbb{C}$ são parâmetros complexos. Uma equação cartesiana da reta é portanto

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \quad (1.8)$$

onde $a = -\bar{\alpha}/i = iv/|v|^2 \in \mathbb{C}^\times$ e $b = 2\Im(\beta) \in \mathbb{R}$. Por exemplo, umas equações cartesianas do eixo real $\mathbb{R}$ e do eixo imaginário $i\mathbb{R}$ são $z - \bar{z} = 0$ e $z + \bar{z} = 0$, respetivamente.

ex: Determine uma equação cartesiana da reta que passa por $z_0 = 1 + i$ com velocidade $v = 2 - i$.

ex: Determine uma equação cartesiana da circunferência de centro $1 + i$ e raio 3.

ex: Mostre que a equação $\Re((z - a)/(z - b)) = 0$ define uma circunferência cujo diâmetro é o segmento entre a e b .

1.4 Sucessões e limites

Sucessões. Uma *sucessão/sequência* com valores complexos é uma função $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, ou seja, uma coleção $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números complexos $z_n \in \mathbb{C}$, indexados (portanto ordenados) por um inteiro positivo $n \in \mathbb{N}$. Podemos pensar que o índice n é um “tempo”, e portanto o n -ésimo termo z_n é o valor de um “observável” z no instante n .

Limites. A sucessão (z_n) converge para o limite $a \in \mathbb{C}$, notação $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ou simplesmente $z_n \rightarrow a$ (subentendido, quando $n \rightarrow \infty$), se para cada “precisão” $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ tal que

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

para todos os tempos $n \geq \bar{n}$. Isto significa que os valores z_n estão numa vizinhança arbitrariamente pequena de a desde que o tempo n seja suficientemente grande. É claro, pelas desigualdades (1.6), que a sucessão (z_n) , com $z_n = x_n + iy_n$, converge para $a + ib$ sse as duas sucessões reais (x_n) e (y_n) convergem para a e b , respetivamente.

Limites infinitos. A sucessão (z_n) é limitada se existe $M < \infty$ tal que $|z_n| < M$ para todos os n . Também é útil dizer que $z_n \rightarrow \infty$ quando, para cada $K > 0$, existe um tempo $\bar{n}$ tal que $|x_n| > K$ se $n \geq \bar{n}$.

ex: Dê um exemplo de uma sucessão não limitada que não tem limite infinito.

Subsucessões. Uma *subsucessão* de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão $(z_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ obtida selecionando apenas os valores z_{n_i} , sendo $i \mapsto n_i$ uma função crescente $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A propriedade importante de $\mathbb{C}$ (ou dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$) é o seguinte

Teorema 1.1 (Bolzano-Weierstrass). *Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.*

Sucessões fundamentais. Uma sucessão (z_n) é dita *fundamental*, ou *sucessão de Cauchy*, se para cada precisão $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ tal que

$$|z_n - z_m| < \varepsilon$$

para todos os tempos $n, m > \bar{n}$. É evidente que uma sucessão convergente é fundamental (um argumento triangular, pois z_n e z_m estão ε -próximos do limite se n e m são suficientemente grandes). Um argumento triangular também mostra que uma sucessão fundamental que admite uma subsucessão convergente é convergente. As sucessões fundamentais são claramente limitadas, portanto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass 1.1,

Teorema 1.2 (teste de Cauchy). *Toda a sucessão fundamental em $\mathbb{C}$ (ou em $\mathbb{R}^n$) é convergente.*

Isto quer dizer que pode ser possível decidir se uma sucessão é convergente sem conhecer o seu limite! Em geral, a convergência das sucessões fundamentais é usada como definição da completude (sequencial) de um espaço métrico.

e.g. Progressão geométrica. A sucessão mais importante é a *progressão geométrica*, definida pela lei recursiva

$$z_{n+1} = \lambda z_n$$

e uma condição inicial $z_0 = a$. Os seus termos são proporcionais aos termos da série com condição inicial $a = 1$, que são

$$z_0 = 1 \quad z_1 = \lambda \quad z_2 = \lambda^2 \quad \dots \quad z_n = \lambda^n \quad \dots$$

O parâmetro λ é chamado *razão*, sendo o quociente z_{n+1}/z_n entre dois termos sucessivos. A progressão geométrica (λ^n) converge para zero quando $|\lambda| < 1$. É constante, logo trivialmente convergente, quando $\lambda = 1$, e oscila entre ± 1 quando $\lambda = -1$. É útil também observar que $|\lambda^n| \rightarrow \infty$ quando $|\lambda| > 1$. O comportamento de $z_n = \lambda^n$ para outros valores de $\lambda \in \mathbb{S}$ é mais delicado, e depende da racionalidade do argumento de $\lambda = e^{2\pi i \theta}$...

ex: Mostre que a *progressão aritmética* $z_n = a + bn$ não é limitada, e portanto não é convergente, quando $b \neq 0$.

ex: A sucessão $z_n = e^{2\pi i \alpha n}$, com α racional (ou seja, $\alpha = p/q$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$), é convergente? E se α é irracional?

ex: Mostre que, se $z = x + iy$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow e^x e^{iy}$$

(calcule os limites do valor absoluto e do argumento separadamente)

1.5 Esfera de Riemann

Esfera de Riemann. Acontece que é útil acrescentar um ponto chamado ∞ ao plano complexo, e definir a *esfera de Riemann* como sendo a reunião $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A ideia/motivação é fazer com que uma sequência de pontos $z_n \in \mathbb{C}$ com valores absolutos $|z_n|$ crescentes e ilimitados seja convergente com $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. Para fazer isto, podemos “colar” ao plano complexo usual $U_0 \approx \mathbb{C}$, com coordenada z , um outro plano complexo $U_\infty \approx \mathbb{C}$, com coordenada w , declarando que $w = 1/z$ se $z \neq 0$ e $w \neq 0$. O ponto $z = \infty$ da esfera de Riemann corresponde portanto ao ponto $w = 0$ da segunda “carta” U_∞ .

Um modelo mais concreto da esfera de Riemann é a esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. A correspondência $\mathbb{S}^2 \approx \overline{\mathbb{C}}$ é definida da maneira seguinte. O “pólo norte” $N = (0, 0, 1)$ representa o ponto ∞ . Cada outro ponto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ é identificado a um ponto $z = x + iy$ do plano complexo $\mathbb{C} \approx \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ por meio da “projeção estereográfica” $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$: o ponto $z = \pi(x_1, x_2, x_3)$ é a interseção da reta passando por N e (x_1, x_2, x_3) com o plano $\{x_3 = 0\}$. O resultado é que a projeção estereográfica $(x_1, x_2, x_3) \mapsto z$ é dada por

$$z = \frac{x_1 + iy_2}{1 - x_3}$$

De consequência, a inversa $\pi^{-1} : z = x + iy \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ é dada por

$$x_1 = \frac{2x}{1 + |z|^2} \quad x_2 = \frac{2y}{1 + |z|^2} \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Uma circunferência na esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$ é uma interseção $C = \mathbb{S}^2 \cap P$ da esfera $\mathbb{S}^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ com um plano $P = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c\} \subset \mathbb{R}^3$ (se $c = 0$ é uma circunferência máxima, e se $a_3 = c$ passa pelo pólo norte). A sua imagem $\pi(C) \subset \mathbb{C}$ pela projeção estereográfica é uma circunferência do plano (caso genérico) ou uma reta (se $a_3 = c$). Assim, é natural chamar genericamente “circunferências” as circunferências e as retas de $\mathbb{C}$.

ex: Verifique as fórmulas da projeção estereográfica.

ex: Verifique que a projeção estereográfica envia circunferências de $\mathbb{S}^2$ em circunferências ou retas de $\mathbb{C}$.

Projective line. A more abstract model for the Riemann sphere is the *projective (complex) line*, which is the space of complex lines in the complex vector space $\mathbb{C}^2$, namely the quotient space

$$\mathbb{P}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$$

of non-zero points $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ modulo the equivalence relation $(z_0, z_1) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1)$ if $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. The class of (z_0, z_1) , i.e. the complex line through $(0, 0)$ and (z_0, z_1) , is traditionally denoted by $[z_0, z_1]$, and z_0 and z_1 are then said “homogeneous coordinates” of the point $[z_0, z_1] \in \mathbb{P}^1$. One recovers the usual coordinates on $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ setting $z := z_0/z_1$ in the open set $U_0 \approx \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ where $z_1 \neq 0$, and $w := z_1/z_0 = 1/z$ in the open set $U_1 \approx (\mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}) \subset \overline{\mathbb{C}}$ where $z_0 \neq 0$. Clearly, both $U_0 \approx \mathbb{C}$ and $U_1 \approx \mathbb{C}$, and their intersection is $U_0 \cap U_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$.

2 Funções holomorfas

Funções complexas. O objetivo é compreender certas classes de funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, definidas em domínios $\Omega \subset \mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{C}}$. Estas funções podem ser consideradas “campos” $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$, com duas componentes reais, $u(x, y)$ e $v(x, y)$, que dependem de duas variáveis reais, x e y . Também podem ser consideradas “transformações” $z \mapsto w = f(z)$, que enviam regiões do plano onde vive z em regiões do plano onde vive w . A noção de continuidade é equivalente ao caso do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, a noção crucial de “derivada complexa”, apesar da sua simplicidade, é a origem de uma série de milagres.

20 set 2018

2.1 Topologia elementar

Abertos e fechados Um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ (ou, em geral, de um espaço métrico, como por exemplo $\mathbb{R}^n$, ou $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$) é *aberto* se é vazio ou se cada seu ponto p é centro de um disco $D_r(p)$ (em geral, bola) contido em A . A família $\mathcal{A}$ dos abertos é chamada “topologia” (induzida pela métrica), e verifica as seguintes propriedades: o conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio $\mathbb{C}$ são abertos; uma reunião (arbitrária) de abertos é um aberto; a interseção de dois (ou de um número finito de) abertos é um aberto. Estas propriedades podem ser usadas como “definição” de topologia, sem passar por uma métrica. Em geral, os abertos de um subconjunto arbitrário $D \subset \mathbb{C}$ são as interseções $A \cap D$ de D com os abertos $A \subset \mathbb{C}$.

Um subconjunto $F \subset \mathbb{C}$ é *fechado* se o seu complementar $\mathbb{C} \setminus F$ é aberto. Assim, a família $\mathcal{F}$ dos fechados satisfaz as propriedades duais: o conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio $\mathbb{C}$ são fechados; uma interseção de fechados é um fechado; a reunião de dois (ou de um número finito de) fechados é um fechado.

Um subconjunto arbitrário $S \subset \mathbb{C}$ divide o plano em três subconjuntos disjuntos (alguns dos quais podem ser vazios): o *interior* $\text{int}(S)$, que é o maior aberto contido em S (ou seja, $p \in \text{int}(S)$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(p) \subset S$), o *exterior* $\text{ext}(S) := \text{int}(\mathbb{C} \setminus S)$, e a *fronteira* $\partial S := \mathbb{C} \setminus (\text{int}(S) \cup \text{ext}(S))$. Em particular, $p \in \partial S$ se todo o disco $D_\rho(p)$ contém pontos de S e do seu complementar $\mathbb{C} \setminus S$. A reunião $\overline{S} := \text{int}(S) \cup \partial S$, que é um conjunto fechado, é chamada *aderência*, ou *fecho*, de S . Um ponto $p \in \overline{S}$ se todo o disco $D_\rho(p)$ contém pontos de S .

Uma *vizinhança* do ponto $p \in \mathbb{C}$ é um conjunto U que contém um disco $D_\rho(p)$ suficientemente pequeno centrado em p (por exemplo, um aberto que contém p).

Limites e continuidade Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida numa região $D \subset \mathbb{C}$. Se $p \in D$, então $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = \alpha$ (“o *limite* de f quando z tende para p existe e é igual a α ”) quer dizer que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |z - p| < \delta$ então $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$. A função f é *contínua* em p se $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = f(p)$, ou seja, se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $f(D_\delta(p)) \subset D_\varepsilon(f(p))$. A função f é *contínua* se é contínua em todos os pontos do seu domínio. A noção de continuidade é independente da métrica particular usada para definir os abertos. De fato, é imediato verificar que uma função $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua sse a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de cada aberto $A \subset \mathbb{C}$ é um aberto em D .

Conexos e regiões Um aberto $A \subset \mathbb{C}$ é *conexo* se não é uma reunião disjunta de dois abertos não-vazios. Equivalentemente, se cada dois pontos $\alpha, \beta \in A$, pode ser unidos por uma *curva* contida em A , uma função contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\gamma(0) = \alpha$ e $\gamma(1) = \beta$ (de fato, γ pode ser escolhida diferenciável). Por exemplo, um aberto convexo, i.e. tal que se $\alpha, \beta \in A$ então $z(t) = (1 - t)\alpha + t\beta \in A$ para todo $t \in [0, 1]$, é conexo. Um aberto arbitrário D é uma reunião disjunta $D = \cup_i D_i$ de abertos conexos D_i , chamados *componentes conexas*. A componente conexa de um ponto $p \in D$ sendo o conjunto dos pontos $p' \in D$ que podem ser unidos a p por uma curva contida em D .

Uma *região* é um subconjunto não-vazio, aberto e conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. As regiões do plano $\mathbb{C}$, ou da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, são os domínios naturais das funções que queremos compreender.

Compactos Um subconjunto $K \subset \mathbb{C}$ (ou de um espaço métrico) é *compacto* se toda a cobertura aberta $K \subset \cup_\alpha A_\alpha$ (i.e. formada por abertos A_α ’s) admite uma subcobertura finita $K \subset \cup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$ (i.e. formada por um número finito dos A_α ’s). É evidente que a imagem $f(K)$ de um compacto

$K \subset D$ por uma função contínua $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é um compacto. Acontece que os compactos de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{R}^n$) são os subconjuntos fechado e limitados (i.e. contidos num disco $D_R(0)$ suficientemente grande). Em particular,

Teorema 2.1 (Weierstrass). *Uma função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto K é limitada, e atinge o seu máximo e o seu mínimo.*

Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é *uniformemente contínua* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ se $|z - z'| < \delta$.

Teorema 2.2 (Cantor). *Uma função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ definida num compacto K é uniformemente contínua.*

2.2 Funções holomorfas

Funções afins. As funções complexas mais simples correspondem às operações de corpo. São as *translações* $f(z) = z + \alpha$ e as *homotetias (complexas)* $f(z) = \lambda z$. Podem ser combinadas para dar origem às *funções/transformações afins*

$$f(z) = \lambda z + \alpha, \quad (2.1)$$

com parâmetros $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ (i.e. se f não é constante!), a transformação $w = \lambda z + \alpha$ é uma bijeção do plano complexo, cuja inversa é a transformação afim $z = (w - \alpha)/\lambda$. Se definimos $f(\infty) := \infty$, então é também uma bijeção da esfera de Riemann, que fixa o “polo norte” ∞ . É claro que a composição de duas transformações afins é ainda uma transformação afim. O conjunto $\text{Aff}(\mathbb{C})$ das transformações afins invertíveis, munido da lei “composição”, forma portanto um grupo, chamado *grupo afim complexo*.

ex: Sejam $f(z) = \lambda z + \alpha$ e $g(z) = \mu z + \beta$ duas transformações afins invertíveis. Calcule as composições $f \circ g$ e $g \circ f$. Descreva a lei de composição do grupo $\text{Aff}(\mathbb{C})$, parametrizado por $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ como em (2.1) (os matemáticos dizem que $\text{Aff}(\mathbb{C})$ é o produto “semi-direto” do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$ que age sobre o grupo aditivo $\mathbb{C}$, denotado por $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$).

ex: Determine os pontos fixos de $f(z) = \lambda z + \alpha$, ou seja, os pontos $p \in \overline{\mathbb{C}}$ tais que $f(p) = p$.

ex: Esboce a sequência das imagens de um ponto $z \neq 0$ (ou outra figura no plano complexo) pelas iteradas da homotetia $f(z) = \lambda z$, ou seja, as transformações $f \circ f \circ \dots \circ f$ ou $f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$, quando $|\lambda| \neq 1$ ou quando $|\lambda| = 1$.

Derivada complexa. Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida numa vizinhança U de $p \in \mathbb{C}$, é *derivável* em p se existe o limite

$$f'(p) := \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(p+z) - f(p)}{z}, \quad (2.2)$$

ou seja, se existe um número complexo $\lambda = f'(p)$, dito *derivada de f em p* , tal que numa vizinhança de p podemos aproximar a função com uma função afim

$$f(p+z) \simeq \alpha + \lambda z,$$

com $\alpha = f(p)$, a menos de um “erro” $e(z) := f(p+z) - \alpha - \lambda z$ que é “infinitésimo”, i.e. satisfaz $\lim_{z \rightarrow 0} e(z)/z = 0$. Em particular, uma função derivável em p é contínua em p .

Funções holomorfas. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, definida numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ do plano complexo, é dita *holomorfa* se admite a derivada em todos os pontos $p \in \Omega$. É dita *inteira* quando o domínio é $\Omega = \mathbb{C}$. É também útil dizer que f é holomorfa num domínio $D \subset \mathbb{C}$, não necessariamente aberto, se é holomorfa numa vizinhança aberta de D .

Os pontos onde $f'(p) = 0$, i.e. onde $f(p+z) = \alpha + o(z)$, são chamados *pontos críticos* de f .

A definição de derivada complexa é formalmente igual à definição de derivada real, logo todas as regras de derivação usuais continuam válidas. Em particular, combinações lineares $\alpha f(z) + \beta g(z)$ de funções holomorfas são holomorfas, e têm derivadas $\alpha f'(z) + \beta g'(z)$. Portanto, o espaço $\mathcal{O}(\Omega)$ das funções holomorfas definidas numa região Ω é um espaço linear complexo. Também produtos (pontuais) $f(z)g(z)$ de funções holomorfas são holomorfos, a derivada sendo dada pela regra de Leibniz $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$, e portanto $\mathcal{O}(\Omega)$ é um anel. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, então $g(z) = 1/f(z)$ é holomorfa em Ω exceto nos pontos p onde $f(p) = 0$, chamados *zeros* da função f , e a sua derivada é $g'(z) = -f'(z)/f(z)^2$. Composições $f(g(z))$ de funções holomorfas são também holomorfas, e a derivada é dada pela regra da cadeia $f'(g(z))g'(z)$.

Teorema 2.3. *Uma função $f \in \mathcal{O}(D)$ com derivada nula $f'(p) = 0$ em todos os pontos de uma região $D \subset \mathbb{C}$ é constante.*

Demonstração. Cada dois pontos $\alpha, \beta \in D$ podem ser unidos por um caminho diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$. A derivada da composição $f \circ \gamma$ é $f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = 0$ para todos os tempos t , e portanto $f(\alpha) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(\beta)$. $\square$

Condições de Cauchy-Riemann. O limite em (2.2) deve ser independente da direção escolhida para fazer $z \rightarrow 0$. Em particular, podemos escolher $z = \varepsilon$ ou $z = i\varepsilon$, com $\varepsilon \rightarrow 0$ e real. Então uma função holomorfa $f(z)$, pensada como uma função $f(x+iy) \approx f(x, y)$ de duas variáveis reais, x e y , verifica as *condições de Cauchy-Riemann*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}} \quad (2.3)$$

Se $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, com u e v funções reais, então a equação (2.3) é equivalente às duas equações diferenciais

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (2.4)$$

Sejam ∂ e $\bar{\partial}$ os operadores diferenciais definidos por

$$\partial := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Formalmente, pensando em z e $\bar{z}$ como coordenadas do plano x - y , definidas pelas mudanças de coordenadas $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/2i$, o operador ∂ pode ser interpretado como sendo o operador $\partial/\partial z = (\partial x/\partial z) \partial/\partial x + (\partial y/\partial z) \partial/\partial y$, e o operador $\bar{\partial}$ pode ser interpretado como sendo o operador $\partial/\partial \bar{z} = (\partial x/\partial \bar{z}) \partial/\partial x + (\partial y/\partial \bar{z}) \partial/\partial y$. As condições de Cauchy-Riemann (2.3) podem ser escritas

$$\boxed{\bar{\partial} f = 0}$$

Moralmente, uma função holomorfa é uma função que apenas depende de z e não de $\bar{z}$.

Teorema 2.4. *Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções reais de classe $\mathcal{C}^1$ numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (2.3) ou (2.4), então $f(x+iy) := u(x, y) + i v(x, y)$ é uma função holomorfa em Ω .*

ex: Verifique se as seguintes funções são holomorfas, determine possíveis domínios, e calcule as derivadas $f'(z)$, $f''(z)$, ...

$$f(z) = z \quad f(z) = \bar{z} \quad f(z) = z^2 \quad f(z) = |z|^2$$

$$f(z) = 1/z \quad f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \quad f(z) = \Re(z)$$

ex: Verifique que a função “exponencial”, definida por

$$e^z := e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

é inteira.

ex: Mostre que $f(z)$ é holomorfa sse $\overline{f(\bar{z})}$ é holomorfa.

ex: Mostre que se uma função holomorfa tem valores reais (i.e. $\Im(f(z)) = 0$), ou imaginários puros (i.e. $\Re(f(z)) = 0$), ou tem módulo constante (i.e. $|f(z)| = c$), então tem derivada $f' = 0$, e portanto é localmente constante

Transformações conformes. A matriz Jacobiana $J = (\text{Jac} f)(p)$ de uma função diferenciável $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ num ponto $p \in \Omega$ é uma matriz real 2×2 , com 4 entradas independentes, que representa a parte linear de $f(p + v) - f(p)$, i.e.

$$f(p + v) = f(p) + J \cdot v + o(\|v\|).$$

As condições de Cauchy-Riemann (2.3) dizem que a matriz Jacobiana de uma função holomorfa depende apenas de 2 números reais, pois representa a multiplicação pelo número complexo $f'(p) = \rho e^{i\theta}$, logo é da forma $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, onde $a = \partial u / \partial x(p)$ e $b = \partial v / \partial x(p)$. Se p não é um ponto crítico de f , então $\rho^2 = a^2 + b^2 = \det(J) > 0$, e portanto a parte linear de f é

$$J = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \rho R_\theta,$$

uma rotação $R_\theta \in \text{SO}(2, \mathbb{R})$ seguida por uma homotetia não trivial $z \mapsto \rho z$. Em particular, f envia pequenos círculos à volta de p em pequenos círculos à volta de $f(p)$ (e não elipses como uma transformação linear genérica!), e preserva os ângulos entre as curvas diferenciáveis que passam por p . De fato, sejam $\gamma(t)$ e $\mu(t)$ duas curvas que passam pelo ponto $p = \gamma(0) = \mu(0)$ com velocidades não nulas $v = \dot{\gamma}(0)$ e $w = \dot{\mu}(0)$, respetivamente. Então as curvas $f(\gamma(t))$ e $f(\mu(t))$ passam pelo ponto $f(p)$ com velocidades Jv e Jw , respetivamente, e $(Jv \cdot Jw) \|v\| \|w\| = (v \cdot w) \|Jv\| \|Jw\|$, o que significa que o ângulo entre v e w é igual ao ângulo entre Jv e Jw .

Uma transformação que preserva os ângulos e também preserva a orientação do plano (i.e. $\det(\text{Jac} f) > 0$) é chamada *conforme*. Portanto, uma função holomorfa define uma transformação conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que não contém pontos críticos de f (i.e. uma região onde $f' \neq 0$).

ex: Uma função tal que $f(p + z) = f(p) + \lambda \cdot \bar{z} + o(z)$ nos pontos de uma região $D \subset \mathbb{C}$ é dita *anti-holomorfa*. Uma transformação anti-holomorfa preserva os ângulos mas não a orientação, pois $\det(\text{Jac} f) < 0$ fora dos pontos críticos. Mostre que $f = u + iv$ é anti-holomorfa sse $\partial f = 0$, e portanto sse $\bar{f} = u - iv$ é holomorfa.

e.g. Potências e raízes. Se $n = 0, 1, 2, \dots$, a potência

$$f(z) = z^n$$

é uma função inteira, i.e. é holomorfa em $\mathbb{C}$. A sua derivada é $f'(z) = n z^{n-1}$, que também é inteira. O único ponto onde $f(p) = 0$ é a origem $p = 0$, que é também o único ponto crítico (i.e. onde $f'(p) = 0$) se $n \geq 1$. Em particular, $f(z) = z^n$ define uma transformação conforme $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$. A imagem do ponto $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$, é o ponto $w = \rho^n e^{in\theta}$. Em particular, um setor angular $A = \{\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi/n\}$ de “comprimento” $2\pi/n$ é enviado bijectivamente sobre $\mathbb{C} \setminus \{\arg(z) = \alpha\}$. A imagem inversa de $w = r e^{i\phi} \neq 0$ é composta pelos n vértices $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\phi + 2\pi k)/n}$, com $k = 0, 1, \dots, n-1$, de um polígono regular inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$.

As potências negativas $f(z) = z^{-n} = 1/z^n$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, são holomorfa no plano perfurado $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e as suas derivadas são $f'(z) = -n z^{-(n+1)}$.

Observe que todas as potências são derivadas de outras potências, com a única exceção de $f(z) = 1/z$, a derivada de um hipotético logaritmo $\log z$, e este fato que vai ser crucial na teoria da integração.

ex: Seja $f = u + iv : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ a função holomorfa $f(z) = z^2$, definida no semi-plano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \Im(z) > 0\}$. Descreva as curvas de nível das funções reais u e v .

2.3 Polinômios

24 set 2018

Polinômios. Usando repetidamente somas e multiplicações, é possível construir os *polinômios*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (2.5)$$

com coeficientes $a_k \in \mathbb{C}$. O *grau* do polinômio (2.5) é $\deg(f) = n$ se $a_n \neq 0$. Por exemplo, uma função constante $f(z) = \alpha$ é um polinômio de grau 0.

Somas e produtos finitos de polinômios são polinômios. Portanto, o espaço $\text{Pol}(\mathbb{C})$ dos polinômios forma um anel comutativo, cuja identidade é o polinômio constante $f(z) = 1$. Observe também que $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$, desde que f e g sejam diferentes do polinômio nulo $h(z) = 0$ (que portanto não convém chamar “polinômio!”).

Global & local. Os polinômios são funções inteiras, infinitamente deriváveis (e com k -ésima derivada nula se $k > \deg(f)$). Os coeficientes de um polinômio são determinados pelos valores de f e das suas derivadas na origem, pois $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = f''(0)/2$, ...

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Informalmente, o comportamento “global” de um polinômio, os seus valores para todos os pontos do plano complexo, é determinado pelo seu comportamento “local”, as derivadas na origem, que dependem apenas dos valores do polinômio numa vizinhança arbitrariamente pequena da origem. Isto não é surpreendente, sendo um polinômio determinado por um número finito de parâmetros, os seus coeficientes.

Zeros e fatorização. Os *zeros*, ou *raízes*, do polinômio f são os pontos p onde $f(p) = 0$, que formam o conjunto $Z(f) := \{p \in \mathbb{C} \text{ t.q. } f(p) = 0\}$.

Seja $f(z)$ um polinômio de grau $n \geq 1$. Se p é uma raiz de f , então $f(z) = (z - p)g(z)$ onde g é um polinômio de grau $n - 1$ (exercício). Gauss provou em 1799 o que hoje é chamado “teorema fundamental da álgebra” (o teorema 5.9), que diz que todo o polinômio de grau $n \geq 1$ admite (pelo menos) uma raiz. De consequência (exercício), um polinômio de grau $\deg(f) = n \geq 1$ factoriza no produto

$$f(z) = a_n (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)$$

onde $p_1, p_2, \dots, p_n$ são as suas n raízes, não necessariamente distintas. A fatorização é única, a menos de permutações dos fatores. Se uma raiz p é repetida k vezes, ou seja, se $f(z) = (z - p)^k g(z)$ com $g(p) \neq 0$, então o inteiro $k \in \mathbb{N}$ é chamado *multiplicidade/ordem* da raiz p , ou também “*ordem* de f no ponto p ”, e denotado por $\text{ord}(f, p) = k$. É natural chamar os pontos p onde $f(p) \neq 0$ pontos de ordem $\text{ord}(f, p) = 0$. A maneira correcta de “contar” o número de zeros de um polinômio é

$$|Z(f)| := \sum_{p \in \mathbb{C}} \text{ord}(f, p)$$

(observe que a soma é finita porque apenas um número finito de pontos têm ordem $\neq 0$). O teorema fundamental da álgebra diz então que esta soma é igual a $|Z(f)| = \deg(f)$.

Se p é uma raiz do polinômio (2.5), então $\bar{p}$ é uma raiz do polinômio $\overline{a_n} z^n + \cdots + \overline{a_1} z + \overline{a_0}$. Em particular, as raízes não reais de um polinômio com coeficientes reais (i.e. com $a_k = \overline{a_k}$) ocorrem em pares de números complexos conjugados, p e $\bar{p}$.

ex: Se p uma raiz do polinômio (2.5) de grau $n \geq 1$, então

$$f(z) - f(p) = a_n(z^n - p^n) + \cdots + a_1(z - p).$$

Use a identidade

$$z^k - p^k = (z - p)(z^{k-1} + z^{k-2}p + \cdots + zp^{k-2} + p^{k-1})$$

e deduz que $f(z) = (z - p)g(z)$ onde g é um polinômio de grau $n - 1$.

ex: Seja $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ um polinómio de grau $n \geq 1$ que possui as n raízes $p_1, p_2, \dots, p_n$ (não necessariamente distintas). Mostre que

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - p_k) = c \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{p_k}\right)$$

e calcule a constante c . Deduza que a “derivada logarítmica” $f'(z)/f(z)$ (que é moralmente a derivada de $\log f(z)$, fora dos zeros do polinómio) é dada por

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - p_k}.$$

ex: Determine um polinómio cujas raízes sejam as raízes n -ésimas da unidade, quando $n = 2, 3, \dots$ ou no caso geral.

2.4 Funções racionais

27 set 2018

Funções racionais. Uma *função racional* é o quociente

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0} \quad (2.6)$$

entre dois polinómios $g, h \in \text{Pol}(\mathbb{C})$. Podemos assumir que g e h não têm fatores (e portanto zeros) comuns, e que $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, ou seja, que $n = \deg(g)$ e $m = \deg(h)$. É evidente que f é uma função holomorfa, de fato infinitamente derivável, fora dos zeros do denominador $h(z)$. Somas, produtos e quocientes de funções racionais são funções racionais. Em particular, o espaço $\text{Rat}(\mathbb{C})$ das funções racionais forma um corpo.

Pólos. É conveniente definir $f(p) = \infty$ se p é uma raiz do denominador $h(z)$ (e não do numerador!), e chamar este ponto p um *pólo* de ordem $\text{ord}(h, p) =: -\text{ord}(f, p)$. Para definir também um valor de f em ∞ , uma possibilidade é definir a função $F(z) := f(1/z)$, e depois definir $f(\infty) := F(0)$ e $\text{ord}(f, \infty) := \text{ord}(F, 0)$. Mas

$$F(z) = z^{m-n} \frac{a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n}{b_m + b_{m-1}z + \cdots + b_1 z^{m-1} + b_0 z^m}.$$

Portanto, ∞ é um zero de f de ordem $m - n$ se $m > n$, é um pólo de f de ordem $n - m$ se $n > m$, ou é um ponto regular onde $f(\infty) = a_n/b_m \neq 0$, ∞ se $n = m$. Assim, uma função racional pode, e deve!, ser pensada como uma função contínua

$$f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

(a topologia da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$ é induzida pela métrica euclidiana em $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$). Se definimos o seu *grau* $\deg(f) := \max\{n, m\}$, então f possui exatamente $\deg(f)$ zeros e $\deg(f)$ pólos na esfera de Riemann. Resolver $f(z) = w$, com $w \in \mathbb{C}$, significa achar os zeros de $f(z) - w$. Mas é evidente que $\deg(f - w) = \deg(f)$. A conclusão é que para cada $w \in \overline{\mathbb{C}}$ existem $\deg(f)$ pontos $p \in \overline{\mathbb{C}}$ tais que $f(p) = w$.

- Determine uma função racional cujos pólos são os pontos ± 1 e cujos zeros são os pontos $\pm i$ (todos de ordem um).

Transformações de Möbius. As funções racionais de grau 1 são chamadas *transformações lineares fraccionárias*, ou *transformações de Möbius*, e têm a forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.7)$$

onde os parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ são tais que $ad - bc \neq 0$ (caso contrário a fração não é reduzida, e $f(z)$ é constante, logo de grau 0). Sendo $\deg(f) = 1$, cada $w \in \overline{\mathbb{C}}$ tem uma e uma única imagem inversa,

$$z = f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{a - cw}$$

Uma transformação de Möbius define portanto uma bijeção $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ da esfera de Riemann, tendo definido $f(\infty) := a/c$ e $f(-d/c) := \infty$ se $c \neq 0$, ou $f(\infty) = \infty$ se $c = 0$. Observe que as transformações de Möbius que preservam o ponto ∞ são as transformações afins $f(z) = az + b$, com $a \neq 0$.

Casos particulares são as translações $T_\alpha(z) = z + \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{C}$, as homotetias complexas $M_\lambda(z) = \lambda z$ com $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, e a *inversão*

$$I(z) := 1/z$$

(ao longo da circunferência unitária, pois $|z| \cdot |I(z)| = 1$). De fato, uma transformação de Möbius genérica (2.7) é uma composição de estas três transformações elementares (quais?).

ex: Descreva a inversão $f(z) = 1/z$ e a transformação $g(z) = 1/\bar{z}$ (que não é holomorfa!) usando a forma polar.

ex: Verifique que a inversão $f(z) = 1/z$ transforma circunferências e retas de $\mathbb{C}$ em circunferências ou retas. Ou seja, transforma circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ em circunferências.

ex: Determine as imagens e as imagens inversas dos pontos $0, 1, \infty \in \overline{\mathbb{C}}$ pela transformação de Möbius (2.7). Mostre que a única transformação de Möbius que fixa estes três pontos (i.e. tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(\infty) = \infty$) é a identidade $f(z) = z$.

3 Séries de potências e funções analíticas

3.1 Séries de funções

Séries. Uma *série* é uma soma infinita formal $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, onde os $z_n \in \mathbb{C}$ são elementos de uma sucessão. Se a sucessão (s_n) das *somas parciais*, definidas por $s_n := \sum_{k=0}^n z_k$, converge, e o seu limite é $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é dita *convergente* (ou *somável*), e a sua *soma* é definida $\sum_{n=0}^{\infty} z_n := s$.

A série $\sum_n z_n$ é *absolutamente convergente* se a série $\sum_n |z_n|$, formada pelos valores absolutos dos seus termos, é convergente. A convergência absoluta implica a convergência, mas existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes (chamadas *condicionalmente convergentes*), e têm um comportamento que pode parecer muito singular.¹

e.g. Série harmónica. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

é divergente. De fato, o termo genérico $1/n$ é superior ao integral $\int_n^{n+1} dx/x$, e portanto as somas parciais $\sum_{k=1}^n 1/k$ são superiores a $\log(n+1)$.

e.g. Série geométrica. A mais importante é a *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (3.1)$$

A identidade $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n)(z - 1) = z^{n+1} - 1$ implica que, se $z \neq 1$, a soma dos primeiros $n+1$ termos da progressão geométrica é

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

Em particular, quando $|z| < 1$ a série geométrica é absolutamente convergente, e a sua soma é

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

Por outro lado, se $|z| > 1$ então $|1 + z + z^2 + \dots + z^n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Comparação. Para decidir se uma série dada é absolutamente convergente, é possível “comparar” os seus termos com os termos de uma série cujo comportamento é conhecido. Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \gg 1$ (ou seja, suficientemente grande), então a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$. Em particular, se $|a_n| \leq C \lambda^n$ para alguma constante $C > 0$ e todo o $n \gg 1$, então as somas parciais da série $\sum_n |a_n|$ são limitadas por C vezes as somas parciais da série geométrica $\sum_n \lambda^n$, e, em particular, se $|\lambda| < 1$, então a série $\sum_n a_n$ é absolutamente convergente. Isto acontece quando

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1 \quad (\text{teste da raiz})$$

ou quando

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1 \quad (\text{teste da razão})$$

ex: Dê um exemplo de uma série convergente que não seja absolutamente convergente.

¹De acordo com Abel (1828), “divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.”

Sucessões e séries de funções. Seja (f_n) uma sucessão de funções $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, definidas numa região $D \subset \mathbb{C}$. Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é o *limite pontual* das f_n 's, ou $f_n \rightarrow f$ *pontualmente*, se $f_n(z) \rightarrow f(z)$ para todo o $z \in D$. Isto significa que para cada $z \in D$ e cada $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ (que depende de ε e do ponto z) tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ se $n > \bar{n}$.

Acontece que o limite pontual não herda necessariamente as boas propriedades das f_n 's. Por exemplo, o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas pode não ser uma função contínua (qual o limite pontual da sucessão $f_n(x) = x^n$ definida em $[0, 1]$?).

A *norma uniforme* no espaço das funções limitadas definidas em D é $\|f\|_\infty := \sup_{z \in D} |f(z)|$. Induzes a distância uniforme $\text{dist}_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$, que também pode fazer sentido (i.e. pode ser finita) quando f e g não são limitadas. A sucessão (f_n) converge *uniformemente* para f em D , ou $f_n \rightarrow f$ *uniformemente*, se $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ (que depende de ε mas é independente do ponto z , ou seja, “uniforme”) tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo o $z \in D$ se $n > \bar{n}$.

Teorema 3.1. *O limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Se n é suficientemente grande, então $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo o $z \in D$. Pela continuidade de f_n , existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon$ se $|z - z'| < \delta$. Então, pela desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z')| + |f_n(z') - f(z')| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

se $|z - z'| < \delta$. □

O análogo do teste de Cauchy 1.2 para a convergência uniforme é o seguinte: a sucessão de funções (f_n) converge uniformemente em D sse para todo o $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ tal que $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ para todo o $z \in D$ (ou seja, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$) quando $n, m > \bar{n}$.

Uma série de funções $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente para uma função $F(z)$ num domínio D se a sucessão das somas parciais $s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$ converge uniformemente para F . Pelo critério de Cauchy, isto acontece quando, para todo o $\varepsilon > 0$, existe um tempo $\bar{n}$ tal que

$$|s_{n+m}(z) - s_n(z)| = |f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+m}(z)| < \varepsilon$$

para todo o $z \in D$ e todos os $n > \bar{n}$ e $m \geq 1$. Se os termos da série são limitados pelos termos de uma série numérica $\sum_n a_n$, ou seja, $|f_n(z)| \leq a_n$, então

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+m}(z)| \leq |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}|$$

Em particular,

Teorema 3.2 (Weierstrass). *Se $\sum_n a_n$ é uma série (numérica) convergente e $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ para todo o n suficientemente grande, então a série de funções $\sum_n f_n(z)$ é uniformemente convergente.*

e.g. Série geométrica. A *série geométrica*

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge no disco unitário $\mathbb{D}$ para a função

$$\frac{1}{1-z}.$$

Converge uniformemente em cada disco $\overline{D_\rho(0)}$ de raio $0 < \rho < 1$ (pois, se $|z| < \rho$, os termos da série são limitados por $|z^n| \leq \rho^n$). É claro que diverge quando $z = 1 \in \partial\mathbb{D}$, e quando $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ (embora a função $1/(1-z)$ esteja definida em todo o plano exceto o ponto $z = 1$).

3.2 Séries de potências e funções analíticas

1 out 2018

Séries de potências. As séries de funções mais elementares são as *séries de potências*

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n,$$

com coeficientes $c_k \in \mathbb{C}$, cujas somas parciais são polinômios $s_n = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$. Usando translações na variável independente, podemos ainda construir séries de potências

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - p)^n = c_0 + c_1 (z - p) + c_2 (z - p)^2 + \dots \quad (3.2)$$

em torno de um ponto arbitrário $p \in \mathbb{C}$.

O “raio de convergência” R da série de potências (3.2) é dado pela *fórmula de Hadamard*

$$1/R := \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \quad (3.3)$$

O “disco de convergência” é $D := D_R(p)$ (se o “limsup” é ∞ , então $R = 0$ e $D = \emptyset$; se o “limsup” é 0, então $R = \infty$, e $D = \mathbb{C}$). Ou seja, como é fácil ver usando o teste da raiz, a série de potências (3.2) converge absolutamente para cada $z \in D$, e converge uniformemente (e portanto define uma função contínua) em cada subconjunto compacto $K \subset D$ (por exemplo, em cada disco fechado $\overline{D}_r(p)$ com $r < R$).

Funções analíticas. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, definida numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, é *analítica*, ou *representável por séries de potências*, em Ω se à volta de cada $p \in \Omega$ existe um disco $D_r(p)$ e uma série de potências (3.2) que converge para $f(z)$ para todos os $z \in D_r(p)$.

Teorema 3.3 (Abel). *Se f é analítica em Ω então é também holomorfa em D , i.e. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, e a sua derivada f' também é analítica em Ω . Em particular, se*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - p)^n$$

num disco $D_r(p) \subset \Omega$, então neste mesmo disco a derivada f' é a soma da série de potências obtida derivando termo a termo a série de potências de f , ou seja,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - p)^{n-1}.$$

Demonstração. [Ah78, Ru87]. □

Por indução, se f é analítica em Ω , então todas as suas derivadas são analíticas, e portanto holomorfas, em Ω . As séries de potências das derivadas, num disco $D_r(p)$ onde f é dada por (3.2), são obtidas derivando termo a termo a séries de f , ou seja,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z - p)^{n-k}$$

Isto implica que os coeficientes c_k de uma série de potência (3.2) que representa uma função analítica f numa vizinhança de um ponto p são únicos, pois

$$c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!}$$

ex: Derive a série geométrica para obter as séries de potências de

$$\frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(1-z)^3}$$

em torno de 0.

ex: Determine o disco de convergência das seguintes séries de potências, e, se possível, uma expressão compacta para as funções que definem.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n & \quad \sum_{n \geq 0} n z^n & \quad \sum_{n \geq 0} n^n z^n & \quad 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots \\ \sum_{n \geq 0} 2^n z^n & \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} z^{2n} & \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^n \end{aligned}$$

ex: Mostre que, se $|\zeta| = \rho$ e $|z| < \rho$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{z}{\zeta} + \left(\frac{z}{\zeta} \right)^2 + \left(\frac{z}{\zeta} \right)^3 + \dots \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

3.3 Exponencial e funções trigonométricas

2 out 2018

Exponencial. A função exponencial $\exp(z)$, ou e^z , é a (única) solução da equação diferencial

$$f' = f \tag{3.4}$$

com condição inicial $f(0) = 1$. A conjectura $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é solução formal de $f' = f$ se $na_n = a_{n-1}$. O valor inicial $f(0) = 1$ determina $a_0 = 1$ e de consequência todos os coeficientes, que são $a_n = 1/n!$. Portanto, a solução formal é definida pela série de potências

$$e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots \tag{3.5}$$

É imediato verificar que $\lim_{n \rightarrow \infty} |n!|^{1/n} = \infty$ (exercício). Portanto, pela fórmula de Hadamard (3.3), o raio de convergência da série (3.5) é $R = \infty$, e pelo teorema de Abel 3.3, o exponencial é uma função inteira.

Um cálculo mostra que a derivada da função inteira $h(z) = e^{z+a}e^{-z}$ é $h' = 0$. Portanto h é constante e o seu valor é $h(z) = h(0) = e^a$. Isto implica a “fórmula de adição”

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Em particular, $e^z e^{-z} = 1$, e portanto $e^z \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. A função exponencial define um homomorfismo $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ do grupo aditivo $\mathbb{C}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$.

Se $x \in \mathbb{R}$, então e^x é real e positivo, com derivada $(e^x)' = e^x > 0$. De fato, $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, e a restrição do exponencial define uma bijeção crescente $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$.

Se $t \in \mathbb{R}$, então o conjugado de e^{it} é $\overline{e^{it}} = e^{-it}$. Em particular $|e^{it}| = e^{it}e^{-it} = 1$, e portanto o exponencial envia o eixo imaginário na circunferência unitária, i.e. $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Observe também que $|e^{x+iy}| = e^x$. É possível então definir as funções reais de uma variável real “cos” e “sin” usando a fórmula de Euler

$$e^{it} =: \cos(t) + i \sin(t),$$

quando $t \in \mathbb{R}$. A equação diferencial (3.4) que define o exponencial implica que $\cos' = -\sin$ e $\sin' = \cos$.

A função complexa de uma variável real $t \mapsto e^{it}$ é uma função periódica da reta real sobre a circunferência unitária (umas demonstrações estão em [Ah78, Ru87]), e o seu período (positivo)

é chamado 2π . A prova consiste em procurar o primeiro zero da função $\cos(t)$ quando $t \geq 0$, e observar que neste ponto c acontece que $e^{ic} = i$ e portanto $e^{4ic} = 1$. Em particular,

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

O número $i2\pi$ é também um período de e^z , ou seja, $e^{z+2\pi in} = e^z$ se $n \in \mathbb{Z}$. Então o exponencial $z \mapsto w = e^z$ envia a faixa $F = \{-\pi < \Im(z) \leq \pi\}$ sobre $\mathbb{C}^\times$, as imagens das retas $\Re(z) = c$ sendo as circunferências $|w| = e^c$, e as imagens das retas $\Im(z) = d$ sendo as semiretas $\text{Arg}(z) = d$. A imagem inversa de um ponto $w = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$ é um conjunto numerável de pontos do plano complexo que diferem por múltiplos inteiros de $2\pi i$, ou seja, o conjunto dos pontos $z = \log \rho + i(\theta + 2\pi n)$ com $n \in \mathbb{Z}$.

Funções trigonométricas. Em geral, as funções trigonométricas complexas são definidas por

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

e

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

As funções hiperbólicas são definidas por

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad e \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Assim, existe apenas uma função transcendente elementar, o exponencial, todas as outras sendo obtidas ao fazer somas, produtos e quocientes de exponenciais!

Fórmula de Euler. A equação diferencial $f' = f$, que define o exponencial, pode também ser resolvida numericamente. Por simplicidade, consideramos o problema de aproximar o valor de e^x com x real, e positivo. A ideia de Euler (o método mais simples para resolver numericamente equações diferenciais) consiste em dividir o intervalo $[0, x]$ em N subintervalos de igual comprimento $\varepsilon = x/N$, pequeno, por meio dos pontos $x_n = xn/N$, com $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Os valores de f nestes pontos são obtidos por recursão, usando a aproximação linear $f(x_{n+1}) \simeq f(x_n) + f'(x_n)\varepsilon$, e a equação diferencial, que diz que $f'(x_n) = f(x_n)$. A condição inicial $f(0) = 1$ então implica $f(x_1) \simeq (1 - \varepsilon)$, $f(x_2) \simeq (1 - \varepsilon)^2$, $f(x_3) \simeq (1 - \varepsilon)^3$, $\dots$, $f(x_N) \simeq (1 - \varepsilon)^N$. É natural esperar que o verdadeiro valor de e^x , ou em geral de e^z com $z \in \mathbb{C}$, seja obtido passando ao limite quando $N \rightarrow \infty$. Esta é mais uma famosa *fórmula de Euler*

$$e^z = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N$$

Esta fórmula diz que, moralmente, “o exponencial é um polinômio com uma única raiz de ordem ∞ no ponto ∞ ”, ou seja,

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{\infty}\right)^{+\infty}$$

(onde o ∞ no denominador deve ser pensado como o ponto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, e o $+\infty$ no expoente é a multiplicidade da raiz, ou seja, o grau, de e^z em $z = \infty$)

ex: Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

ex: Calcule

$$\cos(i) \quad \sin(i) \quad \sin(1+i)$$

ex: Resolva

$$e^z = 2 \quad \cos(z) = 2$$

ex: Use a fórmula de Euler para provar as fórmulas

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) \mp \sin(\theta) \sin(\phi)$$

e

$$\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \sin(\phi) \pm \sin(\theta) \cos(\phi).$$

ex: Deduza as fórmulas de adição para $\cosh(z)$ e $\sinh(z)$.

4 Integração complexa e teorema de Cauchy

4.1 Contornos

4 out 2018

Caminhos e curvas. Um *caminho* na região $\Omega \subset \mathbb{C}$ do plano complexo é uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ definida num intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. A imagem $\gamma([a, b])$ (ou simplesmente γ , com abuso de linguagem) é uma *curva*, do ponto $\gamma(a)$ até o ponto $\gamma(b)$.

Se $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \Omega$ são dois caminhos com $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, então a *justaposição* é o caminho $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \Omega$, definido por $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \gamma_1(t)$ se $a \leq t \leq b$ e por $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \gamma_2(t)$ se $b \leq t \leq c$. O caminho *inverso* de $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é o caminho $\gamma^{-1} : [b, a] \rightarrow \mathbb{C}$, definido por $\gamma^{-1}(t) := \gamma(-t)$.

É importante observar que uma curva é compacta, sendo a imagem de um compacto por uma função contínua. O caminho/curva γ é *fechado* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Os caminhos fechados são também chamados *laços*. Um caminho/curva é *simples* quando $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ se $a < t < s < b$, ou seja, quando não tem auto-interseções.

Contornos. Se $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, com x e y funções reais do tempo t , então a *derivada* do caminho γ no instante t é o número complexo $\dot{\gamma}(t) := \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$. Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ com derivada contínua (e limites laterais finitos nos extremos) e tal que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todos os tempos $t \in [a, b]$ é chamado *regular* (em inglês *smooth*).

Um *contorno* é uma justaposição de (um número finito de) caminhos regulares (ou seja, é possível dividir $[a, b]$ em um número finito de sub-intervalos $[a_k, b_k]$ onde o caminho tem derivada contínua). Exemplos importantes são *contornos poligonais* (ou *linhas quebradas*), formados por justaposição de um número finito de segmentos parametrizados com velocidade constante.

Comprimento. O *comprimento* do contorno γ é o integral

$$|\gamma| := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Uma definição alternativa do comprimento, válida para caminhos não necessariamente diferenciáveis, é o $\sup \sum_{k=0}^n |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|$ sobre todas as partições $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$ em um número finito de sub-intervalos.

Reparametrizações. Uma *reparametrização* do contorno $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$ crescente e derivável, com derivada $dt/d\tau > 0$, que induz o contorno $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, definido por $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t(\tau))$. A escolha $t(\tau) = a + \tau(b - a)$ mostra que é sempre possível reparametrizar um contorno (ou um caminho) de forma a ter $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.

O comprimento de um contorno é independente da parametrização. De fato,

$$\int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_c^d \left| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right| d\tau = \int_c^d \left| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} \right| d\tau.$$

ex: $\gamma(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$, com $t \in [0, 1]$, descreve o segmento de $\gamma(0) = \alpha$ até $\gamma(1) = \beta$, percorrido com velocidade constante $\dot{\gamma}(t) = \beta - \alpha$.

ex: $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, descreve a circunferência de raio $\rho > 0$ centrada em a , percorrida no sentido anti-horário.

Curvas de Jordan. Uma curva genérica, a imagem do intervalo $[0, 1]$ por uma função contínua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, pode ser um objeto complicado. Nem é claro que seja uma figura “unidimensional” (seja qual for a definição de dimensão). Por exemplo, existem funções contínuas de $[0, 1]$ sobre o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$ (hoje chamadas *curvas de Peano*², ou *space filling curves*). Tais curvas não são injetivas. Por outro lado, uma curva fechada e simples “divide o plano em duas

²G. Peano, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, *Mathematische Annalen* **36** (1890), 157-160.

partes”. Este é o conteúdo do famoso *teorema da curva de Jordan*³, cuja prova (elementar mas difícil!) pode ser encontrada, por exemplo, em [Sm03].

Teorema 4.1 (Jordan). *Seja γ uma curva fechada e simples. O seu complementar $\mathbb{C} \setminus \gamma$ é a reunião disjunta de dois subconjuntos abertos e conexos: uma região limitada Ω e uma região ilimitada Ω_∞ , cuja fronteira comum é a curva γ .*

Uma curva fechada e simples é chamada *curva de Jordan*. A região limitada Ω é chamada *interior* da γ , e a região ilimitada Ω_∞ é chamada *exterior* de γ . A *orientação positiva* de um caminho fechado simples é a orientação tal que “ao deslocarmos-nos ao longo do caminho observamos o interior à nossa esquerda”.

Regiões simplesmente conexas. Uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ é *simplesmente conexa* quando o interior de todo o caminho fechado simples γ em Ω está contido em Ω . Exemplos são as regiões *convexas* $D \subset \mathbb{C}$, tais que se $a, b \in D$ então $a + t(b - a) \in D \forall t \in [0, 1]$.

Existem outras definições equivalentes. Por exemplo, $\Omega \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexa sse o seu complementar $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ é conexo.

A definição usual usa o conceito de “homotopia”. Os laços $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ são *homótopos* (em Ω) se existe uma função contínua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, dita *homotopia* entre γ_0 e γ_1 , tal que $\gamma_s = \Gamma(\cdot, s)$ é um laço para todo o $s \in [0, 1]$, e $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$ e $\Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$. Ou seja, uma homotopia é uma “deformação contínua do laço γ_0 no laço γ_1 ”. Ser homótopos é uma relação de equivalência no espaço dos laços (definidos numa região fixada Ω), denotada por $\gamma_0 \sim \gamma_1$, e um laço homótopo a um laço constante (i.e. $\gamma(t) = p$ para todo o t) é dito *contrátil*. Uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexa sse todo o laço em Ω é “contrátil”.

4.2 Integrais de contorno

Integrais de contorno. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ um contorno e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua (não necessariamente holomorfa!) definida numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ contendo a curva $\gamma([a, b])$. O “integral da função f (ou, melhor, da forma $f(z)dz$) ao longo do contorno γ ” é o número complexo

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

Se γ é um contorno fechado, i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$, então é usada a notação é $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

Aproximação e estimação. A restrição de f à curva $\gamma([a, b])$, que é compacta, é uniformemente contínua. Portanto, se $\mathcal{P}$ é uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$ em um número finito de sub-intervalos de comprimento limitado por $|\mathcal{P}| := \sup_k |t_{k+1} - t_k|$, e se os $z_k := \gamma(t_k)$ ’s são os correspondentes pontos de γ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_k f(z_k) (z_{k+1} - z_k)$$

Isto significa que é possível aproximar $\int_{\gamma} f dz$, com precisão arbitrária, pelo integral ao longo de uma linha quebrada. Ou seja, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma linha quebrada ℓ , com vértices em γ , tal que

$$\left| \int_{\gamma} f dz - \int_{\ell} f dz \right| < \varepsilon.$$

Em particular,

Teorema 4.2. *Se o valor absoluto da função f é limitado por M nos pontos de γ , e $|\gamma|$ denota o comprimento do contorno γ , então*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M |\gamma|. \quad (4.1)$$

³C. Jordan, *Cours d’Analyse de l’École Polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.

Uma consequência importante é que “o limite uniforme comuta com o integral”, ou seja,

Teorema 4.3. *Se (f_n) é uma sucessão de funções contínuas definidas no domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ que converge uniformemente para a função (contínua) f , e se γ é um contorno em Ω , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} f dz.$$

Demonstração. Pela desigualdade (4.1),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f_n dz - \int_{\gamma} f dz \right| &= \left| \int_{\gamma} (f_n - f) dz \right| \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty} |\gamma| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. □

Em particular, se a série de funções contínuas $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente (numa região que contém a curva γ), então é possível trocar a soma e o integral, ou seja,

$$\int_{\gamma} \left(\sum_n f_n(z) \right) dz = \sum_n \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Propriedades do integral. O integral de contorno é aditivo. Ou seja, se $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2 : [b, d] \rightarrow \Omega$ são dois contornos com $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, então o integral de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ao longo da justaposição $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ é

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

O integral de contorno não depende da parametrização, mas apenas da orientação do contorno. De fato, se $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é diferenciável, com derivada $dt/d\tau > 0$, e se $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \Omega$ é o contorno $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t(\tau))$, então

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_c^d f(\tilde{\gamma}(\tau)) \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} d\tau = \int_c^d f(\gamma(t(\tau))) \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

Por outro lado, ao mudar a orientação do contorno, acontece que

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Em particular, o integral ao longo do contorno $\gamma \cdot \gamma^{-1}$ é zero.

Covariância. A leitura correcta (mas não utilizada!) de $\int_{\gamma} f(z) dz$ é “integral da forma $f(z) dz$ ao longo do contorno γ ”, devido à seguinte “covariância”, ou regra de transformação. Se $g \in \mathcal{O}(\Omega')$ é uma função holomorfa com valores em Ω e derivada contínua (esta hipótese é desnecessária, pois mostraremos que as funções holomorfas são infinitamente deriváveis!), que envia um contorno $\eta : [a, b] \rightarrow \Omega'$ no contorno $\gamma = g \circ \eta : [a, b] \rightarrow \Omega$, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(g(z)) g'(z) dz.$$

(o que justifica a notação).

ex: Calcule, se possível,

$$\int_{\gamma} z \, dz \quad \int_{\gamma} (i - z^2) \, dz \quad \int_{\gamma} x \, dz \quad \int_{\gamma} z^n \, dz \quad \int_{\gamma} \bar{z} \, dz$$

quando γ é o segmento $t \mapsto t(3+i)$, com $t \in [0, 1]$, quando γ é o arco de parábola $t \mapsto t + it^2$, com $t \in [-1, 1]$, quando γ é o arco de circunferência $\theta \mapsto re^{i\theta}$, com $\theta \in [0, \pi]$ e $r > 0$, e quando γ é a espiral $t \mapsto e^{(i-1)t}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

ex: Calcule (as circunferências são orientadas positivamente e parametrizada da forma natural: a circunferência $|z - a| = \rho$ é a imagem de $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$)

$$\oint_{|z|=3} z^2 \, dz \quad \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1} \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \quad \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z-i}.$$

Primitivas. A função holomorfa $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ é dita *primitiva* da função contínua $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ se $F'(z) = f(z)$ (nos pontos de uma região Ω onde estão definidas). Se $F' = f$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ é um contorno de $\gamma(a) = \alpha$ até $\gamma(b) = \beta$, então

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

Ou seja, $\int_{\gamma} f \, dz$ apenas depende dos pontos inicial e final de γ . Em particular, $\oint_{\gamma} f \, dz = 0$ para todos os contornos fechados. De fato, vale o recíproco:

Teorema 4.4. Uma função contínua $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ admite uma primitiva $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ sse $\oint_{\gamma} f(z) \, dz = 0$ para todos os contornos fechados γ em Ω .

Demonstração. De fato, basta fixar um ponto $\alpha \in \Omega$, e definir, para cada ponto $p \in \Omega$, $F(p) = \int_{\gamma} f(z) \, dz$, onde γ é um caminho arbitrário de $\gamma(a) = \alpha$ até $\gamma(b) = p \in \Omega$ (a hipótese diz que este integral apenas depende de α e p). Então a diferença $F(p+z) - F(p)$, se $|z|$ é suficientemente pequeno, é igual ao integral de f ao longo, por exemplo, do segmento $\gamma(t) = p + tz$, com $t \in [0, 1]$, ou seja,

$$F(p+z) - F(p) = \int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_0^1 f(p+tz) z \, dt.$$

Pela continuidade de f , este integral é igual a $f(p)z + o(z)$, e portanto F é derivável em p e a sua derivada é $F'(p) = f(p)$. $\square$

ex: Calcule

$$\int_{\gamma} e^z \, dz \quad \int_{\gamma} (z^3 - iz^2 + 7 - i) \, dz \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$$

quando γ é o contorno $t \mapsto \sin(\pi t) + ie^t$, com $t \in [0, 1]$.

ex: Calcule

$$\oint_{|z|=\rho} z^n \, dz \quad \oint_{|z|=\rho} e^z \, dz \quad \oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a}$$

ex: Mostre que se γ é o arco de circunferência $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$ com $t \in [\theta_1, \theta_2]$, então

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = i(\theta_2 - \theta_1).$$

ex: Mostre que

$$\oint_{|z-a|=\rho} (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ i2\pi & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

ex: A função $f(z) = 1/z$, definida em $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, admite primitivas? E $f(z) = \bar{z}$?

4.3 Teorema de Cauchy-Goursat

8 out 2018

Campos conservativos e teorema de Green-Stokes. O diferencial $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ é dito *exato* no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se existe uma função $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , dita *primitiva*, tal que $dU = pdx + qdy$, ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = q.$$

Uma primitiva pode ser pensada como um *potencial* do campo de vetores $\mathbf{F} := -\nabla U = -(p, q)$. Se c é um valor *regular* de U (i.e. se $\nabla U \neq 0$ nos pontos onde $U(x, y) = c$), então a curva de nível

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } U(x, y) = c\},$$

ortogonal ao campo de vetores $\mathbf{F}$, é uma solução implícita da *equação diferencial exata*

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0.$$

O *teorema de Euler-Poincaré* diz que

Teorema 4.5 (Euler-Poincaré). *O diferencial $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$, definido num domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (por exemplo convexo) é exato se e só se é “fechado”, i.e. se*

$$d\omega := \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0 \quad \text{ou seja, se} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Neste caso, um potencial é dado pelo integral de linha

$$U(x, y) = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um contorno entre um ponto fixado $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0) \in \Omega$ e o ponto genérico $\mathbf{r}(1) = (x, y)$ (ou seja, $U(x, y)$ é trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para deslocar uma partícula do ponto (x_0, y_0) até ao ponto (x, y)). Por exemplo, se Ω é um retângulo, é possível escolher um caminho horizontal de (x_0, y_0) até (x, y_0) , e depois um caminho vertical de (x, y_0) até (x, y) , e definir um potencial

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x p(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y q(x, t) dt.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região do plano limitada por um contorno fechado simples $\partial\Omega$. Então o *teorema de Green-Stokes* diz que o integral $\oint_{\partial\Omega} \omega$ ao longo da curva $\partial\Omega$, orientada positivamente, é igual ao integral $\int_{\Omega} d\omega$, ou seja,

Teorema 4.6 (Green-Stokes). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma região limitada pelo contorno fechado simples $\partial\Omega$, e $pdx + qdy$ é uma forma diferencial com derivadas parciais contínuas em Ω , então*

$$\oint_{\partial\Omega} pdx + qdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Teorema de Cauchy-Goursat. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região limitada, cuja fronteira é uma reunião disjunta $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ de contornos fechados simples γ_k . O integral de uma função contínua $f(z)$ ao longo da fronteira $\partial\Omega$ é definido por*

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z) dz,$$

onde os caminhos γ_k são orientados de maneira tal que o domínio fica à esquerda de cada γ_k .

Se f é holomorfa em Ω , e assumimos também que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ (consequência da derivabilidade complexa, mas um fato que ainda não sabemos provar!), então as equações de Cauchy-Riemann (2.4) implicam o seguinte milagre:

$$\begin{aligned} d(fdz) &= d((u+iv)(dx+idy)) \\ &= d((u+iv)dx + (iu-v)dy) \\ &= \left(i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Green-Stokes 4.6 o integral de fdz ao longo de $\partial\Omega$ é zero. Este é o conteúdo do seguinte resultado, que é a chave da teoria da integração no plano complexo.

Teorema 4.7 (Cauchy-Goursat). *Se f é holomorfa numa vizinhança de Ω , então*

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0} \quad (4.2)$$

Demonstração. A demonstração de Goursat usa apenas a diferenciabilidade de f , ou seja, a aproximação linear $f(a+z) \simeq \alpha + \lambda z$, válida para z pequenos, e o integral elementar $\oint_{\gamma} (\alpha + \lambda z) dz = 0$. O primeiro passo é observar que é possível aproximar Ω com uma reunião de triângulos (ou retângulos), a sua fronteira com uma reunião de linhas quebradas fechadas e simples, e que portanto é suficiente provar o teorema em cada triângulo (pois os integrais de f nos lados dos triângulos que não fazem parte da fronteira anulam-se dois a dois (fazer um desenho!)). Seja T um triângulo, f uma função holomorfa numa vizinhança de T , e $|\oint_{\partial T} f(z) dz| = \eta$. Os pontos médios dos lados dividem o triângulo T em 4 sub-triângulos similares, e a soma dos integrais de f ao longo destes 4 sub-triângulos é igual a $\oint_{\partial T} f dz$. Portanto, existe um destes sub-triângulos, que chamamos T_1 , tal que

$$\left| \oint_{\partial T_1} f(z) dz \right| \geq \eta/4$$

Podemos iterar o processo, e construir a família decrescente de triângulos $\cdots \subset T_n \subset T_{n-1} \subset \cdots$ tais que

$$\left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| \geq \eta/4^n$$

Se ℓ é o comprimento do maior dos lados de T , então o diâmetro dos T_n é $\ell/2^n$, que $\rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $p \in T$ a interseção dos T_n 's. Como f é holomorfa, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z) - \alpha}{z - p} - \lambda \right| < \varepsilon \quad \text{logo} \quad |f(z) - \alpha - \lambda(z - p)| < \varepsilon|z - p|$$

se $0 < |z - p| < \delta$, onde $\alpha = f(p)$ e $\lambda = f'(p)$. Se n é suficientemente grande, o triângulo T_n está contido no disco de raio δ à volta de p . Como $\oint_{\partial T_n} (\alpha + \lambda(z - p)) dz = 0$ (porque as funções afins têm primitivas),

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| &= \left| \oint_{\partial T_n} (f(z) - \alpha - \lambda(z - p)) dz \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \oint_{\partial T_n} (z - p) dz \right| \end{aligned}$$

Neste último integral, $|z - p|$ é limitado pelo diâmetro de T_n , que é $\ell/2^n$, e o comprimento de ∂T_n é limitado por $3\ell/2^n$. Logo, pela desigualdade (4.1),

$$0 \leq \eta/4^n \leq \left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \ell^2/4^n$$

A arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ implica que $\eta = 0$. □

Em particular,

Teorema 4.8 (Cauchy). *Se f é holomorfa na região Ω simplesmente conexa, por exemplo, convexa (como um retângulo ou um disco), então*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para todos os contornos fechados $\gamma \subset \Omega$.

ex: Se $f = u + iv$, com u e v reais, então

$$f dz = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a $d(f dz) = 0$.

ex: Calcule

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z-3} dz & \quad \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i} dz & \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z+2} \\ \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+4} dz & \quad \oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

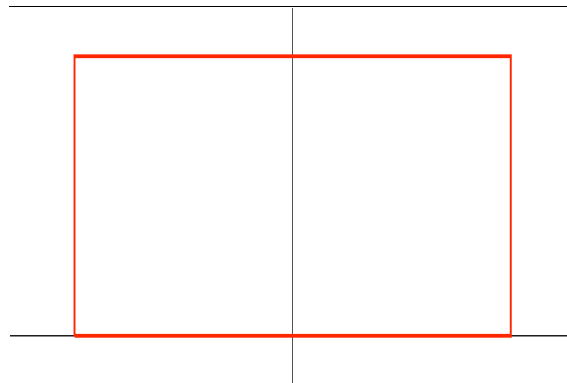
Integrais gaussianos. Uma *gaussiana* é uma função do género $g(x) = ce^{-\lambda x^2}$, onde c e λ são dois parâmetros reais positivos. O cálculo

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

mostra que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}}, \quad \text{ou seja,} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1}.$$

A função $f(z) = e^{-\pi z^2}$ é inteira. Portanto, o seu integral $\oint_{\gamma} e^{-\pi z^2} dz$ ao longo do retângulo γ de vértices $\pm R$ e $\pm R + i\xi$ (com ξ real) é nulo.



Mas este integral é igual à soma

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx + i \int_0^{\xi} e^{-\pi(R+iy)^2} dy - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx - i \int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+iy)^2} dy$$

No limite quando $R \rightarrow \infty$, os dois integrais que formam a parte imaginária tendem para 0, pois o valor absoluto do integrando é limitado por $e^{-\pi(R^2 - \xi^2)}$. O resultado é que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}}$$

(ou seja, “a gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ é um ponto fixo da transformada de Fourier”).

ex: Calcule o integral gaussiano genérico

$$\int_{-\infty}^{\infty} c e^{-\lambda x^2} dx.$$

ex: Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 / \lambda} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \lambda \xi^2}$$

e.g. Integrais de Fresnel. Os integrais de Fresnel são as funções transcendentais

$$C(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

$$S(x) := \int_0^x \sin(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

(as séries de potências são obtidas integrando as séries de potências das partes real e imaginária de e^{it^2}). A função

$$e^{iz^2} = \cos(z^2) + i \sin(z^2)$$

é inteira. Portanto, o seu integral $\oint_{\gamma} e^{iz^2} dz$ ao longo do setor angular γ formado pelos segmentos de 0 até $R > 0$, pelo arco de circunferência Re^{it} com $t \in [0, \pi/4]$ e pelo segmento de $Re^{i\pi/4}$ até 0, é nulo. Mas este integral é igual à soma

$$\int_0^R e^{it^2} dt + i \int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos(2t) + i \sin(2t))} R dt - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt$$

No limite quando $R \rightarrow \infty$, o segundo integral tende para 0. De fato, o valor absoluto da função integranda é limitado por $Re^{-R^2 \sin(2t)} \leq Re^{-(4R^2/\pi)t}$ (pois $\sin(\theta) \geq (2/\pi)\theta$ se $0 \leq \theta \leq \pi/2$), logo o valor absoluto do segundo integral é limitado por ([Sm03])

$$R \int_0^{\pi/4} e^{-(4R^2/\pi)t} dt = R \frac{1 - e^{-R^2}}{4R^2/\pi} \leq \frac{\pi}{4R}.$$

O terceiro integral é proporcional ao integral gaussiano $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, e é dado por $e^{-i\pi/4} \sqrt{\pi}/4$. O resultado é que os limites dos integrais de Fresnel $C(x)$ e $S(x)$ quando $x \rightarrow \infty$ são

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\pi/8}.$$

e.g. Integrais tipo Fresnel. Uma generalização são integrais do género

$$\int_0^{\infty} e^{i\lambda x^n} dx$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. A função $e^{i\lambda z^n}$ é inteira. Se γ denota o contorno que limita um setor angular de amplitude $\pi/2n$ e raio R , então

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma} e^{i\lambda z^n} dz \\ &= \int_0^R e^{i\lambda r^n} dr + \int_0^{\pi/2n} e^{i\lambda R(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))} iRe^{i\theta} d\theta - e^{i\pi/2n} \int_0^R e^{-\lambda r^n} dr \end{aligned}$$

O limite quando $R \rightarrow \infty$ do primeiro integral é o que queremos calcular. Quando $R \rightarrow \infty$, o segundo integral tende para zero, porque na região de integração $\sin(n\theta)$ é positivo. O limite do terceiro integral quando $R \rightarrow \infty$ pode ser calculado usando a substituição $t = \lambda r^n$,

$$\int_0^R e^{-\lambda r^n} dr = \frac{\lambda^{-1/n}}{n} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{\lambda^{-1/n}}{n} \Gamma(1/n) = \lambda^{-1/n} \Gamma(1 + 1/n)$$

A conclusão é que

$$\int_0^\infty e^{i\lambda r^n} dr = e^{i\pi/2n} \lambda^{-1/n} \Gamma(1 + 1/n)$$

Em particular, os integrais de Fresnel são

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\pm i\lambda r^2} dr = \sqrt{\pi/\lambda} e^{\pm i\pi/4} \quad (4.3)$$

4.4 Logaritmos

Logaritmos. Um *logaritmo* do número complexo $z \neq 0$ é um número complexo w tal que $e^w = z$. Se $w = r + i\theta \neq 0$, com $r, \theta \in \mathbb{R}$, então $e^w = z$ sse

$$e^r = |z| \quad \text{e} \quad e^{i\theta} = \frac{z}{|z|},$$

e portanto sse $r = \log |z| > 0$ é o logaritmo real do número positivo $|z|$, e θ é um argumento de z , ou seja, um ângulo tal que $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = z/|z|$, definido a menos de múltiplos inteiros de 2π . Ou seja, o logaritmo complexo pode ser definido como sendo a “função multivalorada” (em inglês, “multivalued function”) que envia um número complexo $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$, no conjunto enumerável de pontos

$$\log(\rho e^{i\theta}) = \log(|z|) + i \arg(z) = \log(\rho) + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z}).$$

Potências. É natural então definir *potências (não inteira)* z^α , com $z \in \mathbb{C}^\times$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, por meio da fórmula

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log(z))$$

Quando o argumento é um número real $z = x > 0$, esta é uma função bem definida se $\log$ é o logaritmo natural de uma variável real positiva. Em geral, se $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$, então z^α é a função multivalorada que assume o conjunto de valores

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log \rho + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z}))}$$

Por exemplo, $i^\alpha = e^{i\alpha\pi/2} e^{i\alpha 2\pi n}$, com $n \in \mathbb{Z}$. Se α é real e irracional, um teorema famoso de Kronecker⁴ ([HW59] XXIII, Theorems 438, 439 and 440) diz que os pontos $e^{i\alpha 2\pi n}$, com $n \in \mathbb{Z}$, formam um conjunto denso na circunferência unitária!

⁴L. Kronecker, Die Periodensysteme von Funktionen Reeller Variablen, *Berliner Sitzungsberichte* (1884), 1071-1080.

L. Kronecker, Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, *Monatsber. Königlich. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1884), 1179-1193, 1271-1299.

Ramos do logaritmo. Para definir um logaritmo contínuo (e de consequência holomorfo), uma possibilidade é cortar o plano ao longo de uma semi-reta da origem ℓ , e restringir a função a uma região simplesmente conexa $\mathbb{C}^\times \setminus \ell$ (uma alternativa é estender o domínio da função a uma “superfície de Riemann” ...). Por exemplo, é possível definir um *logaritmo principal*, $\text{Log} : \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$, escolhendo o argumento principal $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$.

Em geral, se $\Omega \subset \mathbb{C}^\times$ é uma região simplesmente conexa que não contém a origem, então pelo teorema de Cauchy $\oint_\gamma dz/z = 0$ para todos os contornos fechados $\gamma \subset \Omega$. Portanto, fixado um ponto $p = e^\alpha \in \Omega$, podemos definir uma primitiva de $1/z$ como o integral

$$L(z) := \alpha + \int_p^z \frac{dz}{z}$$

ao longo de um contorno arbitrário de p até $z \in \Omega$. Então $L'(z) = 1/z$ e $L(p) = \alpha$. A função $e^{L(z)}/z$ tem derivada nula, logo é constante e igual a $e^{L(z)}/z = e^{L(p)}/p = 1$. Portanto

$$e^{L(z)} = z$$

e é natural chamar L um *ramo do logaritmo*.

Um exemplo natural é escolher $\Omega = \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_-$ (i.e. retirar do plano a semi-reta dos reais não positivos) e o ponto $p = 1 = e^0$. Então L é o logaritmo principal, pois, se $z = \rho e^{i\theta}$ com $\rho > 0$ e $\theta \in (-\pi, \pi)$, então $L(z) = \log(\rho) + i\theta$.

ex: Calcule

$$\log(i) \quad \text{Log}(-i) \quad 2^{1+i} \quad i^{-i} \quad (-1)^{2i}$$

ex: Resolva as equações

$$\sin(z) = 2 \quad \log(z+1) = i \quad e^z = 2 \quad e^z = i \quad \cosh(z) = 1$$

ex: Se $w = \sin(z)$, então $Z := e^{iz}$ satisfaz $Z^2 - 2i\omega Z - 1 = 0$. Resolva para Z e deduza

$$\arcsin(w) = i \log(iw \pm \sqrt{1-\omega}) .$$

Determine uma fórmula análoga para $\arccos(w)$.

5 Fórmula integral de Cauchy e séries de Taylor

5.1 Fórmula de Cauchy

11 out 2017

Índice. Todas as potências z^n , com $n \neq -1$, admitem uma primitiva. Portanto, o “único” integral que é preciso calcular em análise complexa é o integral de $1/z$, que é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se a circunferência $|z| = \rho$ é parametrizada por $\gamma(t) = \rho e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, então $dz/z = i dt$ (ou seja, dz/z é i vezes o diferencial do argumento de z), e portanto

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Em geral, sejam $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ um contorno fechado (não necessariamente simples) e $p \in \mathbb{C}$ um ponto situado fora da curva $\gamma([0, 1])$. O índice de p relativamente a γ , ou o número de rotações/voltas (em inglês, “winding number”) de γ em torno de p , é o inteiro

$$\text{Ind}(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - p} \quad (5.1)$$

Informalmente, é “o número de voltas”, positivo se no sentido anti-horário e negativo se no sentido horário, que o vetor entre $\gamma(t)$ e p dá quando o tempo t percorre o intervalo $[0, 1]$.

Teorema 5.1. Para cada $p \notin \gamma([0, 1])$, o índice é um número inteiro, i.e. $\text{Ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$. Em quanto função de p , $\text{Ind}(\gamma, p)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$. Se p está na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ (i.e. se $|p|$ é suficientemente grande), então $\text{Ind}(\gamma, p) = 0$.

Demonstração. Para $t \in [0, 1]$, seja $\phi(t) := \int_0^t (\dot{\gamma}(\tau)/(\gamma(\tau) - p)) d\tau$, assim que $\phi(1) = 2\pi i \text{Ind}(\gamma, p)$. Um cálculo mostra que a derivada de $\Phi(t) = e^{\phi(t)}/(\gamma(t) - p)$ é igual a zero nos pontos de continuidade de $\dot{\gamma}$. Portanto, $\Phi(1) = \Phi(0)$, e, sendo $\gamma(1) = \gamma(0)$ e $e^{\phi(0)} = 1$, isto implica que $e^{\phi(1)} = 1$, e portanto que $\phi(1) \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Fixado γ , a função $p \mapsto \text{Ind}(\gamma, p)$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$. Sendo uma função com valores inteiros, é localmente constante, ou seja, constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$.

Seja $R = \max_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)|$. Se $|p| > R$, podemos estimar

$$|\text{Ind}(\gamma, p)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|\gamma|}{|p| - R} < 1$$

se $|p|$ é suficientemente grande. Sendo um inteiro não negativo, $|\text{Ind}(\gamma, p)|$ deve ser igual a zero. $\square$

Fórmula integral de Cauchy. Seja f é uma função holomorfa definida numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ um contorno fechado simples, e p um ponto no interior de γ . Então a função $g(z) = f(z)/(z - p)$ é holomorfa em $\Omega \setminus \{p\}$. Pelo teorema de Cauchy, $\oint_{\gamma} g(z) dz$ é igual ao integral $\oint_{|z-p|=\rho} g(z) dz$ se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno (i.e. $< \text{dist}(p, \gamma)$). Pela continuidade de f ,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{z-p} dz = 2\pi i f(p).$$

A conclusão é o seguinte fórmula integral, que é o resultado central da teoria das funções holomorfas.

Teorema 5.2 (fórmula de Cauchy). Se f é holomorfa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, então o seu valor em cada ponto $p \in \Omega$ é dado pelo integral

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-p} dz \quad (5.2)$$

onde $\gamma \subset \Omega$ é um contorno fechado simples que contém p no seu interior.

Ou seja, o valor de f num ponto p no interior de um contorno fechado simples γ é dado pela média dos valores $f(z)$ da função na curva γ pesados pelo núcleo $1/(z-p)$ (i.e. a convolução de f com $1/z$). Em particular, ao escolher uma circunferência γ , fronteira de um disco $D_\rho(p) \subset \Omega$, com $\rho > 0$ suficientemente pequeno, podemos representar $f(p)$ como um integral

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{z-p} dz.$$

Mas $1/(z-p)$ é uma função infinitamente diferenciável de p , desde que $p \neq z$. Derivando a fórmula de Cauchy (5.2) é portanto possível obter fórmulas integrais para as derivadas de f ,

$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^2} dz, \quad f''(p) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^3} dz, \quad \dots$$

Teorema 5.3. *Uma função holomorfa f numa região Ω é infinitamente diferenciável, e todas as suas derivadas são funções holomorfas. Em particular, as derivadas de f em p admitem a representação integral*

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz \quad (5.3)$$

onde $\gamma \subset \Omega$ é um contorno fechado simples que contém p no seu interior.

ex: Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+1}$$

$$\oint_{|z|=2\pi} \frac{ze^z}{(z-\pi)^2} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)}$$

ex: Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

ex: Mostre que, se $a \in \mathbb{R}$,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz = i2\pi$$

e deduza que

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

Teorema de Morera. O teorema de Cauchy admite um recíproco parcial. ⁵

Teorema 5.4 (Morera). *Seja f uma função contínua na região $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todos os contornos fechados $\gamma \subset \Omega$, então f é uma função holomorfa.*

Demonstração. De acordo com o teorema 4.4, a hipótese é equivalente à existência de uma primitiva F . Mas, pelo teorema 5.3, se F é holomorfa, então também a sua derivada $F' = f$ é holomorfa. $\square$

Uma consequência importante é que limites uniformes de sucessões de funções holomorfas são holomorfos.

Teorema 5.5. *Seja (f_n) é uma sucessão de funções holomorfas definidas numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, que converge uniformemente para uma função f em cada compacto $K \subset \Omega$. Então o limite f é holomorfa em Ω .*

⁵G. Morera, Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* **19** (1886), 304-307.

Demonstração. Todo o ponto $p \in \Omega$ é centro de um disco $D = D_\rho(p)$ com aderência $\overline{D} \subset \Omega$. Os integrais das f_n ao longo de cada contorno $\gamma \subset D$ são nulos, i.e. $\oint_\gamma f_n dz = 0$, pelo teorema de Cauchy-Goursat. Pela continuidade uniforme, também são nulos os integrais de f , pois $\oint_\gamma f_n dz \rightarrow \oint_\gamma f dz$. O teorema de Moreira então diz que f é holomorfa em D . $\square$

O teorema 5.5 é um instrumento para “produzir” funções holomorfas. Por exemplo, somas

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

de séries de funções holomorfas $f_n(z)$ que convergem uniformemente em certos domínios.

Fórmula do valor médio e princípio do máximo módulo. Seja $f(z)$ uma função holomorfa na região $\Omega \subset \mathbb{C}$, e seja $p \in \Omega$. Se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno, então $D_\rho(p) \subset \Omega$. Na fronteira $S_\rho(z_0)$, parametrizada por $\gamma(t) = p + \rho e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, temos que $dz/(z-p) = i dt$. Portanto a fórmula de Cauchy (5.2) tem como caso particular a seguinte representação.

Teorema 5.6 (fórmula do valor médio). *O valor de uma função holomorfa f em um ponto p do seu domínio é igual à média dos valores de f em uma circunferência de raio $\rho > 0$ suficientemente pequeno à volta de p , i.e.*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (5.4)$$

Uma consequência é o

Teorema 5.7 (princípio do máximo módulo). *O valor absoluto de uma função holomorfa e não constante não pode atingir o seu máximo numa região (aberta) $\Omega \subset \mathbb{C}$. Em particular, se f é holomorfa na região limitada Ω , então $\sup_\Omega |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$.*

Demonstração. Se $|f(p + \rho e^{i\theta})| \leq |f(p)|$ para todos os θ , então (5.4) implica que f é constante e igual a $f(p)$ na circunferência $|z-p| = \rho$. Mas uma função holomorfa constante num arco é necessariamente constante. $\square$

5.2 Teoremas de Liouville e Gauss

Desigualdades de Cauchy. A fórmula de Cauchy (5.3) permite estimar as derivadas de f num ponto $p \in \Omega$ em função do máximo de f em $\partial\Omega$ e da distância $\text{dist}(p, \partial\Omega)$. Em particular, se f é holomorfa no disco $D_R(p)$, e se $M = \sup_{z \in \partial D_R(p)} |f(z)|$, então obtemos a *desigualdade de Cauchy*

$$\left| f^{(n)}(p) \right| \leq \frac{n! M}{R^n} \quad (5.5)$$

para o valor absoluto da n -ésima derivada de f em p .

Teoremas de Liouville e Gauss. Uma consequência é o importante

Teorema 5.8 (Liouville). *Uma função inteira e limitada é constante.*

Demonstração. Se f é inteira e $|f(z)| \leq M$, então (5.5) implica que $|f'(p)| \leq M/R$ para todos os pontos $p \in \mathbb{C}$ e todos os raios $R > 0$. Portanto $f' = 0$, e, de consequência, f é constante. $\square$

Teorema 5.9 (Gauss). *Todo o polinómio $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ de grau $n \geq 1$ (i.e. não constante) com coeficientes complexos possui uma raiz em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Se $f(z) \neq 0$ para todos os $z \in \mathbb{C}$, então $g(z) = 1/f(z)$ é uma função inteira e limitada (pois $|f(z)| \rightarrow \infty$ quando $|z| \rightarrow \infty$), logo constante pelo teorema de Liouville 5.8. $\square$

E portanto,

Teorema 5.10 (teorema fundamental da álgebra). *Um polinómio $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ de grau $n \geq 1$ fatoriza no produto*

$$f(z) = a_n(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n),$$

onde $p_1, p_2, \dots, p_n$ são as n raízes (não necessariamente distintas).

Demonstração. Se f é um polinómio de grau $n \geq 1$, então $f(z) = (z - p)g(z) + r$, onde g é um polinómio de grau $n - 1$ e r é uma constante (o resto da divisão euclidiana de f por $z - p$). Se p é uma raiz de f , então $r = f(p) = 0$, e portanto $f(z) = (z - p)g(z)$. O teorema segue por indução. $\square$

ex: Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ são n pontos distintos de $\mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) \\ &= z^n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n) z^{n-1} + \dots + (-1)^n (p_1 p_2 \dots p_n) \end{aligned}$$

é um polinómio de grau n que se anula nos p_k 's, e

$$f_k(z) = f(z)/(z - p_k)$$

com $k = 1, \dots, n$, são polinómios de grau $n - 1$ que se anulam nos p_j com $j \neq k$ e tais que $f_k(p_k) \neq 0$. Se $w_1, w_2, \dots, w_n$ são n números complexos arbitrários (não necessariamente distintos), então

$$g(z) := \sum_k w_k \frac{f_k(z)}{f_k(p_k)}$$

é um polinómio de grau $\leq n - 1$ tal que $g(z_k) = w_k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$ (chamado *polinómio interpolador de Lagrange*). Mostre que este é o único polinómio de grau $\leq n - 1$ cujo gráfico passa pelos pontos $(z_k, w_k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

5.3 Séries de Taylor

Séries de Taylor. Seja f uma função holomorfa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contém o ponto p . A *série de Taylor*⁶ de f (ou também *série de Maclaurin* quando $p = 0$, em alguns manuais) é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - p)^n \quad (5.6)$$

com coeficientes (chamados *coeficientes de Taylor* de f no ponto p)

$$c_n := \frac{f^{(n)}(p)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=R} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz$$

Esta série de potência define uma função holomorfa numa vizinhança de p . De fato, seja $D_R(p)$ um disco cuja aderência está contida em Ω , e seja $M = \sup_{z \in \partial D_R(p)} |f(z)|$. Pelas desigualdades de Cauchy (5.5) os coeficientes são limitados por

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Sendo $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \leq 1/R$, o raio de convergência da série é $\geq R$, e portanto, pelo teorema 3.3, a série define uma função holomorfa, no disco $D_R(p)$.

⁶B. Taylor, *Methodus incrementorum*, Londini, 1715.

Teorema 5.11 (Taylor). *Se f é holomorfa numa região que contém a aderência do disco $D_R(p)$, então f é igual a sua série de Taylor, i.e.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - p)^n$$

nos pontos $z \in D_R(p)$.

Demonstração. A menos de translações e homotetias, podemos assumir que $p = 0$ e $R = 1$, ou seja, que f é holomorfa numa região que contém a aderência do disco unitário $\mathbb{D}$. Pela fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (5.7)$$

se $z \in \mathbb{D}$. Se $|w| = 1$ e $|z| < 1$, o “núcleo” de este integral é dado pela série

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - (z/w)} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

que converge uniformemente em w para cada $z \in \mathbb{D}$ fixado. Ao substituir esta expressão na (5.7), e usando o teorema 4.3, podemos reconhecer os valores das derivadas de f em 0 dados pela (5.3), e portanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

□

Portanto, uma função holomorfa admite uma expansão em série de Taylor em torno de cada ponto do seu domínio, ou seja, é uma função analítica. Em particular, “holomorfa” e “analítica” podem ser considerados sinónimos.

O teorema de Liouville 5.8 admite a seguinte generalização, consequência das desigualdade de Cauchy (5.5) e da unicidade dos coeficientes da série de Taylor.

Teorema 5.12. *Uma função inteira f tal que*

$$\sup_{|z|=R} |f(z)| = \mathcal{O}(R^n)$$

é um polinómio de grau $\leq n$.

ex: Determine as séries de Taylor em torno de $p = 0$, e os respectivos raios de convergência, das seguintes funções:

$$\frac{1}{1+z} \quad \frac{1}{1+z^2} \quad \frac{z}{z^4+4} \quad e^{2z} \quad ze^{-z} \quad (1+z)e^z \quad z^2 e^z \quad e^{-z^2}$$

ex: Determine as séries de Taylor em torno dos pontos $p = 1$ e $p = i$, e os respectivos raios de convergência, das seguintes funções:

$$1/z \quad 1/z^2 \quad e^z$$

Série de Mercator. Integre a série geométrica

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

e deduza que a série de Taylor do logaritmo principal $\log(1-z)$ em torno de $p = 0$ é dada pela *série de Mercator*

$$\log(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \dots$$

em $|z| < 1$. Calcule também a série de Taylor de $\log(1+z)$ em torno de $p = 0$.

ex: Determine os primeiros termos da expansão em série de Taylor em torno de $p = 0$ das seguintes funções:

$$e^z \sin(z) \quad \cos(z) \sin(z) \quad \frac{e^z}{\cos(z)} \quad \frac{\sin(z)}{z}$$

Algumas séries de Taylor

função = série de Taylor-Maclaurin	disco de convergência
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{where } c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$	$ z < R = (\limsup c_n ^{1/n})^{-1}$
$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$	$ z < 1$
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$	$ z < \infty$
$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \dots$	$ z < \infty$
$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$	$ z < \infty$
$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \dots$	$ z < \infty$
$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$	$ z < \infty$
$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$	$ z < 1$
$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}z^3 + \dots$	$ z < 1$
$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} z^{2n+1}$	$ z < 1$

6 Séries de Laurent e cálculo dos resíduos

6.1 Séries de Laurent

18 out 2018

Séries de potências em torno de ∞ . Uma função $f(z)$ é “analítica em $z = \infty$ ” se a função $g(w) = f(1/w)$ é analítica em $w = 0$, ou seja, se admite a expansão

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^{-n}$$

num disco $D_R(\infty) := \{|z| > R\} \subset \mathbb{C}$ centrado em ∞ (que corresponde a um disco $|w| < 1/R$ na coordenada $w = 1/z$ da esfera de Riemann). Os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1/\rho} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) z^{n-1} dz \end{aligned}$$

onde $\rho > R$.

ex: Determine, se existir, a expansão em série de potências em torno de ∞ de

$$1/z^3 \quad e^z \quad \frac{1}{z^2 + 1} \quad e^{1/z^2}$$

Séries de Laurent. Se $f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$ é uma função analítica no disco $|z-p| < R$ e $f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-p)^{-n}$ é uma função analítica no disco $|z-p| > r$, e se $r < R$, então a soma $f(z) := f_+(z) + f_-(z)$ é uma função analítica no anel $A_{r,R}(p) := \{r < |z-p| < R\}$, representada pela série de potências (positivas e negativas)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n,$$

chamada *série de Laurent*. A série que representa $f_+(z)$ é chamada *parte regular* da série de Laurent, e a série que representa $f_-(z)$, que contém apenas expoentes negativos, é chamada *parte principal*.

Vice-versa,

Teorema 6.1 (Laurent). *Uma função $f(z)$ holomorfa no anel $A_{r,R}(p)$ admite uma expansão em série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n \quad (6.1)$$

em torno de p . Os coeficientes c_n , com $n \in \mathbb{Z}$, são dados pelos integrais

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz \quad (6.2)$$

onde $r < \rho < R$.

Demonstração. Para simplificar as fórmulas, podemos assumir, modulo uma translação, que $p = 0$. Se $z \in A_{r,R}(0)$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, pela fórmula de Cauchy 5.2 e pelo teorema de Cauchy 4.7

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw \end{aligned}$$

onde os raios $r < r' < R' < R$ são tais que $D_\varepsilon(z) \subset A_{r',R'}(0)$ (fazer um desenho). O primeiro integral, sendo $|z/\omega| < 1$, é igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{1}{\omega} \frac{f(\omega)}{1-\frac{z}{\omega}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \left(\frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega}\right)^n \right) f(\omega) d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R'} \frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega \right) z^n \end{aligned}$$

O segundo integral, sendo $|\omega/z| < 1$, é igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{1}{z} \frac{f(\omega)}{1-\frac{\omega}{z}} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \left(\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{z}\right)^n \right) f(\omega) d\omega \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r'} \frac{f(\omega)}{\omega^{-n+1}} d\omega \right) z^{-n} \end{aligned}$$

(a troca entre integrais e somas é justificada pelo teorema 4.3). $\square$

Por exemplo, a função $f(z) = 1/(1-z)$, holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, é representada pela série de Taylor

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

no disco unitário $\mathbb{D}$, e pela série de Laurent

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots \end{aligned}$$

no anel $|z| > 1$ (o disco unitário na variável/coordenada $w = 1/z$ da esfera de Riemann).

Desigualdades de Cauchy. Também os coeficientes da série de Laurent (6.1) podem ser estimados pelas desigualdades de Cauchy: se $\sup_{z \in \partial D_\rho(p)} |f(z)| \leq M$, então

$$\boxed{|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}}. \quad (6.3)$$

ex: Determine séries de Laurent das seguintes funções em anéis oportunos

$$e^{1/z} \qquad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \qquad \frac{e^z}{z^2}$$

ex: Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 das seguintes funções

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} \qquad \frac{1}{z(z-1)} \qquad \frac{z-1}{z+1} \qquad z \sin(1/z)$$

6.2 Singularidades isoladas

22 out 2018

Singularidades isoladas. Um ponto $p \in \mathbb{C}$ é uma *singularidade isolada* de $f(z)$ se $f(z)$ é uma função holomorfa num disco perfurado $A_{0,\rho}(p) = D_\rho(p) \setminus \{p\}$ com $\rho > 0$. Pelo teorema de Laurent 6.1, $f(z)$ admite a representação

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n \quad (6.4)$$

no anel $0 < |z-p| < \rho$, sendo os coeficientes c_n 's dados pela (6.2).

A *ordem* de f na singularidade isolada p é

$$\text{ord}(f, p) := \inf \{k \text{ t.q. } c_k \neq 0\},$$

ou seja, o número $n \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ tal que $c_n \neq 0$ (se $n \neq \pm\infty$) e $c_k = 0$ para todos os $k < n$.

Singularidades essenciais. A singularidade isolada é *essencial* quando $\text{ord}(f, p) = -\infty$, ou seja, quando $c_n \neq 0$ para infinitos n negativos.

Por exemplo,

$$e^{1/z} = \dots + \frac{1}{6} z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-2} + z^{-1} + 1$$

tem uma singularidade essencial na origem.

Pólos e funções meromorfas. A singularidade isolada é um *pólo* de *multiplicidade* $m \geq 1$ quando $-\infty < \text{ord}(f, p) = -m < 0$, ou seja, quando f é representada por uma série de Laurent “finita” (contendo um número finito de potências negativas)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-p)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n \\ &= (z-p)^{-m} g(z) \end{aligned} \quad (6.5)$$

com $g(z)$ holomorfa e não nula numa vizinhança de p .

Por exemplo,

$$f(z) = 1/z^k$$

com $k \geq 1$ tem um pólo de multiplicidade k na origem (chamado “pólo simples” se $k = 1$, “pólo duplo” se $k = 2, \dots$).

Uma função que é holomorfa numa região Ω exceto num certo número de pólos (necessariamente isolados) é dita *meromorfa*. Exemplos são as funções racionais, que têm pólos nos zeros do denominador.

Singularidades removíveis e zeros. A singularidade isolada é *removível* se $\text{ord}(f, p) = n \geq 0$. Neste caso f admite uma extensão holomorfa em todo o disco $D_\rho(p)$, definida por $f(p) = c_0$. Em particular, se $0 < n < \infty$, então f tem um zero de ordem n em p , logo é da forma

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n (z-p)^n + c_{n+1} (z-p)^{n+1} + \dots \\ &= (z-p)^n g(z) \end{aligned} \quad (6.6)$$

com $g(z)$ holomorfa e não nula numa vizinhança de p . O caso $\text{ord}(f, p) = \infty$ é o caso trivial da função constante e igual a zero.

Por exemplo, z^k tem um zero de ordem $k \geq 1$ na origem (chamado “zero simples” se $k = 1$, “zero duplo” se $k = 2, \dots$).

Em particular,

Teorema 6.2. *As funções holomorfas e não constantes têm zeros isolados.*

Em particular, uma função holomorfa só pode ter um número finito de zeros em um compacto. Corolário é que uma função holomorfa igual a zero numa sucessão convergente de pontos do domínio (por exemplo, numa curva) é necessariamente constante e igual a zero. De consequência, se duas funções holomorfas coincidem numa sucessão convergente de pontos, então são iguais.

Teorema 6.3 (Riemann). *Uma singularidade isolada p de uma função holomorfa $f(z)$ é removível sse $f(z)$ é limitada numa vizinhança de p .*

Demonstração. Se $|f(z)| < M$ numa vizinhança perfurada $D_\rho(p) \setminus \{p\}$ de p , então todos os coeficientes negativos da série de Laurent de f em torno de p são nulos, pois, pelas desigualdades de Cauchy (6.3)

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\varepsilon} (z-p)^{n-1} f(z) dz \right| \leq M\varepsilon^n$$

se $n = 1, 2, \dots$, e $\varepsilon > 0$ pode ser arbitrariamente pequeno. A série de Laurent $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$ é portanto uma extensão holomorfa de f numa vizinhança de p . A outra implicação é trivial. $\square$

Um corolário surpreendente é o seguinte.

Teorema 6.4 (Casorati-Weierstrass). *Se p é uma singularidade essencial de $f(z)$, então a imagem $f(D_\rho(p) \setminus \{p\})$ é densa no plano complexo $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Caso contrário, existem um ponto $\alpha \in \mathbb{C}$ e um raio $\varepsilon > 0$ tais que a imagem $f(D_\rho(p) \setminus \{p\}) \subset \mathbb{C} \setminus D_\varepsilon(\alpha)$. Isto implica que a função $g(z) := 1/(f(z) - \alpha)$, holomorfa em $D_\rho(p) \setminus \{p\}$, é limitada por $1/\varepsilon$, e portanto, pelo teorema 6.3, que $\text{ord}(g, p) \geq 0$. De consequência, a função $f(z) = \alpha + 1/g(z)$ tem, no máximo, um pólo de ordem finito em p , contrariamente à hipótese. $\square$

ex: Determine as singularidades isoladas e a natureza de

$$\frac{e^z}{z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{1}{z^2} \quad ze^{1/z} \quad \frac{e^{3z}}{z^2 - 2z - 3}$$

ex: Mostre que e^z , $\sin(z)$ ou $\cos(z)$ têm singularidades essenciais em ∞ .

ex: Mostre que uma função inteira com uma singularidade não essencial em ∞ é um polinómio.

6.3 Teorema e cálculo dos resíduos

Resíduos. O *resíduo* da função holomorfa $f(z)$ na singularidade isolada $p \in \mathbb{C}$ é o coeficiente

$$\boxed{\text{Res}(f, p) := c_{-1}}$$

na série de Laurent (6.4). Pela fórmula de Cauchy 5.2, o resíduo é também igual ao integral

$$\boxed{\text{Res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} f(z) dz}$$

se ρ é suficientemente pequeno. (melhor seria dizer que o resíduo é um invariante da forma $f(z) dz$, e não da função $f(z)$!).

Cálculo dos resíduos. O cálculo dos resíduos pode ser simplificado se a singularidade não é essencial. Por exemplo, se p é um pólo *simples* de f , i.e. $\text{ord}(f, p) = -1$, e portanto

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots,$$

então

$$\boxed{\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} (z-p)f(z)}$$

Neste caso, é também útil observar que, se g é uma função holomorfa em p , então

$$\boxed{\text{Res}(fg, p) = g(p) \text{Res}(f, p)}$$

Se p é um pólo *duplo*, i.e. $\text{ord}(f, p) = -2$, então

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{d}{dz} ((z-p)^2 f(z)).$$

Em geral, se p é um pólo de multiplicidade $m > 0$, i.e. $\text{ord}(f, p) = -m$, e portanto $f(z)$ é da forma (6.5) numa vizinhança de p , então

$$\boxed{\text{Res}(f, p) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-p)^m f(z))}$$

Outra observação útil é a seguinte. Se $f(z)$ tem um zero simples em p , i.e. é da forma

$$f(z) = c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots$$

com $c_1 = f'(p) \neq 0$, então $h(z) = 1/f(z)$ tem um pólo simples em p . Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{z \rightarrow p} (z-p)h(z) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{z-p}{f(z)} = \frac{1}{f'(p)}.$$

De consequência,

$$\boxed{\text{Res}(1/f, p) = 1/f'(p)}$$

Teorema dos resíduos. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região limitada cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma reunião de contornos fechados simples. Seja f uma função holomorfa numa vizinhança de Ω exceto num número finito de singularidades isoladas $p_1, p_2, \dots \in \Omega$. Então o teorema de Cauchy 4.7, aplicado ao domínio obtido ao retirar de Ω uns discos suficientemente pequenos $D_\rho(p_k)$ centrados nos p_k 's, implica o seguinte

Teorema 6.5 (teorema dos resíduos). *Se f é holomorfa em $\Omega \subset \mathbb{C}$ excepto num número finito de singularidades isoladas $p_1, p_2, \dots \in \Omega$, então*

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_k \text{Res}(f, p_k)} \quad (6.7)$$

Ou seja, o cálculo dos resíduos nas singularidades isoladas permite calcular o integral de contorno. A fórmula integral de Cauchy (5.2) é um caso particular de (6.7).

ex: Calcule os resíduos das seguintes funções nos pontos singulares

$$\begin{array}{ccccc} \frac{e^z}{z} & \frac{1}{(z-1)(z-2)} & \frac{1}{z^2} & ze^{1/z} & \frac{e^{3z}}{z^2 - 2z - 3} \\ \frac{e^{\pi z}}{z-i} & \frac{\cos(z)}{z^2} & \frac{z^2}{\sin(z)} & \frac{\sin(z)}{z^3} & \end{array}$$

ex: Calcule os integrais

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz \quad \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz$$

$$\oint_{|z|=R} e^{1/z^2} dz \quad \oint_{|z|=2} \frac{z-3}{z(z-1)} dz \quad \oint_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2-2z-3} dz$$

Resíduo no infinito. Se $f(z)$ é analítica em $|z| > R$ e tem uma singularidade isolada em $z = \infty$, então o seu *resíduo no infinito* é definido por

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz$$

onde $\rho > R$ (ou seja, é igual ao integral de $f(z)/2\pi i$ ao longo de uma circunferência suficientemente grande orientada negativamente). Portanto, se $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ é a série de Laurent que representa $f(z)$ no anel $|z| > R$, então $\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$. Por exemplo, o resíduo no infinito da função $f(z) = e^{1/z}$ é igual a -1 .

O teorema dos resíduos 6.5, aplicado a um disco suficientemente grande, então implica o seguinte

Teorema 6.6. Se $f(z)$ é uma função holomorfa em todo o plano complexo exceto num número finito de singularidades isoladas $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_k \text{Res}(f, p_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0$$

ex: Calcule os integrais

$$\oint_{|z|=10} \frac{dz}{1+z^{11}} \quad \oint_{|z|=7} \frac{6z}{1+z^{11}} dz$$

Princípio do argumento. Um corolário interessante do teorema dos resíduos é a possibilidade de contar zeros e pólos de uma função f integrando a sua derivada logarítmica f'/f . Se γ é um contorno fechado simples, e $\Gamma = f \circ \gamma$ é sua imagem pela função f , então o integral da derivada logarítmica de f é

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \text{Ind}(\Gamma, 0).$$

Informalmente, “o número de voltas que o argumento de $f(z)$ dá em torno da origem quando z percorre a curva γ ”.

Teorema 6.7 (princípio do argumento). Seja Ω o interior do contorno fechado simples γ , e seja $f(z)$ uma função holomorfa numa vizinhança de Ω exceto num número finito de pólos $p_1, p_2, \dots$. Se $f(z)$ não tem zeros nem polos na curva γ , e se $z_1, z_2, \dots$ são os seus zeros em Ω , então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k \text{ord}(f, z_k) + \sum_k \text{ord}(f, p_k).$$

Demonstração. A derivada logarítmica f'/f é holomorfa em todos os pontos exceto nos zeros e nos pólos de f .

Se p é um zero de f de ordem $k \geq 1$, então $f(z) = (z-p)^k g(z)$ com g holomorfa e não nula numa vizinhança de p . De consequência, a derivada logarítmica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

tem um pólo simples em p com resíduo k .

Se p é um pólo de f de ordem $k \geq 1$, então $f(z) = (z - p)^{-k}g(z)$ com g holomorfa e não nula numa vizinhança de p . De consequência, a derivada logarítmica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

tem um pólo simples em p com resíduo $-k$.

O teorema segue aplicando o teorema dos resíduos 6.5. □

Uma consequência é o

Teorema 6.8 (Rouché). *Seja Ω o interior do contorno fechado simples γ , e sejam $f(z)$ e $g(z)$ duas funções holomorfas numa vizinhança de Ω tais que*

$$|f(z)| > |f(z) - g(z)|$$

nos pontos da curva γ . Então f e g têm o mesmo número de zeros em Ω .

Demonstração. É claro que nem f nem g podem ter zeros em γ . Seja $h(z) := g(z)/f(z)$, cuja derivada logarítmica é $h'/h = g'/g - f'/f$. A hipótese também implica que

$$|h(z) - 1| < 1$$

nos pontos de γ , e portanto que a curva $\Gamma = h \circ \gamma$ está contida no disco $D_1(1)$. Mas

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \oint_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \oint_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

e o primeiro integral é zero porque a curva Γ não contém a origem no seu interior. O teorema é portanto consequência do 6.7. □

ex: Seja $g(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ um polinómio de grau n , e seja $f(z) = a_n z^n$ o seu termo de grau máximo. É claro que o módulo da diferença $f(z) - g(z)$ é limitado pelo módulo de $f(z)$ se $|z|$ é suficientemente grande. O único zero de $f(z)$ é a origem, e tem multiplicidade n . Deduza o teorema fundamental da álgebra.

6.4 Cálculo de integrais

25 out 2018

Integrais de funções racionais de cos e sin. Se $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ é uma função racional de cos e sin, então a substituição $z = e^{i\theta}$ transforma o integral de $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ entre 0 e 2π no integral de contorno

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \oint_{|z|=1} F(z) \frac{dz}{iz}$$

onde F é a função racional

$$F(z) := f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right),$$

pois $\cos(\theta) = (z + 1/z)/2$, $\sin(\theta) = (z - 1/z)/(2i)$ e $dz/iz = d\theta$. O segundo integral pode então ser calculado somando $2\pi i$ vezes os resíduos da função integranda $g(z) = F(z)/iz$ nos pontos singulares no disco unitário $\mathbb{D}$ (se f não tem pólos na circunferência unitária $\partial\mathbb{D}$).

ex: Mostre que, se $a > b > 0$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

ex: Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)} \quad \int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{3 - \cos(\theta)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin(\theta)} \quad \text{com } a > b > 0$$

ex: O núcleo de Poisson no disco unitário $\mathbb{D}$ é

$$P_r(\theta) := \Re \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$$

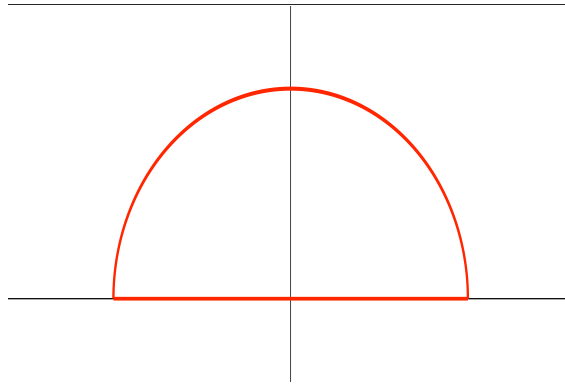
com $0 \leq r < 1$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$$

Integrais impróprios de funções racionais. Se $f(x) = g(x)/h(x)$ é uma função racional (quociente entre os polinômios g e h) e se o seu integral impróprio na reta real é absolutamente convergente, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ (o que acontece se $\deg(h) > \deg(g) + 1$, ou seja, se ∞ é um zero de ordem $\text{ord}(f, \infty) > 1$ de f , e portanto $f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2})$ quando $|x| \rightarrow \infty$) então o integral impróprio de f pode ser calculado somando $2\pi i$ vezes os resíduos de f no semi-plano superior $\mathbb{H}$, i.e.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, p)}$$

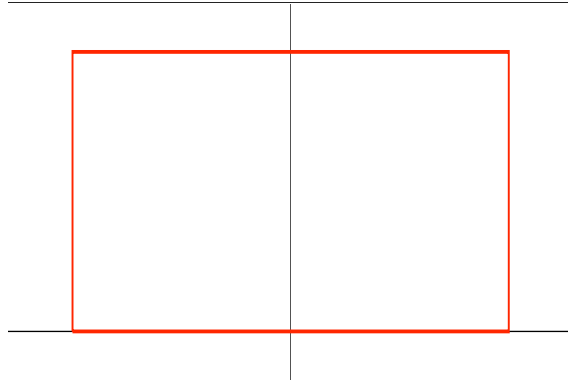
De fato, o segundo membro é igual ao integral de $f(z)$ ao longo do contorno formado pelo segmento $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ e pela semi-circunferência $S_R = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$, mas o integral $\int_{S_R} f(z) dz \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ (pois o integrando é limitado por $|f(z)| \leq C R^{-2}$ e o comprimento de S_R é igual a πR).



A mesma técnica pode ser utilizada para calcular integrais impróprios do género

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx \quad (6.8)$$

parte real e parte imaginária de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$, pois $|f(z) e^{i\alpha z}| \leq |f(z)|$ se $\Im(z) > 0$ e $\alpha > 0$. Menos óbvio é que estes integrais podem ser calculados também quando ∞ é um zero simples de f , i.e. quando $\text{ord}(f, \infty) = 1$, e portanto $|f(z)| \leq C/|z|$ numa vizinhança de $z = \infty$. Uma possibilidade é integrar a função meromorfa $F(z) := f(z) e^{i\alpha z}$ ao longo de um retângulo de vértices $-X_-, X_+, X_+ + iY, -X_- + iY$.



Se $X_-, X_+, Y \gg 1$, então o interior do retângulo contém todos os pólos de $F(z)$ no semi-plano superior (estamos a assumir que não há pólos no eixo real!). Por outro lado, os valores absolutos dos integrais ao longo dos lados verticais e do lado superior do retângulo são limitados por

$$\frac{C}{X_{\pm}} \int_0^Y e^{-\alpha y} dy \leq \frac{C}{X_{\pm}} \quad \text{ou} \quad \frac{e^{-\alpha Y}}{Y} \int_{-X_-}^{X_+} dx \leq \frac{e^{-\alpha Y}}{Y} (X_+ + X_-),$$

respetivamente. Passando ao limite quando $Y \rightarrow \infty$ e depois $X_{\pm} \rightarrow \infty$, o resultado é que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(F, p)}$$

(se $\alpha > 0$, caso contrário é necessário escolher o retângulo oposto, i.e. com $Y < 0$, e portanto somar os resíduos nos pólos contidos no semi-plano inferior). As partes real e imaginária deste integral são os integrais (6.8).

A mesma conclusão pode ser obtida usando a seguinte observação:

Teorema 6.9 (lema de Jordan). *Se $M(R) := \sup_{|z|=R} |f(z)| \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, então o integral de $f(z)e^{i\alpha z}$, com $\alpha > 0$, ao longo da semi-circunferência $S_R = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$ tende para zero quando $R \rightarrow \infty$ (se $\alpha < 0$, o teorema se aplica à semi-circunferência $S_R^- = \{Re^{it} : t \in [-\pi, 0]\}$ no semi-plano inferior).*

Demonstração. Usando a desigualdade elementar $\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq 1$ para valores de $t \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq M(R) R \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin(t)} dt = 2 M(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin(t)} dt \\ &\leq M(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-(2\alpha R/\pi)t} dt \leq M(R) \frac{\pi}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \end{aligned}$$

Portanto, se $M(R) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ e $\alpha > 0$, este integral tende para 0. $\square$

ex: Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi.$$

O núcleo de Poisson no semi-plano superior $\mathbb{H}$ é

$$P_y(x) := \frac{y}{x^2 + y^2}$$

com $y > 0$. Deduza que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) dx = 1.$$

ex: Calcule

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + \beta^2} dx \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx & \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx \end{aligned}$$

ex: Mostre que, se $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx = \pi \frac{e^{-a}}{a} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}.$$

ex: Integre a função $f(z) = e^{az}/(1 + e^z)$ ao longo do retângulo de vértices $\pm R$ e $\pm R + 2\pi i$, e mostre que, se $0 < a < 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

ex: Integre a função $f(z) = e^{-2\pi i \xi z} / \cosh(\pi z)$ ao longo do retângulo de vértices $\pm R$ e $\pm R + 2i$, e mostre que, se $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi \xi)}$$

29 out 2018

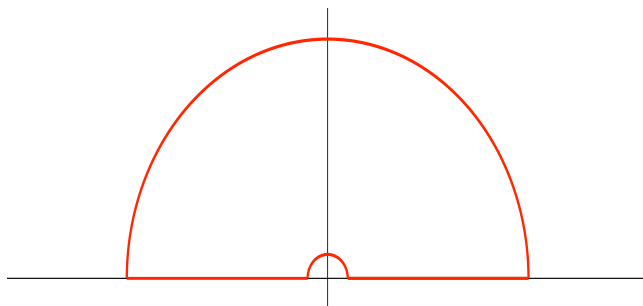
Valor principal de Cauchy. Se a função racional $f(x)$ tem pólos simples na reta real que coincidem com os zeros de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$, os integrais (6.8) podem também ser calculados. Quando os pólos simples de $f(x)$ na reta real não são anulados pelos zeros de $\sin$ ou $\cos$, e portanto o integral de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

não existe, ainda é possível (e útil, por exemplo na teoria da transformada de Hilbert) definir e calcular os integrais “no sentido do valor principal”. Por exemplo, se $0 \in \mathbb{R}$ é o único pólo de $F(z) = f(z) e^{i\alpha z}$ na reta real, e é um pólo simples, então o *valor principal (de Cauchy)* do integral $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx$ é definido por

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |z| < R} F(x) dx$$

Seja γ o contorno obtido unendo os segmentos $\varepsilon < |z| < R$ da reta real com as semi-circunferências $S_R = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$ e $S_{\varepsilon} = \{\varepsilon e^{it} : t \in [0, \pi]\}$.



Se R é suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, o teorema dos resíduos diz que

$$2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(F, p) = \int_{S_R} F(z) dz + \int_{\varepsilon < |z| < R} F(x) dx - \int_{S_{\varepsilon}} F(z) dz$$

O primeiro integral tende para 0 quando $R \rightarrow \infty$ se $F(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ satisfaz as hipóteses do lema de Jordan 6.9. O limite do último integral quando $\varepsilon \rightarrow 0$ pode ser calculado explicitamente: se $F(z) = c/z + F_0(z)$, com F_0 holomorfa numa vizinhança da origem, então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} f(z) dz = \pi i c,$$

pois o integral da parte holomorfa é limitado por $M\pi\varepsilon \rightarrow 0$, se $M = \max_{|z| \leq \varepsilon} |f_0(z)|$. É evidente como generalizar esta fórmula ao caso de mais pólos simples na reta real: cada pólo na reta real conta “metade”, ou seja, πi vezes o resíduo. O resultado é que

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(F, p) + \pi i \sum_{p \in \mathbb{R}} \text{Res}(F, p)$$

ex: Calcule

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x - a} dx \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x - a} dx$$

Integral da função sinus cardinalis. A função de Shannon (ou *sinus cardinalis*)

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \dots$$

joga um papel importante em análise de Fourier (é a transformada de Fourier de uma função característica), em particular nas aplicações à teoria da informação e ao processamento de sinais digitais. A origem é uma singularidade removível, e sinc é uma função inteira se o seu valor na origem for definido $\text{sinc}(0) := 1$. Os seus zeros são os múltiplos não triviais de π , e Euler provou que sinc é um produto infinito

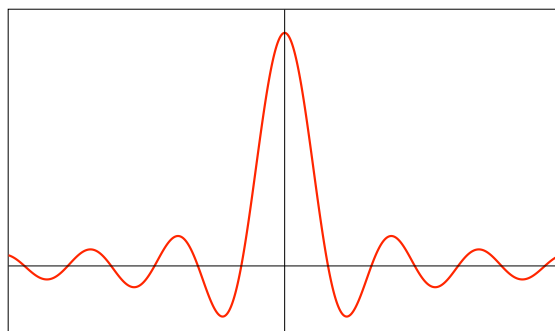
$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (6.9)$$

O seu integral impróprio

$$I := \int_0^{\infty} \text{sinc}(x) dx$$

não converge absolutamente (pois a primitiva de $|\text{sinc}(x)| = 1/x$ é $\log x$, que diverge em 0 e em ∞). Por outro lado, o resíduo da função $f(z) = e^{iz}/z$ em $p = 0$ é $\text{Res}(f, 0) = 1$. Então

$$I = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{4i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$



Resíduos e séries: alguns valores da função zeta de Riemann. A função $f(z) = \pi \cot(\pi z)$ tem pólos simples nos inteiros $n \in \mathbb{Z}$, com resíduos $\text{Res}(f, n) = 1$, e é uniformemente limitada nos lados do quadrado $Q_R \subset \mathbb{C}$ de vértices $\pm R \pm iR$ e $\pm R \mp iR$, com $R \in \mathbb{N} + 1/2$. Pelo teorema dos resíduos 6.5, se $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial Q_R} \frac{f(z)}{z^{2k}} dz = \text{Res}(f/z^{2k}, 0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

e portanto os valores da função *zeta de Riemann* $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ (holomorfa no semi-plano $\Re(s) > 1$) quando $s = 2k = 2, 4, 6, \dots$ são

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{2} \text{Res}(f/z^{2k}, 0)$$

Para calcular o resíduo de $f(z)/z^{2k}$ em 0 é necessário calcular a série de Laurent da cotangente num disco perfurado à volta da origem:

$$\begin{aligned} \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{1 - z^2/2 + z^4/24 - \dots}{z(1 - z^2/6 + z^4/120 - \dots)} \\ &= z^{-1}(1 - z^2/2 + z^4/24 - \dots)(1 + z^2/6 - 7z^4/360 + \dots) \\ &= z^{-1} - z/3 - z^3/45 - \dots \end{aligned}$$

Por exemplo, $\text{Res}(f/z^2, 0) = -\pi^2/3$, e portanto

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (6.10)$$

(a solução do *problema de Basel*).

ex: Compare o coeficiente de z^2 na série de Laurent de $\sin(\pi z)/\pi z$ e o coeficiente de z^2 no produto infinito em (6.9), e deduza a prova (original de Euler) da fórmula (6.10).

7 Separação de variáveis, harmônicas e modos

7.1 Corda vibrante

5 nov 2018

Corda vibrante e harmônicas. As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ são modeladas pela equação de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (7.1)$$

com condições de fronteira (*condições de Dirichlet*)

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde $u(x, t)$ denota o deslocamento transversal da corda na posição $x \in [0, \ell]$ e no tempo t , e $c = \sqrt{k/\rho}$. Para ter fórmulas simples, consideramos $\ell = \pi$ (que corresponde a uma mudança de variável $x \mapsto x' = \pi x/\ell$)

O produto $u(x, t) = X(x)T(t)$ é uma solução “separável” da equação de onda (7.1) se $XT'' = c^2 X''T$, e portanto se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$X'' = \lambda X \quad \text{e} \quad T'' = \lambda c^2 T.$$

As únicas soluções não triviais do problema $X'' = \lambda X$ no intervalo $[0, \pi]$ com condições de fronteira nulas $X(0) = X(\pi) = 0$ são proporcionais a $X_n(x) = \sin(nx)$ e têm valores próprios $\lambda_n = -n^2$, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Para cada um destes valores de λ_n , T_n é solução da equação do oscilador harmônico $T_n'' = -n^2 c^2 T_n$ de frequência nc . As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

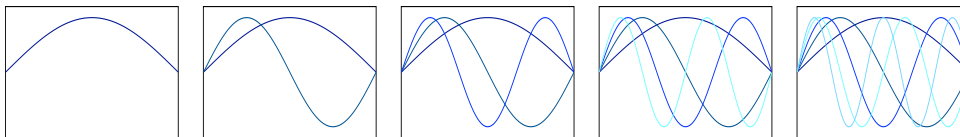
$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct) \right) \sin(nx) \\ &= A_n \sin(nct + \tau_n) \sin(nx) \end{aligned}$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$, onde os coeficientes a_n e b_n , ou a amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, e a fase $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$, são constantes arbitrárias (que dependem das condições iniciais). A linearidade da equação de ondas implica o *princípio de sobreposição*: toda sobreposição de soluções ainda é uma solução. Em particular, se as condições iniciais são sobreposições finitas de harmônicas

$$u(x, 0) = \sum_n a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \sum_n b_n \sin(nx),$$

então a solução é (a unicidade vem do teorema de unicidade ??)

$$u(x, t) = \sum_n \left(a_n \cos(nct) + \frac{b_n}{nc} \sin(nct) \right) \sin(2\pi x/\ell_n).$$



Primeiras 5 harmônicas de uma corda vibrante.

No caso geral em que o comprimento é ℓ , as ondas estacionárias são

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

onde as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n := n \frac{c}{2\ell} \quad \text{e} \quad \ell_n := \frac{2\ell}{n},$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$, respetivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = c/\ell_1$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = n\nu_1 = c/\ell_n$, com $n = 2, 3, 4, \dots$, são ditas n -ésimas *harmônicas* (ou *overtones*) da corda.

Por exemplo, se a fundamental é o A_4 de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmônica é o A_5 de 880 Hz, a terceira está próxima do E_6 de 1318.5 Hz, a quarta é o A_6 de 1760 Hz, a quinta está próxima do $C\sharp_7$ de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do E_7 de 2637 Hz, a sétima está próxima do G_7 de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmônicas contêm a “fundamental” A, a “quinta justa” E e a “terça maior” $C\sharp$, as três notas (“tríade maior”) do “acorde maior”!⁷



Primeiras 12 harmônicas de uma corda cuja fundamental é C.

ex: Mostre que a energia

$$E := \frac{1}{2} \int_0^\ell (\rho u_t^2 + k u_x^2) dx$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$ (calcule a derivada e integre por partes).

ex: Mostre que a energia de uma onda estacionária

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n)$$

é dada por

$$E_n = \pi^2 M A_n^2 \nu_n^2,$$

onde $M = \rho\ell$ é a massa da corda.

ex: Determine as vibrações de uma corda de comprimento $\ell = \pi$ dadas as condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = 2 \sin(4x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 \sin(x) - \sin(2x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \sin(3x).$$

ex: A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

ex: [St08] 4.1.

7.2 Equação de calor

12 nov 2018

Condução de calor com temperatura constante na fronteira. A condução de calor num fio condutor de comprimento π (para ter fórmulas simples; se o comprimento for ℓ , basta fazer a mudança de variável $x \mapsto x' = \pi x/\ell$) e difusividade térmica $\beta > 0$ é modelada pela equação de calor

$$u_t - \beta u_{xx} = 0 \tag{7.2}$$

⁷To learn more about music, you may want to visit <http://www.phys.unsw.edu.au/music/>

onde $u(x, t)$ é a temperatura na posição x e no instante t . Colocamos o problema de resolver o problema com condições de fronteira constantes, $u(0, t) = a$ e $u(\pi, t) = b$ para todos os tempos $t \geq 0$. A função

$$w(x, t) := a + \frac{b-a}{\pi}x$$

é uma solução estacionária, i.e. independente do tempo (o limite esperado do perfil de temperatura quando $t \rightarrow \infty$). Então a solução da equação de calor (7.2) com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\pi, t) = b$ é igual a

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

onde $v(x, t)$ é a solução da equação de calor (7.2) com condições de fronteira nulas (i.e. de Dirichlet) $v(0, t) = v(\pi, t) = 0$.

Um cálculo análogo ao da corda vibrante mostra que as soluções separáveis da equação de calor (7.2) com condições de fronteira nulas são (proporcionais a) os *modos*

$$v_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx)$$

é uma solução da equação com condições de fronteira nulas $v(0, t) = 0$ e $v(\ell, t) = 0$ e condição inicial

$$v(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$$

É importante observar que o limite de $v(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$ é a função identicamente nula, e portanto o limite de $u(x, t)$ é a solução estacionária $w(x, t)$, como esperado.

ex: Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica $10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$ é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de 0°C . Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}}x\right) \times 60^\circ\text{C},$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a 4°C ? O que acontece para grandes valores do tempo?

E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de 0°C e 100°C , respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

ex: Determine as soluções da equação de calor num condutor de comprimento π com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3\sin(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

Condução de calor num condutor isolado. A condução de calor num fio condutor termicamente isolado de comprimento π e difusividade térmica $\beta > 0$ é modelada pela equação de calor

$$u_t - \beta u_{xx} = 0,$$

em $0 \leq x \leq \pi$, com condições de fronteira (*condições de Neumann*)

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0$$

(o fluxo é proporcional ao gradiente de temperatura). As soluções separáveis são os modos

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) .$$

O limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$ é o coeficiente a_0 , que é a média dos valores iniciais

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) dx$$

(pois os $\cos(nx)$, com $n \geq 1$, têm média nula em $[0, \pi]$).

ex: Mostre que o “calor”

$$Q(t) := C \int_0^\ell u(x, t) dx ,$$

onde $C = mc$ é a capacidade térmica do conductor (o produto da massa m e o calor específico c) é constante, ou seja, que $\frac{d}{dt}Q(t) = 0$.

ex: Determine as soluções da equação de calor num condutor isolado de comprimento π com condição inicial

$$u(x, 0) = \cos(x) + 3 \cos(2x) ,$$

ou

$$u(x, 0) = 3 - \cos(5x) .$$

ex: [St08] 4.2.

Condução de calor num condutor circular. Também podemos considerar um condutor isolado circular, por exemplo uma circunferência de comprimento 2π (a circunferência unitária $\mathbb{S} = \{e^{ix}, x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$). Neste caso, não há fronteira, e de consequência não há condições de fronteira, mas condições de periodicidade: $u(0, t) = u(2\pi, t)$ para todos os tempos $t \geq 0$. Então as soluções separáveis da equação de calor (7.2) são

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) .$$

Calor com dispersão. Considere a equação de calor com dispersão

$$u_t - \beta u_{xx} = -u$$

no intervalo $0 \leq x \leq \ell$ com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ para todos os $t \geq 0$.

ex: Verifique que a substituição $v(x, t) := e^t u(x, t)$ transforma a equação acima na equação

$$v_t - \beta v_{xx} = 0.$$

ex: Determine as soluções separáveis do problema.

7.3 Separação de variáveis

Problema de Sturm-Liouville. O problema de Sturm-Liouville consiste em determinar constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ e correspondentes funções $u(x)$, definidas num intervalo $x \in [a, b]$, que resolvam a equação

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda w(x)u$$

com condições de fronteira $u(a)$ ou $u'(a) = A$ e $u(b)$ ou $u'(b) = B$, dadas umas funções $p(x)$ e $w(x)$. Se definimos o operador L como

$$Lu := \frac{1}{w(x)} \left(-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u \right) = \frac{1}{w} (-(pu')' + qu)$$

então o problema de Sturm-Liouville consiste em resolver

$$Lu = \lambda u$$

ou seja, determinar os valores próprios λ e as correspondentes funções próprias u de L .

ex: Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u(0) = u(\pi) = 0$.

ex: Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u'(0) = u'(\pi) = 0$.

ex: Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u(0) - u'(0) = u(\pi) - u'(\pi) = 0$.

ex: Mostre que as funções próprias $u(r)$, com $0 < r < \infty$, de

$$r^2 u'' + r u' = n^2 u$$

quando $n \in \mathbb{Z}$, são $u_{\pm}(r) = r^{\pm n}$ se $n \neq 0$, e $u_0(r) = 1$ ou $u_0(r) = \log r$ se $n = 0$.

Separação de variáveis. O método de separação de variáveis para determinar soluções de uma EDPs linear homogênea $Lu = 0$, por exemplo nas variáveis x e t , consiste em substituir a conjectura

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

na equação, e deduzir $(A_x X)T = (B_t T)X$, onde A_x e B_t são operadores diferenciais lineares nas variáveis x e t , respetivamente. A igualdade então implica que existe uma constante λ tal que X e T satisfazem as equações de Sturm-Liouville

$$A_x X = \lambda X \quad \text{e} \quad B_t T = \lambda T.$$

As condições de fronteira determinam certos valores próprios λ e as correspondentes funções próprias admissíveis $X_\lambda(x)$ e $T_\lambda(t)$, e portanto as soluções separáveis $X_\lambda(x)T_\lambda(t)$. Pelo princípio de sobreposição são também soluções combinações lineares (finitas)

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t),$$

com $c_{\lambda} \in \mathbb{R}$.

ex: Determine, se possível, soluções separáveis das seguintes EDPs.

$$\begin{array}{lll} u_x + u_y = 0 & tu_{xx} + u_t = 0 & u_t = 2u_x \\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 & u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0 & u_{tx} = u_x \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & yu_{xx} + xu_{yy} + xyu_{zz} = 0 & u_{tx} = 0 \end{array}$$

Vibrações amortecidas. Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\alpha u_t = 0.$$

em $0 \leq x \leq \pi$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

ex: Mostre que a conjectura $u_n(x, t) = q_n(t) \sin(nx)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência $\omega_n^2 = (cn)^2$.

ex: Deduza as soluções separáveis do problema com atrito pequeno (i.e. $\alpha^2 < \omega_1^2$).

Ondas e calor no intervalo infinito. Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda e de calor

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad u_t - \beta u_{xx} = 0$$

com $x \in \mathbb{R}$.

Equação de Schrödinger livre. A “função de onda” $\psi(\mathbf{x}, t)$ de uma partícula livre não-relativística satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

onde m é a massa da partícula e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida.

ex: Determine soluções separáveis no intervalo $x \in [0, \ell] \subset \mathbb{R}$, com condições de fronteira nulas, $\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0$.

ex: Mostre que as soluções separáveis e limitadas na reta real são proporcionais a

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{ipx/\hbar},$$

onde $E \geq 0$ e $p = \sqrt{2mE}$.

ex: Verifique que as ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^3$ se a frequência ω e o número de onda $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem a relação de dispersão $\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \|\boldsymbol{\xi}\|^2$.

Equação de Klein-Gordon. A “função de onda” $\psi(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$, de uma partícula livre relativística de massa própria m satisfaz a equação de Dirac, e portanto a *equação de Klein-Gordon* (em unidades de Planck⁸)

$$-\psi_{tt} + \Delta\psi = m^2\psi.$$

As ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Klein-Gordon em $\mathbb{R}^3$ se a frequência ω e o número de onda $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem a relação de dispersão $\omega^2 - \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = m^2$.

Ondas no plano e equação de Bessel. A equação das ondas em dimensão dois pode ser escrita, em coordenadas polares $(x, y) \approx re^{i\theta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

O produto $u(r, \theta, t) = R(r) \Theta(\theta) T(t)$ é uma solução separável se

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta}$$

e portanto se cada um dos membros é igual a uma constante $-\lambda^2$. à sua vez, o segundo membro é igual a $-\lambda^2$ se

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

Cada membro desta igualdade deve ser constante. As únicas soluções não-triviais de $\Theta'' = \mu\Theta$ que são periódica de período 2π são $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$, com $\mu = -n^2$ e $n=0,1,2,\dots$. Então as funções $R(r)$ devem ser soluções de

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0$$

A mudança de variável independente $x = \lambda r$ transforma esta equação diferencial na *equação de Bessel de ordem n*

$$x^2 f'' + x f' + (x^2 - n^2)f = 0$$

para a função $f(x) := R(x/\lambda)$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (mas é útil considerar também o caso em que o parâmetro N não é inteiro).

O problema de Fourier. Moral: sabemos resolver o problema da corda vibrante ou os problemas da condução de calor quando as condições iniciais são sobreposições (finitas) de ondas estacionárias ou modos. Isto levanta o problema de decidir quais funções periódicas $f(x)$ podem ser representadas, ou pelo menos aproximadas com precisão arbitrária, por meio de combinações lineares de senos e/ou cossenos. Em termos mais concretos, o problema é decidir quando e em que sentido uma função $f(x)$, periódica de período 2π , pode ser representada como uma série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

⁸ $c = 1$, $\hbar = 1$, $\dots$

8 Séries de Fourier

8.1 Funções periódicas e polinômios trigonométricos

Polinômios trigonométricos com suficientes frequências podem aproximar muito bem funções periódicas bem comportadas, no sentido dos “mínimos quadrados”. Isto conduz ao estudo da geometria euclidiana do espaço das funções de quadrado integrável.

15 nov 2018

O problema de Fourier. Sabemos resolver o problema da corda vibrante ou os problemas da condução de calor quando as condições iniciais são sobreposições (finitas) de ondas estacionárias ou modos. Isto levanta o problema de decidir quais funções periódicas $f(x)$ podem ser representadas, ou pelo menos aproximadas com precisão arbitrária, por meio de combinações lineares de senos e/ou cossenos. Em termos mais concretos, o problema é decidir quando e em que sentido uma função $f(x)$, periódica de período 2π , pode ser representada como uma série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Num certo sentido, estamos a querer dizer que os vetores $e_n(x) = e^{inx}$ formam uma base do espaço das funções periódicas. Estes vetores são os vetores que diagonalizam o operador Laplaciano $\Delta = D^2$, pois $\Delta e_n = -n^2 e_n$.

Epíclis e deferentes. A ideia de Aristóteles e Platão, de que “todos os movimentos são combinações de movimentos circulares uniformes” está na base dos calendários calculados por Iparco e Ptolomeu, e transmitidos pelos árabes no *Almagesto*. Nestas cosmologias, cada corpo celeste, estrelas fixas ou errantes, descreve uma circunferência, dita *epíclis*, à volta de uma circunferência, que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência, ..., que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência inicial, dita *deferente*, centrada na Terra. Até o sistema de Copérnico funciona assim: a única novidade, que também não é uma novidade porque os próprios gregos consideraram esta possibilidade, é que o centro do deferente é colocado no Sol, ideia que pareceu simplificar muito o modelo.



Aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos. A intuição subjacente é que todo movimento periódico planar pode ser aproximado com precisão arbitrária por uma sobreposição finita de movimentos circulares uniformes.⁹ Este é o conteúdo da Análise de Fourier.

⁹G. Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni*, Series 9, Band 12, No. 2 (2001), 125-152 (<http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9907004>). See also Mark Eichenlaub's answer in [Fourier transform for dummies](#) and this [video](#).

Um polinómio trigonométrico (complexo) de grau $\leq N$ definido na circunferência $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (ou seja, periódico de período 2π) é uma sobreposição finita

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

de (ondas planas) harmónicas $e_n(t) := e^{int}$, com coeficientes $c_n \in \mathbb{C}$. Se $c_n = \overline{c_{-n}}$ para todos os n , então o polinómio é real, e pode ser representado como combinação linear real de senos e cosenos. O problema é o de determinar, fixado um grau N , o polinómio trigonométrico $p(t)$ que melhor aproxima uma função periódica $f(t)$ (de período 2π). A ideia de Bessel (1828) é escolher os coeficientes c_k 's usando o *princípio dos mínimos quadrados*, ou seja, procurando minimizar a “soma dos quadrados das distâncias” entre $f(t)$ e a sobreposição $p(t)$, o integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)|^2 dt.$$

Geometria do espaço das funções de quadrado integrável. O problema de minimização de Bessel admite uma interpretação geométrica. Seja $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ o espaço vetorial complexo das funções Riemann-integráveis $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas na circunferência $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (ou, equivalentemente, definidas na reta real e periódicas de período 2π , e portanto determinadas pelos seus valores no intervalo $(-\pi, \pi]$, ou em qualquer outro intervalo de comprimento 2π), munido do *produto escalar/interno* e da *norma* L^2 , definidos por

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{e} \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

respetivamente. Quando necessário, ou seja, quando nas fórmulas aparecem produtos internos de espaços diferentes, o produto interno e a norma L^2 poderão também ser denotados com $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$.

É claro que este produto interno é linear na primeira variável e anti-linear na segunda variável (em alguns livros é o contrário!), e que é Hermítico, ou seja, $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$. A norma é positivamente homogênea, ou seja, $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, e a norma de todo vetor é não negativa, ou seja, $\|f\| \geq 0$. Apesar do nome, esta norma não é estritamente positiva, pois pode acontecer que $\|f\| = 0$ para funções f que não são identicamente nulas (por exemplo, funções diferentes de zero num conjunto finito de pontos). Os matemáticos dizem que $\mathcal{R}(\mathbb{T})$, munido do produto interno L^2 , é um espaço *pré-Hilbertiano*.

O produto interno permite definir a ortogonalidade, e portanto enunciar o teorema de Pitágoras. Dois vetores f e g são ditos *ortogonais* quando $\langle f, g \rangle = 0$. O teorema de Pitágoras diz que se f e g são ortogonais então

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Se g é um vetor de norma diferente de zero, então cada vetor f pode ser decomposto numa soma $f = \lambda g + h$, com $\lambda \in \mathbb{C}$, de um vetor λg proporcional a g (chamado projeção de f sobre g) e um vetor h ortogonal a g . Um cálculo (a condição $\langle h, g \rangle = \langle f - \lambda g, g \rangle = 0$) mostra que o coeficiente deve ser escolhido igual $\lambda = \langle f, g \rangle / \|g\|^2$. A desigualdade $\|h\| \geq 0$ então implica que produto interno e a norma L^2 satisfazem a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (8.1)$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que a norma satisfaz a desigualdade do triângulo $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Então o quociente $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) / \sim$ pela relação de equivalência $f \sim g$ se $\|f - g\| = 0$ é um espaço euclidiano complexo.

As harmónicas, ou ondas planas (ou caracteres, na linguagem dos matemáticos),

$$e_n(t) := e^{int}$$

com $n \in \mathbb{Z}$, formam um sistema ortonormado (portanto independente). De fato,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Em particular, o espaço $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ não tem dimensão finita.

Coefficientes de Fourier e desigualdade de Bessel. Fixado um número natural N , seja $\mathcal{E}_N \approx \mathbb{C}^{2N+1}$ o subespaço de dimensão finita de $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ gerado pelas harmônicas e_n 's com $|n| \leq N$. Os vetores/pontos de $\mathcal{E}_N$ são chamados *polinômios trigonométricos* de grau N , e são somas finitas

19 nov 2018

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

com coeficientes $c_n \in \mathbb{C}$. Usando a identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, é também possível representar os pontos de $\mathcal{E}_N$ como combinações lineares de $\cos(nt)$ e $\sin(nt)$, com $0 \leq n \leq N$.

Dada uma função $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, colocamos o problema de minimizar a sua distância $\|f - p\|$ com os pontos p do subespaço $\mathcal{E}_N$. A intuição geométrica (nos espaços de dimensão finita) sugere que o mínimo seja atingido quando p é igual a projeção ortogonal de f sobre $\mathcal{E}_N$. A projeção ortogonal é o polinômio trigonométrico

$$S_N f = \sum_{|n| \leq N} c_n e_n,$$

onde os coeficientes c_n são os produtos escalares (i.e. as componentes)

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

Os c_n 's são chamados *coeficientes de Fourier* de f relativamente ao sistema ortonormado dos e_n 's. De fato, um cálculo elementar mostra que a diferença $f - S_N f$ é ortogonal a $\mathcal{E}_N$ (sendo ortogonal a todas as harmônicas $e_n \in \mathcal{E}_N$), e portanto, se $p \in \mathcal{E}_N$ é qualquer outro ponto, pelo teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} \|f - p\|^2 &= \|(f - S_N f) + (S_N f - p)\|^2 \\ &= \|f - S_N f\|^2 + \|S_N f - p\|^2 \geq \|f - S_N f\|^2. \end{aligned}$$

Mais um cálculo elementar mostra que o quadrado da distância entre f e $S_N f$ é

$$0 \leq \|f - S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{|n| \leq N} |c_n|^2 \quad (8.2)$$

Em particular, a série de termos não-negativos $\sum_n |c_n|^2$ é limitada, logo convergente. No limite quando $N \rightarrow \infty$ obtemos a

Teorema 8.1 (desigualdade de Bessel). *Se $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ e $c_n = \langle f, e_n \rangle$ são os seus coeficientes de Fourier, então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \|f\|^2.$$

ex: Considere o espaço $\mathcal{E}_N \approx \mathbb{C}^{2N+1}$ dos polinômios trigonométricos de grau $\leq N$, munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que o operador Laplaciano $\Delta : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}_N$, definido por $\Delta f = f''$, é auto-adjunto, e que é diagonal na base formada pelos e_n 's. Calcule a sua matriz nesta base (ou seja, os seus valores próprios). Mostre que o operador derivação $D : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}_N$, definido por $Df = f'$, é anti-auto-adjunto. Determine os seus valores próprios.

Geometria do espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$. Os coeficientes de Fourier de uma função integrável são sucessões $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tais que $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. O espaço de todas estas sucessões é chamado $\ell^2(\mathbb{Z})$, e pode ser munido de um produto interno

$$\langle c, d \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$$

que induz a norma

$$\|c\| := \sqrt{\langle c, c \rangle} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$ é

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n} \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 \right)^{1/2}$$

Portanto a “transformada de Fourier”, o operador $\mathcal{F} : f \mapsto (c_n)$, que associa a cada função integrável na circunferência a sucessão dos seus coeficientes de Fourier, envia $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ em $\ell^2(\mathbb{Z})$. A desigualdade de Bessel diz que este operador não dilata as normas.

8.2 Séries de Fourier

A série de Fourier é o “polinómios trigonométrico de grau infinito” que moralmente melhor aproxima a função. A esperança é que as harmónicas e_n ’s se comportem como uma “base” do espaço de dimensão infinita das funções integráveis munido da norma L^2 .

Séries de Fourier. Seja $f(x)$ é uma função integrável em $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ou seja, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período 2π , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo $(-\pi, \pi]$. A *série de Fourier (complexa)* de $f(x)$ é a série formal

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (8.3)$$

(o símbolo “ $\sim$ ” é apenas uma notação para dizer que a série à direita, que pode não ser convergente!, é a série de Fourier da função à esquerda!), onde os *coeficientes de Fourier (complexos)* de f são os números complexos

$$c_n = \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (8.4)$$

Em particular, o coeficiente c_0 é a média de f no intervalo $[-\pi, \pi]$ (ou em qualquer outro intervalo de comprimento 2π).

As “somas parciais da série de Fourier” são os polinómios trigonométricos

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

as projeções ortogonais de f sobre os subespaços $\mathcal{E}_N \subset \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, a série de Fourier (8.3) pode ser representada como uma série de senos e cossenos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (8.5)$$

onde $a_0/2 = c_0$, e $a_n = c_n + c_{-n}$ e $b_n = i(c_n - c_{-n})$ se $n \geq 1$, ou seja,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

É evidente que se f tem valores reais então também os seus coeficientes a_n e b_n são reais.

Se $f(x)$ é par, então $c_n = c_{-n}$, logo $b_n = 0$, para todos os $n \geq 1$, e a série de Fourier de f é uma série de cossenos $a_0/2 + \sum_n a_n \cos(nx)$ com coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Se $f(x)$ é ímpar, então $c_n = -c_{-n}$, logo $a_n = 0$, para todos os $n \geq 0$, e a série de Fourier de f é uma série de senos $\sum_n a_n \sin(nx)$ com coeficientes

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx.$$

ex: Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas de período 2π definidas, no intervalo $[-\pi, \pi]$ por (as soluções estão no formulário!)

$$f(\theta) = \theta, \quad f(\theta) = |\theta|, \quad f(\theta) = \theta^2,$$

$$\Theta(\theta) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}, \quad 2\Theta(\theta) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}.$$

$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ex: Mostre que a série de Fourier complexa da função *sawtooth* (dente de serra) $S(\theta)$, periódica de período 2π e definida por

$$S(\theta) := \begin{cases} \pi - \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -\pi - \theta & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq \theta < \pi$, é

$$S(\theta) \sim \frac{1}{i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{n} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n\theta).$$

ex: Mostre que a série de Fourier complexa da função *square wave* $Q(\theta)$, periódica de período 2π e definida por

$$Q(x) := \begin{cases} +1 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ -1 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq \theta < \pi$, é

$$Q(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} e^{-inx} = \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) - \right).$$

ex: [St08] 5.1, 5.2.

Fórmulas para séries de Fourier num intervalo genérico. Seja $f(x)$ é uma função integrável em $\mathbb{R}/2\ell\mathbb{Z}$, ou seja, uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período 2ℓ , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo $[-\ell, \ell]$. A *série de Fourier (real)* de $f(x)$ é

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são definidos pelos integrais

$$a_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \, dx \quad \text{e} \quad b_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \, dx.$$

Séries de Fourier de senos ou de cossenos. Também é útil, na resolução de problemas como a corda vibrante ou a propagação de calor, desenvolver funções, definidas num intervalo $[0, \pi]$, em séries de apenas senos ou apenas cossenos.

A *série de Fourier de senos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão ímpar 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

A *série de Fourier de cossenos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão par 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

Observe que uma mesma função $f(x)$, definida por exemplo no intervalo $[0, \pi]$, pode ser desenvolvida em série de senos ou em série de cossenos de nx , e ambas estas séries, como veremos em breve, convergem em algum sentido para $f(x)$ se a função for suficientemente regular. Num certo sentido, se senos e cossenos formam uma “base” do espaço das funções definidas em $[-\pi, \pi]$, qualquer uma das duas “metades” delas, senos ou cossenos, são suficientes para descrever as funções definidas no subintervalo $[0, \pi]$. O aparente paradoxo (típico dos infinitos) é explicado se observarmos que o que estamos a fazer na realidade é desenvolver as extensões ímpar ou par de $f(x)$, que são duas funções diferentes, definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$, que coincidem no intervalo $(0, \pi)$.

ex: Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, da extensão ímpar e 2π -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad 1 - \cos(2\theta) \qquad f(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \pi - \theta & \text{se } \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

ex: Determine as séries de Fourier de cossenos (ou seja, da extensão par e 2π -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad \sin(2\theta) \qquad \pi - \theta$$

8.3 Derivadas e decaimento dos coeficientes de Fourier

A velocidade do decaimento dos coeficientes de Fourier é determinado pela regularidade da função.

Lema de Riemann-Lebesgue. Se a função f é limitada então os coeficientes de Fourier também são limitados. De fato, se $|f(x)| \leq M$ então

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx \leq M.$$

Se f é contínua, a intuição sugere que os coeficientes $\hat{f}(n)$ com $|n|$ grande sejam pequenos. A ideia é que as harmônicas $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ com $|n| \gg 1$ oscilam rapidamente em intervalos pequenos, onde f não varia muito por ser contínua, e portanto acontecem cancelações entre termos positivos e termos negativos.

Teorema 8.2 (lema de Riemann-Lebesgue). Se $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável (por exemplo, seccionalmente contínua) então $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração. A desigualdade de Bessel 8.1 diz que se f é uma função integrável então a série $\sum_n |c_n|^2$ é convergente. Mas os termos de uma série convergentes decrescem para 0 quando $n \rightarrow \pm\infty$. $\square$

Derivadas e coeficientes de Fourier. As harmônicas $e_n(t) = e^{int}$ são funções próprias do operador derivação $Df := f'$, definido, por exemplo, no subespaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathcal{R}(\mathbb{T})$ das funções infinitamente deriváveis na circunferência. Isto implica a seguinte relação entre coeficientes de Fourier e derivadas.

Teorema 8.3. *Se a k -ésima derivada de f existe e é integrável, por exemplo se f é de classe $\mathcal{C}^k$, então os coeficientes de Fourier da k -ésima derivada de f são*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$$

Demonstração. Se f' é integrável, então os seus coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in) e^{-inx} dx \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

O teorema segue por indução. □

Esta relação simples entre coeficientes de Fourier e derivadas é a razão principal da utilidade das séries de Fourier na análise das equações diferenciais. Diz é que a “transformada de Fourier”, o operador $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$, que envia uma função $f(x)$ na sucessão $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dos seus coeficientes de Fourier, transforma derivadas $f \mapsto f'$ em produtos $c_n \mapsto in c_n$. De consequência, no espaço dos coeficientes de Fourier, uma equação diferencial é uma equação algébrica!

O lema de Riemann-Lebesgue 8.2 aplicado à k -ésima derivada então implica que

Teorema 8.4. *Os coeficientes de Fourier de uma função de classe $\mathcal{C}^k$ decaem mais rápido que $|n|^{-k}$, ou seja,*

$$\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$$

quando $n \rightarrow \pm\infty$.

De consequência, os coeficientes de Fourier de uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ decrescem mais rápido que o inverso de qualquer potência $|n|^k$.

ex: Determine a série de Fourier de uma função periódica de período 2π que resolva a equação

$$f' = 0$$

ou a equação de Laplace

$$f'' = 0.$$

8.4 Aplicações das séries de Fourier às EDPs

Condução de calor com temperatura constante na fronteira. A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $[0, \pi]$ com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo $t \geq 0$, e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx).$$

26 nov 2018

ex: Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

ex: Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

ex: Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = x \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

ex: Determine a solução formal do problema com condições de fronteira $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 200$, e condição inicial

$$u(x, 0) = 100 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

ex: Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada num ponto $a \in (0, \pi)$, ou seja,

$$u(x, 0) \sim \mu \cdot \delta(x - a).$$

ex: Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada numa vizinhança dum ponto $a \in (0, \pi)$, ou seja,

$$u(x, 0) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - a| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - a| > \varepsilon \end{cases},$$

com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Calcule o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ mantendo constante o produto $2\varepsilon\lambda = \mu$, e compare com o exercício anterior.

Condução de calor num condutor isolado. A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \pi],$$

no intervalo $[0, \pi]$ com fluxo nulo na fronteira (i.e. condutor isolado) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$ para todo $t \geq 0$, e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

ex: Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = x^2.$$

ex: Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x).$$

ex: Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

ex: Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

onde $0 < \beta < \pi$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Corda vibrante. A solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

de comprimento π , i.e. $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo $t \geq 0$, com condições iniciais (deslocamento/perfil e velocidade)

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(cnt) + \frac{b_n}{cn} \sin(cnt) \right) \sin(nx)$$

ex: Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(4x) - \sin(5x).$$

ex: Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (deslocamento inicial “triangular”)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

ex: Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

ex: Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (impulso inicial concentrado no ponto médio)

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2).$$

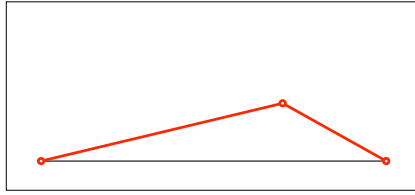
Timbres: cavaquinho e piano. Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento $\ell = \pi$, densidade linear ρ e afinada com tensão k . As pequenas vibrações são modeladas pela equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \pi], \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$.

Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

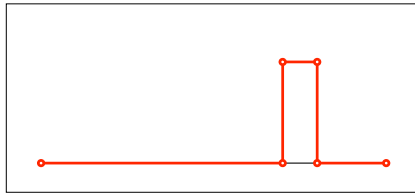
$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} \frac{h}{\alpha} x & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\pi - \alpha} (\pi - x) & \text{se } \alpha \leq x < \pi \end{cases}$$



onde $0 < \alpha < \pi$ é o ponto onde dedilhamos a corda, e h é o máximo do deslocamento inicial.

Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação, podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo transmite à corda apenas um impulso instantâneo $p = 2\varepsilon\rho v$ localizado num intervalo de comprimento pequeno $2\varepsilon \ll \pi$ à volta de um ponto $0 < \beta < \pi$ da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$



ex: Mostre que as amplitudes das harmónicas da corda do cavaquinho são

$$A_n = \frac{2h}{\alpha(\pi - \alpha)} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}.$$

ex: Mostre que as amplitudes das harmónicas da corda do piano são

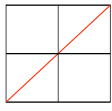
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2v}{c} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n^2} \frac{\sin(n\beta)}{n^2} \\ &\simeq \frac{p}{c\rho} \frac{\sin(n\beta)}{n}. \end{aligned}$$

no limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ mantendo constante o impulso transferido $p = 2\varepsilon\rho v$ (o que faz sentido desde que $n\varepsilon \ll 1$, ou seja, para as primeiras harmónicas).

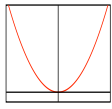
ex: De consequência, as energias $E_n \sim A_n^2 \nu_n^2$ das (primeiras) harmónicas decaem como $E_n \sim 1/n^2$ no caso do cavaquinho e como $E_n \sim 1$ no caso do piano. Explique porque o som do piano é mais “cheio” do que o som do cavaquinho.

Séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

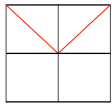
	função $\sim$ série de Fourier ($x \in [-\pi, \pi]$)	coefficients de Fourier ($n \in \mathbb{Z}$)
complexa	$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$	$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$
real	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$	$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ $b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Algumas séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$ função em $[-\pi, \pi]$ $\sim$ série de Fourier x

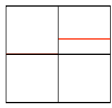
$$\sim 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

 x^2

$$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right)$$

 $|x|$

$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right)$$



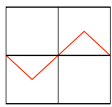
$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



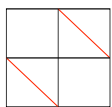
$$2\Theta(x) - 1 := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$S(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim 2 \left(\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

9 Convergência das séries de Fourier

9.1 Convergência uniforme

22 nov 2018

Sucessões e séries de funções. Seja (f_n) uma sucessão de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), definidas numa região $X \subset \mathbb{R}^d$ fixada (por exemplo, um intervalo $[a, b]$ da reta real).

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é o *limite pontual* das f_n 's, ou $f_n \rightarrow f$ *pontualmente* (ou seja, “as f_n 's convergem pontualmente para f ”), se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo o $x \in X$. Isto significa que para cada x e cada $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ (que depende de ε e do ponto x) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ se $n > \bar{n}$.

Acontece que o limite pontual não herda necessariamente as boas propriedades das f_n 's. Por exemplo, o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas pode não ser uma função contínua (qual o limite pontual da sucessão $f_n(x) = x^n$ definida em $[0, 1]$?).

A *norma uniforme* no espaço linear $\mathcal{C}_b(X)$ das funções limitadas definidas em X é

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Induzes a *distância uniforme* $\text{dist}_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty$.

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é o *limite uniforme* das f_n 's, ou $f_n \rightarrow f$ *uniformemente* (ou seja, as f_n 's convergem *uniformemente* para f), se $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ (que depende de ε mas é independente do ponto x , ou seja, “uniforme em x ”) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo o $x \in X$ se $n > \bar{n}$.

O teste de Cauchy para a convergência uniforme é o seguinte: $f_n \rightarrow f$ uniformemente sse para todo o $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ quando $n, m > \bar{n}$.

Teorema 9.1. *O limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Se n é suficientemente grande, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo o $x \in X$. Pela continuidade de f_n , existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ se $|x - x'| < \delta$. Então, pela desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

se $|x - x'| < \delta$. □

Uma série de funções $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente para uma função $F(x)$ num domínio $X \subset \mathbb{R}^d$ se a sucessão das somas parciais $S_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ converge uniformemente para F , ou seja se $\|S_n - F\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

O critério de Cauchy para a convergência uniforme de uma série é o seguinte: $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente para $F(x)$ se para todo o $\varepsilon > 0$, existe um tempo $\bar{n}$ tal que

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

para todo o $x \in D$ e todos os $n > \bar{n}$ e $m \geq 1$.

Se os termos $f_n(x)$ da série são limitados uniformemente pelos termos de uma série numérica $\sum_n M_n$, ou seja, se $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo o $x \in X$, então

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \leq |M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+m}|$$

Em particular,

Teorema 9.2 (Teste M de Weierstrass). *Se $\sum_n M_n$ é uma série (numérica) convergente e $\|f_n\|_\infty \leq M_n$ para todo o n , então a série de funções $\sum_n f_n(x)$ é uniformemente convergente.*

Se as f_n 's são contínuas, então também as somas parciais S_n são contínuas, e de consequência, pelo teorema 9.1, o limite uniforme da série $\sum_n f_n(x)$ é também uma função contínua.

A convergência uniforme da série $\sum_n f_n(x)$ de funções contínuas f_n 's num intervalo limitado $[a, b]$ garante que o integral da soma é a soma dos integrais, i.e.

$$\int_a^b \left(\sum_n f_n(x) \right) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

A convergência uniforme da série $\sum_n f_n(x)$ (mas é suficiente a convergência apenas num ponto!) e da série das derivadas $\sum_n f'_n(x)$ de funções f_n 's de classe $\mathcal{C}^1$ num intervalo $[a, b]$ garantem que a soma $\sum_n f_n(x)$ é uma função derivável, e que a sua derivada pode ser calculada somando as derivadas das f_n 's, i.e.

$$\left(\sum_n f_n(x) \right)' = \sum_n f'_n(x).$$

ex: Determine o limite pontual da sucessão $f_n(x) = x^n$, definida no intervalo $[0, 1]$.

ex: A sucessão $f_n(x) = \sin(nx)$, definida em $[-\pi, \pi]$, converge pontualmente?

ex: Use o teste M de Weierstrass, o teorema 9.2, para mostrar que a série

$$f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

é uniformemente convergente.

Conditional convergence and rearrangements. A series which is convergent but not absolutely convergent is called *conditionally convergent*. The standard example is the alternating harmonic series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

which converges to $\log 2$. It was noted by Dirichlet, while working on the convergence of Fourier series (which are oscillating series!), that rearranging such a series and pretending to use ordinary algebra produces apparent paradoxes. The problem is that our elementary algebraic rules do not hold (and indeed we never checked them!) with infinite sums. Indeed, according to *Riemann rearrangement theorem*¹⁰, the terms of such a series can be rearranged in such a way to converge to any given number!

Teorema 9.3 (Riemann rearrangement theorem). *Let $\sum x_n$ be a conditionally convergent series. Given any real number S , there exists a permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ of the naturals such that*

$$\sum_n x_{\sigma(n)} = S.$$

The idea is simple, although writing the details may be messy. It is clear that a conditionally convergent series must have infinite positive and infinite negative terms, and that both such series are divergent, for otherwise the series would be absolutely convergent. Fixed any real number S , for example positive, one may start summing the first positive terms until their sum is above S , then add the first negative terms until the sum is below S , then add enough positive terms until the sum is above S , ... and so on. The partial sums of such rearrangement oscillate around S with an error which is not greater than the absolute value of the last x_n we added. But $x_n \rightarrow 0$ because the series is convergent.

ex: Modify the above argument and show that a conditionally convergent series may also be rearranged in order to its sum be $\pm\infty$.

¹⁰B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Gesammelte Mathematische Werke* (Leipzig 1876), 213-253.

Séries de Fourier e séries de Laurent. Seja $g(z)$ é uma função holomorfa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contém (um anel que contém) a circunferência unitária $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$. A sua expansão em série de Laurent centrada em $p = 0$,

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

pode ser escrita, nos pontos $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}$ (i.e. com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), como

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Os “coeficientes” c_n da série de Laurent de $g(z)$ são portanto os coeficientes de Fourier da função $f(\theta) := g(e^{i\theta})$, periódica de período 2π . Neste caso, a série de Fourier de $f(\theta)$ é convergente, uniformemente na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, e converge para a própria função.

Convergência uniforme das séries de Fourier. A série de Fourier de uma função $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^2$ converge uniformemente (para uma função contínua), pois, pelo teorema 8.3 e pelo lema de Riemann-Lebesgue 8.2, os seus coeficientes de Fourier são limitados por

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{M}{n^2}$$

(se $n \neq 0$), e de consequência a série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ é uniformemente convergente.

De fato, pela convergência uniforme da série de Fourier é suficiente uma regularidade menor. Uma função f é *seccionalmente regular* se é contínua e se a sua derivada f' é seccionalmente contínua.

Teorema 9.4. *A série de Fourier de uma função seccionalmente regular, por exemplo de classe $\mathcal{C}^1$, é uniformemente absolutamente convergente.*

Demonstração. Pelo teorema 10.7, a desigualdade de Cauchy-Schwarz 8.1, e depois pela desigualdade de Bessel 8.1, a série dos módulos é limitada por

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| &= |c_0| + \sum_{n \neq 0} \frac{|\hat{f}'(n)|}{|n|} \\ &\leq |c_0| + \sqrt{\sum_{n \neq 0} 1/|n|^2} \sqrt{\sum_{n \neq 0} |\hat{f}'(n)|^2} \\ &\leq |c_0| + C \|f'\|_2, \end{aligned}$$

onde $C^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$. □

Se a série de Fourier de f converge uniformemente, a sua soma $\sum_n \hat{f}(n) e^{inx}$ é uma função contínua. Esta soma tem grandes probabilidades de ser a própria f . De fato, é possível provar o seguinte resultado de unicidade.

Teorema 9.5. *Se $f(x)$ é uma função contínua na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e os seus coeficientes de Fourier são nulos, i.e. $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $f(x) \equiv 0$.*

Demonstração. A ideia é a seguinte (os detalhes da demonstração estão em [SS03I], Theorem 2.1 e Corollary 2.2.). Queremos provar que se x é um ponto de continuidade de f , que a menos de translações podemos assumir ser $x = 0$, e se $f(0) > 0$, então os coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ não

podem ser todos nulos. Assumimos que todos os $\widehat{f}(n)$ sejam nulos. A ideia é considerar uma pequena translação $p(x) = \cos(x) + c$ do cosseno de maneira tal que $|p(x)| < \varepsilon < 1$ fora duma vizinhança $|x| < \delta$ da origem onde $|f(x)| \geq f(0)/2$, que $p(x) > 0$ se $|x| \leq \delta$, e que $|p(x)| > \lambda > 1$ se $|x| \leq \delta' < \delta$. Então é claro que as potências

$$p_k(x) := (p(x))^k$$

são polinômios trigonométricos, e o integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x) dx \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Isto é um absurdo, pois $\langle f, p_k \rangle$ é uma combinação linear de coeficientes de Fourier de f , que são nulos. $\square$

Um corolário é que duas funções contínuas que têm os mesmos coeficientes de Fourier são necessariamente iguais. Por outro lado, é fácil ver que se a série de Fourier de f converge uniformemente, então os coeficientes de Fourier da soma $\sum \widehat{f}(n)e^{inx}$ são os próprios $\widehat{f}(n)$ (trocando somas e integral). De consequência, se a série de Fourier de uma função contínua $f(x)$ converge uniformemente, então converge uniformemente para a própria $f(x)$. Isto acontece, por exemplo, para uma função de classe C^1 .

Teorema 9.6. *A série de Fourier de uma função $f(x)$ seccionalmente regular, por exemplo de classe C^1 , converge absolutamente e uniformemente para $f(x)$.*

9.2 Produto de convolução e convergência pontual

Muitas funções interessantes e úteis não são contínuas. As séries de Fourier destas funções não podem ser uniformemente convergentes.

Produto de convolução. O produto de convolução entre as funções integráveis $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, pensadas como funções periódicas de período 2π na reta, é a função

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy.$$

também periódica de período 2π . Um interpretação é que o valor de $f * g$ num ponto x é uma “média” pesada dos valores $f(y)$, os pesos sendo os valores $g(x - y)$ da função g .

O produto de convolução é simétrico, i.e. $f * g = g * f$, e linear nas duas variáveis, ou seja, $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ para todos os $\lambda \in \mathbb{R}$, e $f * (g + h) = f * g + f * h$. É também associativo, ou seja, $(f * g) * h = f * (g * h)$. As demonstrações são elementares.

Outro fenómeno importante é que o produto de convolução de duas funções integráveis é uma função contínua! A convolução melhora a regularidade das funções (mas a prova não é elementar).

A importância do produto de convolução na teoria das séries de Fourier e nas suas aplicações às equações diferenciais depende do seguinte resultado.

Teorema 9.7. *Os coeficientes de Fourier de um produto de convolução são iguais aos produtos dos coeficientes de Fourier dos fatores, i.e.*

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$$

Demonstração. Se f e g são contínuas

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x - y) e^{-in(x-y)} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) dy \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) \end{aligned}$$

O caso geral usa o seguinte teorema de aproximação: se f é uma função integrável e limitada por M , existe uma sucessão (f_k) de funções contínuas limitadas por M e tais que os integrais das diferenças $|f - f_k|$ tendem para 0 quando $k \rightarrow \infty$. Os detalhes estão em [SS03I]. $\square$

Convergência pontual das séries de Fourier. Seja $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável e c_n os seus coeficientes de Fourier. As somas parciais da série de Fourier de f podem ser representadas como o produto de convolução

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \end{aligned} \quad (9.1)$$

da própria função com o *núcleo de Dirichlet*, definido por

$$\begin{aligned} D_N(x) &:= \sum_{n=-N}^N e^{inx} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Teorema 9.8. Se $f(x)$ é uma função seccionalmente regular, então as somas parciais $S_N f(x)$ da sua série de Fourier convergem em cada ponto x para o valor médio dos limites laterais $f(x^\pm)$, ou seja,

$$S_N f(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

quando $N \rightarrow \infty$. Em particular, convergem para $f(x)$ nos pontos onde f é contínua.

Demonstração. O núcleo de Dirichlet pode ser representado como

$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2} \quad (9.3)$$

Usando (9.1) e as (9.3), e depois (9.2), podemos representar a diferença entre as somas parciais $S_N f(x)$ e o valor médio $(f(x^+) + f(x^-))/2$ como um integral

$$\begin{aligned} S_N f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x+y) - f(x^-)) D_N(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+y) - f(x^+)) D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) \left(e^{i(N+1)y} - e^{iNy} \right) dy \end{aligned}$$

onde F é a função definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} & \text{se } -\pi < y < 0 \\ \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} & \text{se } 0 < y < \pi \end{cases}$$

Se f é seccionalmente regular, então $F(x, y)$ admite limites laterais quando $y \rightarrow 0^\pm$, pela regra de l'Hôpital, e portanto é seccionalmente contínua. Então os integrais de $F(x, y)$ vezes e^{iNy} convergem para zero quando $N \rightarrow \infty$ pelo lema de Riemann-Lebesgue 8.2. $\square$

Em particular, pelo teorema 9.4, a série de Fourier de uma função $f(x)$ contínua e seccionalmente regular converge para $f(x)$ na norma uniforme, ou seja, $\|f - S_N f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$.

A hipótese no teorema 9.8 não é a melhor possível. Para a convergência no ponto x é suficiente que a função $F(x, y)$, definida na demonstração, seja integrável, em quanto função de y , numa vizinhança de $y = 0$. Esta é chamada “condição de Dini”.

Também é possível ler a regularidade de uma função no decaimento dos seus coeficientes de Fourier.

Teorema 9.9. *Se os coeficientes de Fourier c_n de uma função f decaem como*

$$|c_n| \leq C |n|^{-(k+\alpha)}$$

com $\alpha > 1$, uma constante $C > 0$ e um natural k , então a função f é de classe $\mathcal{C}^k$.

Demonstração. Para cada $0 \leq k' \leq k$, a série de Fourier $\sum_n (in)^{k'} c_n e^{inx}$ é absolutamente e uniformemente convergentes, pois

$$\sum_n |n|^{k'} |c_n| \leq \sum_n |n|^{-\alpha} < \infty$$

se $\alpha > 1$. A sua soma é uma função contínua, igual a k' -ésima derivada de $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$. $\square$

ex: Verifique a fórmula (9.2) para o núcleo de Dirichlet (use as somas parciais da série geométrica).

ex: Verifique que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

ex: Calcule a série de Fourier de $f(x) = |x|$ em $x = 0$ e deduza a identidade

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

ex: Calcule a série de Fourier de $f(x) = x^2$ em $x = 0$ e deduza a identidade

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

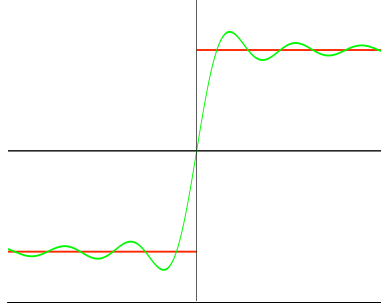
ou em $x = \pi$ e deduza a identidade

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Fenômeno de Gibbs. Uma série de Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ não pode ser convergente nos pontos de descontinuidade de $f(x)$. Se f tem um salto de amplitude $\delta := |f(x^+) - f(x^-)|$ no ponto x , então os gráficos das somas parciais da série de Fourier convergem para um segmento vertical que excede o salto de aproximadamente

$$-\frac{\delta}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \simeq \frac{0.28}{\pi} \delta \simeq 0.09 \cdot \delta$$

em cada lado.



Soma parcial de grau 17 (verde) da série de Fourier da função $2\Theta(x) - 1$ (vermelho), numa vizinhança da origem.

9.3 Identidades aproximadas e teorema de Fejer

Delta de Dirac. A “função” delta de Dirac em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é definida pela identidade formal

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \delta(x - y) dy = f(x),$$

se $f(x)$ é uma função contínua e periódica de período 2π . De facto, δ não é uma função, mas uma “medida”, um funcional linear definido no espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ das funções contínuas na circunferência, que associa à função $f(x)$ o valor $\langle \delta, f \rangle := f(0)$. Pode ser definida/pensada como sendo um limite (no sentido das distribuições) de uma família de funções satisfazendo as propriedades codificadas na definição de “identidade aproximada”.

Identidades aproximadas. Uma *identidade aproximada* (ou *good kernels*) na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é uma sucessão $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de funções integráveis $K_n(x)$ de massa total unitária, i.e.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1, \quad (9.4)$$

uniformemente integráveis, i.e. tais que existe $M > 0$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M \quad (9.5)$$

para todos os $n \in \mathbb{N}$ (esta condição é uma consequência de (9.4) se $K_n(x) \geq 0$), e tais que, para cada $\delta > 0$, os integrais

$$I_n(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad (9.6)$$

quando $n \rightarrow \infty$ (ou seja, assintoticamente concentradas na origem).

A expressão “identidade aproximada” é justificada pelo seguinte

Teorema 9.10. Se f é uma função contínua e $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma identidade aproximada, então

$$(f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) K_n(y) dy \rightarrow f(x)$$

uniformemente quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pela continuidade uniforme de f (contínua e periódica), existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/M$ se $|x - y| < \delta$. Seja $m = \sup_x |f(x)|$. Usando (9.4),

$$\begin{aligned} (f * K_n)(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x - y) - f(x)) K_n(y) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} (f(x - y) - f(x)) K_n(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} (f(x - y) - f(x)) K_n(y) dy \end{aligned}$$

O módulo do primeiro integral é limitado por ε , pela (9.5). O módulo do segundo integral é limitado por $2m I_n(\delta)$, definido na (9.6). Como $I_n(\delta) \rightarrow 0$, existe $\bar{n}$ tal que $I_n(\delta) \leq \varepsilon/2m$ se $n \geq \bar{n}$. De consequência, se $n \geq \bar{n}$, a distância entre $f(x)$ e $(f * K_n)(x)$ é limitada por 2ε , independentemente de x . $\square$

A delta de Dirac pode então ser interpretada/definida como o limite $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$, ou seja, pela seguinte identidade formal: $f * \delta := \lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n$.

ex: Verifique que a família de funções definidas por $K_n(x) = n/2$ se $|x| \leq 1/n$ e $K_n(x) = 0$ se $|x| > 1/n$, forma uma identidade aproximada.

Somas de Cesáro. Seja $\sum a_n$ uma série (formal, ou seja, convergente ou não), e sejam $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ as suas somas parciais. As *somas de Cesáro* da série $\sum a_n$ são as médias aritméticas

$$C_N := \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_N}{N}$$

das primeiras N somas parciais. É evidente que se a série é convergente, ou seja, se $S_N \rightarrow S$, então também $C_N \rightarrow S$ quando $N \rightarrow \infty$. A sucessão das C_N pode ser convergente também quando a série $\sum a_n$ (ou seja, a sucessão das somas parciais S_N) é divergente.

Por exemplo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ é divergente (pois as somas parciais assumem valores alternados 1 e 0), mas as suas somas de Cesáro convergem (para que valor?).

Somas de Fejer e teorema de aproximação de Weierstrass. As somas de Cesáro da série de Fourier de uma função integrável f são chamadas *somas de Fejer*. Um cálculo mostra que são dadas pela convolução

$$\begin{aligned} F_N f(x) &:= \frac{1}{N} (S_0 f(x) + S_1 f(x) + S_2 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-y) \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_N(x-y) dy \end{aligned} \quad (9.7)$$

da própria função com o *núcleo de Fejer*, definido por

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \quad (9.8)$$

É evidente que as $F_N f(x)$ são, assim como as $S_N f(x)$, polinómios trigonométricos de grau N . Acontece que

Teorema 9.11. *Os núcleos de Fejer formam uma identidade aproximada.*

Demonstração. A massa total de cada F_N (que é uma função não negativa) é igual a um, pois o mesmo acontece para os D_n , dos quais F_N é a média aritmética. Se $0 < \delta < |x| \leq \pi$ então $\sin^2(x/2) \geq c > 0$, e de consequência

$$F_N(x) \leq \frac{1}{cN}.$$

Isto implica que

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$. $\square$

Portanto, pela fórmula (9.7) e pelo teorema 9.10,

Teorema 9.12 (Fejer). *Se $f(x)$ é uma função contínua na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, então as somas de Fejer (9.7) convergem uniformemente para a própria $f(x)$ quando $N \rightarrow \infty$.*

As somas de Fejer $F_N(x)$ são polinômios trigonométricos. Portanto, o teorema de Fejer dá uma prova construtiva do *teorema de aproximação de Weierstrass*.

Teorema 9.13 (de aproximação de Weierstrass). *Os polinômios trigonométricos são densos no espaço $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ das funções contínuas $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ munido da norma do sup.*

Ou seja, para toda função contínua $f(x)$ na circunferência, e para toda precisão $\varepsilon > 0$, existe um polinômio trigonométrico $p(x)$ tal que

$$\|f - p\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

ex: Verifique a expressão (9.8): calcule $NF_N(x)$ usando a identidade (9.2)

$$\begin{aligned} NF_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+1/2)x} \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left(\frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix/2} - e^{ix/2}} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

9.4 Convergência em média quadrática

Convergência em média quadrática. Uma função integrável $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser aproximada com precisão arbitrária na norma do sup por funções contínuas (ou até C^∞). Pelo teorema de Weierstrass 9.13, as funções contínuas podem ser aproximadas com precisão arbitrária na norma do sup por polinômios trigonométricos. Portanto, existe uma família (T_n) de polinômios trigonométricos tais que $\|f - T_n\|_\infty \rightarrow 0$. A convergência na norma do sup implica, sendo o comprimento da circunferência finito, a convergência na norma L^2 . Pela (prova da) desigualdade de Bessel 8.1, $\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - T_n\|_2$ se N é superior ou igual ao grau de T_n . Portanto,

Teorema 9.14 (convergência em média quadrática). *A série de Fourier de uma função integrável $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ converge para a própria função em média quadrática, ou seja,*

$$\|f - S_N f\|_2 \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$.

A fórmula (8.2) então implica que a desigualdade de Bessel é, na verdade, uma igualdade.

Teorema 9.15 (identidade de Parseval). *Se $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função integrável então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$$

Sendo os produtos internos determinados pelas normas, usando as identidades de polarização

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2),$$

a identidade de Parseval 9.15 implica e é equivalente ao seguinte resultado.

Teorema 9.16 (teorema de Parseval). *Se f e g são funções integráveis na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \langle f, g \rangle_2$$

A identidade de Parseval é uma versão do teorema de Pitágoras em dimensão infinita. Do ponto de vista físico, é um teorema de conservação, chamado *teorema da energia de Rayleigh* (*Rayleigh energy theorem*). O teorema de Parseval diz que a “transformada de Fourier”, o operador $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ que envia uma função integrável na sucessão dos seus coeficientes de Fourier, é um operador unitário de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ em $\ell^2(\mathbb{Z})$.

ex: Mostre que as séries de Fourier de $f(x) = x$, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, é

$$\sum_{n \neq 0} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}.$$

Calcule $\|f\|_2^2$ e use a identidade de Parseval para deduzir

$$\zeta(2) := 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

ex: [St08] 5.4, 5.5.

10 Transformada de Fourier

10.1 Transformada de Fourier

29 nov 2018

Heuristic. Fourier series allow us to represent sufficiently regular functions $f(x)$ on the unit circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ as finite or countable superpositions $f(x) \simeq \sum_n c_n e^{inx}$ of harmonics $e_n(x) = e^{inx}$. Harmonics are eigenfunctions of (the derivative operator D , and of) the Laplacian $-\Delta = (iD)^2$, which is a self-adjoint non-negative operator if we equip the space of twice differentiable functions on the circle with the L^2 inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. The coefficients of the Fourier series are the projections $\langle f, e_n \rangle$. What we are doing is writing vectors f in a orthonormal basis which diagonalizes the Laplacian. This is useful mainly because most interesting differential equations have the Laplacian somewhere (Laplace equation, wave equation, heat equation, Schrödinger equation, ...).

When we consider functions on the real line (i.e. when we consider circles $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ with increasing radius $R \rightarrow \infty$), the possible harmonics are no longer countable, but are parametrized by a continuous of allowed angular frequencies (since $\frac{1}{R}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ as $R \rightarrow \infty$). Each harmonic $e_\xi(x) = e^{i\omega x}$, with $\omega \in \mathbb{R}$, is an eigenvector of the derivative operator D with eigenvalue $i\omega$, and therefore of the Laplacian $-\Delta = (iD)^2$, with eigenvalue ω^2 . Thus, we expect to be able to represent sufficiently regular functions as superpositions $f(x) \simeq \int c(\omega) e^{i\omega x} d\omega$, which this time are integrals. The natural inner product also become an integral $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$. We still expect the right coefficients $c(\omega)$ to be the projections like $c(\omega) = \langle f, e_\omega \rangle$. It happens that this is the case, but we are faced with the apparent paradox that the harmonics e_ω doesn't have finite norm. Thus, we are trying to compute projectios onto lines which are outside the euclidean space we are working with!

Transformada de Fourier de funções integráveis. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ função absolutamente integrável (por exemplo, uma função seccionalmente contínua que decai como $|f(x)| \leq C/(1 + |x|^{1+\varepsilon})$ com $\varepsilon > 0$). A transformada de Fourier de f é a função $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{C}$ definida pelo integral impróprio

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (10.1)$$

O espaço onde vive a “variável conjugada” $\xi \in \mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$ (o dual de Pontryagin do corpo dos reais, isomorfo ao próprio $\mathbb{R}$). Uma notação tradicional é $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Se a variável independente da função $f(t)$ é um “tempo” t , então a variável conjugada ξ representa uma “frequência” (pois o produto deve ser adimensional). Uma definição alternativa usa a “frequência angular” $\omega = 2\pi\xi$, e é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (10.2)$$

na notação dos engenheiros. Se a variável independente da função $f(x)$ é uma “posição” x , então a variável conjugada ξ representa um “momento” p sobre uma “ação” (como, por exemplo, a constante de Planck $h \simeq 6.63 \times 10^{-34}$ J · s no contexto da mecânica quântica, assim que $e^{2\pi i \xi x} = e^{ipx/\hbar}$, onde $\hbar = h/2\pi$).

Propriedades elementares. . A transformada de Fourier é linear, ou seja,

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda(\mathcal{F}f)$$

se $\lambda \in \mathbb{C}$.

A transformada de Fourier de uma translação $(T_a f)(t) := f(t - a)$ no espaço dos tempos é uma modulação

$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi) \quad (10.3)$$

no espaço das frequências. Vice-versa, a transformada de Fourier de uma modulação $(M_b f)(t) := e^{2\pi i b t} f(t)$ no espaço dos tempos é uma translação

$$\widehat{(M_b f)}(\xi) = \hat{f}(\xi - b) \quad (10.4)$$

no espaço das frequências. Portanto, a transformada de Fourier “entrelaça” translações com modulações:

$$\mathcal{F} \circ T_a = M_{-a} \circ \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \circ M_b = T_b \circ \mathcal{F}.$$

A transformada de Fourier de uma homotetia $(H_\lambda f)(t) := f(\lambda t)$ no espaço dos tempos, com $\lambda > 0$, é

$$\widehat{(H_\lambda f)}(\xi) = \lambda^{-1} \widehat{f}(\xi/\lambda), \quad (10.5)$$

ou seja, $\mathcal{F} \circ H_\lambda = \lambda^{-1} H_{\lambda^{-1}} \circ \mathcal{F}$. A transformada de Fourier da função complexa conjugada $\overline{f(t)} := \overline{f(t)}$ é

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)} \quad (10.6)$$

ex: Mostre que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua tal que $|f(x)| \leq C/(1 + |x|^{1+\varepsilon})$, com $\varepsilon > 0$, então

$$I_N = \int_{-N}^N |f(x)| dx$$

é uma sucessão de Cauchy, e de consequência existe o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$

ex: Verifique as propriedades (10.3), (10.4), (10.5) e (10.6).

ex: Use as propriedades (10.3) (10.4) e a fórmula de Euler para mostrar que a transformada de Fourier de $f(x) \cos(\alpha x)$ é

$$\frac{1}{2} \left(\widehat{f}(x - \alpha) + \widehat{f}(x + \alpha) \right)$$

e que a transformada de Fourier de $f(x) \sin(\alpha x)$ é

$$\frac{1}{2i} \left(\widehat{f}(x - \alpha) - \widehat{f}(x + \alpha) \right)$$

ex: Calcule a transformada de Fourier da função característica do intervalo $[-\ell, \ell]$.

ex: Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \text{e} \quad f(x) = e^{-2\pi b|x|}.$$

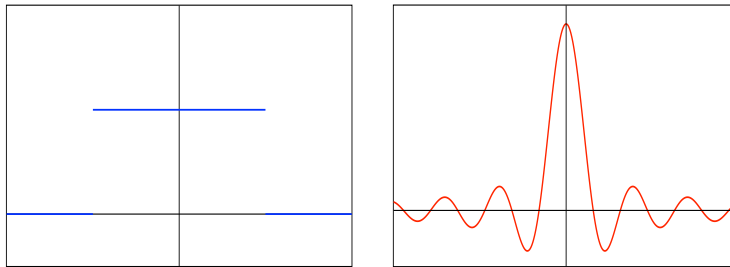
com $b > 0$.

Pulso e sinc. O *pulso*, ou *função retangular*, é a função característica do intervalo de comprimento um à volta da origem, ou seja,

$$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A transformada de Fourier do pulso é a função *sinc* (“sinus cardinalis”) normalizada

$$\begin{aligned} \widehat{\text{rect}}(\xi) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi} =: \text{sinc}(\xi) \end{aligned}$$



3 dez 2018

Transformada de Fourier no espaço de Schwartz. O espaço das funções absolutamente integráveis é muito grande, e não é fácil compreender as propriedades das transformadas de Fourier dos seus elementos. Mais fácil é restringir a transformada a um espaço muito menor, feito de funções muito regulares.

O *espaço de Schwartz* (da reta real) é o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis na reta real que decrescem, com todas as suas derivadas, mais rápido que o inverso de qualquer polinômio. Ou seja, o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $\|f\|_{n,m} < \infty$ para todos os $n, m \in \mathbb{N}$, onde as semi-normas $\|\cdot\|_{n,m}$ são definidas por

$$\|f\|_{n,m} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)|$$

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então pertencem ao espaço de Schwartz, e em particular são absolutamente integráveis, também todas as derivadas $f^{(k)}(x)$ e os produtos $p(x)f^{(k)}(x)$, onde $p \in \mathbb{C}[t]$ é um polinômio arbitrário. O *operador derivação* é definido por $(Df)(x) := f'(x)$, e o *operador multiplicação* é definido por $(Xf)(x) := xf(x)$. Então D e X são operadores lineares do espaço de Schwartz no próprio espaço de Schwartz.

A transformada de Fourier entrelaça derivadas com multiplicações, e esta é a causa da importância da transformada no estudo das equações diferenciais.

Teorema 10.1. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então a transformada de Fourier da derivada f' e a derivada da transformada de Fourier de f são*

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) \quad e \quad \widehat{f'}(\xi) = \widehat{(-2\pi i x f)}(\xi), \quad (10.7)$$

respetivamente, ou seja, $\mathcal{F} \circ D = 2\pi i X \circ \mathcal{F}$ e $-2\pi i \mathcal{F} \circ X = D \circ \mathcal{F}$.

Por indução, a transformada de Fourier da k -ésima derivada de f é igual a $(2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi)$, e a k -ésima derivada da transformada de Fourier de f é a transformada de Fourier de $(-2\pi i x)^k f(x)$. Em particular, a transformada de Fourier envia o espaço de Schwartz em si próprio, ou seja pode ser pensado como um operador linear $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$.

ex: Mostre que uma função de Schwartz é uniformemente contínua (é arbitrariamente pequena numa vizinhança de $\pm\infty$ e uniformemente contínua na região compacta complementar).

ex: Mostre que uma função de Schwartz $f(x)$ com valores reais é par sse $\widehat{f}(\xi)$ é real, e é ímpar sse $\widehat{f}(\xi)$ é imaginário puro.

Produto de convolução. . O *produto de convolução* das funções de Schwartz f e g é a função $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy$$

Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então também $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. O produto de convolução é simétrico e associativo.

Teorema 10.2. *A transformada de Fourier de um produto de convolução é o produto pontual das transformadas de Fourier dos fatores, ou seja,*

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)} \quad (10.8)$$

ex: Mostre que o produto de convolução $(\text{rect} * \text{rect})(t)$ é a *função triangular*

$$\text{tri}(t) := \max\{1 - |t|, 0\},$$

e calcule a transformada de Fourier de $\text{tri}(x)$.

10.2 Identidades aproximadas e fórmula de inversão

Delta de Dirac. A função *salto unitário* $\Theta(x)$ é a função que vale 1 se x é positivo e 0 se x é negativo. A integração por partes mostra que o produto de convolução da derivada da função salto unitário (que naturalmente não existe em quanto função!) reproduz uma função de Schwartz, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(y - x) f(y) dy = \Theta(y - x) f(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(y - x) f'(y) dy = f(x).$$

A derivada $\Theta'(x)$ é chamada *delta de Dirac*, e denotada por $\delta(x)$. É definida pela identidade formal

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - x) f(y) dy := f(x)}.$$

Identidades aproximadas. Uma *identidade aproximada* na reta real é uma família de funções integráveis (K_n) não-negativas, ou uniformemente absolutamente integráveis, i.e. tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x)| dx < M,$$

de massa total unitária, i.e. tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) dx = 1,$$

e “assimptoticamente concentradas na origem”, i.e. tais que para todo $\delta > 0$

$$I_n(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} K_n(x) dx \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. A mesma prova do teorema 9.10, mutatis mutandis, mostra que

Teorema 10.3. *Se $f(x)$ é integrável e uniformemente contínua, por exemplo é uma função de Schwartz, e (K_n) é uma identidade aproximada na reta real, então*

$$(f * K_n)(x) \rightarrow f(x)$$

uniformemente quando $n \rightarrow \infty$.

ex: Mostre que a família das $K_n(x) := n \cdot \text{rect}(nx)$ é uma identidade aproximada.

Gaussianas e núcleo do calor. As *gaussianas* são as funções de Schwartz $Ce^{-\gamma x^2}$, onde C e $\gamma > 0$ são parâmetros reais. O cálculo

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

mostra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}, \quad \text{ou seja,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Teorema 10.4. A gaussiana $g(x) := e^{-\pi x^2}$ é “auto-dual”, ou seja é igual à sua transformada de Fourier:

$$\widehat{g}(\xi) = g(\xi)$$

Demonstração. A função $f(z) = e^{-\pi z^2}$ é inteira (holomorfa em $\mathbb{C}$). Portanto, o seu integral $\oint_{\gamma} e^{-\pi z^2} dz$ ao longo do retângulo γ de vértices $\pm R$ e $\pm R + i\xi$ (com ξ real) é nulo. Este integral é

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx + i \int_0^{\xi} e^{-\pi(R+iy)^2} dy - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx - i \int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+iy)^2} dy$$

No limite quando $R \rightarrow \infty$, os dois integrais que formam a parte imaginária tendem para 0, pois o valor absoluto do integrando é limitado por $e^{-\pi(R^2-\xi^2)}$. O resultado é que

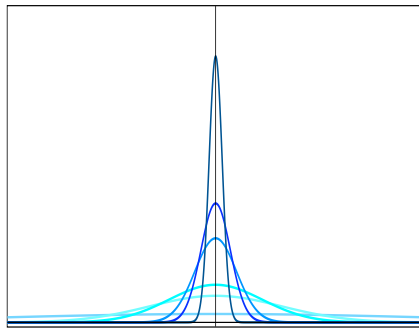
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}$$

□

A família de gaussianas

$$G_{\tau}(x) := \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi x^2/\tau} \quad (10.9)$$

parametrizadas por $\tau > 0$, é chamada *núcleo do calor*.



Gaussianas G_{τ} com $\tau = 1, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$.

Um cálculo (usando o teorema 10.4 e a propriedade (10.5)) mostra que

$$\widehat{G_{\tau}}(\xi) = e^{-\pi \tau \xi^2}$$

Acontece que a família das G_{τ} 's forma uma “identidade aproximada” quando $\tau \rightarrow 0$ (ou seja, por exemplo, com $\tau = 1/n$ e $n \rightarrow \infty$). Sendo funções positivas com integral impróprio unitário, falta apenas verificar a última propriedade. Mas a mudança de variável $x/\sqrt{\tau} = y$ mostra que

$$\int_{|x|>\delta} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi x^2/\tau} dx = \int_{|y|>\delta/\sqrt{\tau}} e^{-\pi y^2} dy \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow 0$, porque o integral impróprio da gaussiana é convergente. De consequência, pelo teorema 10.3,

Teorema 10.5. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então*

$$(f * G_\tau)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) G_\tau(y) dy \rightarrow f(x)$$

uniformemente em x quando $\tau \rightarrow 0$.

ex: Mostre que a Gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ é solução da equação diferencial

$$g' + (2\pi x)g = 0.$$

Observe que a sua transformada de Fourier $\widehat{g}(\xi) := (\mathcal{F}g)(\xi)$ também satisfaz a equação diferencial

$$\widehat{g}' + (2\pi\xi)\widehat{g} = 0.$$

Deduz que a gaussiana $g(x)$ é um ponto fixo da transformada de Fourier.

ex: Calcule a transformada de Fourier da gaussiana genérica $Ce^{-\gamma x^2}$ e de $Ce^{\gamma(x-a)^2}$ (use a transformada da gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ e as propriedades elementares da transformada de Fourier).

ex: Verifique que $G_\tau * G_{\tau'} = G_{\tau+\tau'}$.

Teorema de inversão. O teorema de Fubini (ou seja, a mudança da ordem de integração, que é sempre possível para integrais de funções de Schwartz) implica a “fórmula de multiplicação” seguinte.

Teorema 10.6 (fórmula de multiplicação). *Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy \quad (10.10)$$

Uma consequência é a *fórmula de inversão de Fourier*.

Teorema 10.7 (fórmula de inversão). *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ é a sua transformada de Fourier, então*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (10.11)$$

Demonstração. O núcleo do calor $G_\tau(x)$, definido em (10.9), é a transformada de Fourier da gaussiana $e^{-\pi\tau\xi^2}$. Pela fórmula de multiplicação 10.10,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G_\tau(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\tau\xi^2} d\xi$$

Quando $\tau \rightarrow 0$, o primeiro integral tende para $f(0)$ pelo teorema 10.5, e o segundo integral tende para $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) d\xi$. Isto prova a fórmula (10.11) no ponto $x = 0$. Para provar a fórmula de inversão para x arbitrário, basta considerar a função $g(y) = f(x+y)$ e observar que

$$f(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

pelas (10.3). □

Portanto, a transformada de Fourier é uma bijeção linear $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ do espaço de Schwartz, cuja inversa é a *transformada de Fourier inversa* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^*) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definida pelo integral impróprio

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

Na notação (10.2), e fórmula de inversão é escrita

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Teorema de Plancherel. O produto interno e a norma L^2 no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ são definidos por

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}$$

respetivamente.

Teorema 10.8 (Plancherel). *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, ou seja,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Demonstração. Se $g(x) := \overline{\hat{f}(-x)}$, então $\hat{g} = \widehat{\widehat{f}}$, pela (10.6). Seja $h = f * g$. Então $h(0) = \|f\|_2^2$, e, pela (10.8), $\hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$. Então, pelo teorema de inversão 10.11,

$$\|f\|_2^2 = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2.$$

□

ex: Calcule a norma L^2 da gaussiana $e^{-x^2/2}$.

ex: [Io05] 5.5

Princípio de indeterminação de Heisenberg. Acontece que uma função e a sua transformada de Fourier não podem ser, contemporaneamente, muito concentradas.

Se fixamos a energia $\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$, e portanto também $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = 1$ pelo teorema de Plancherel, podemos interpretar $|\psi(x)|^2$ e $|\hat{\psi}(\xi)|^2$ como sendo umas densidades de probabilidades. Este é o caso da função de onda $|\psi\rangle = \psi(x)$ de uma partícula quântica na representação de Schrödinger, onde $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$ é a probabilidade de observar a posição da partícula no intervalo $[a, b]$. O espaço dos estados é o espaço $L^2(\mathbb{R})$, munido do produto Hermitiano

$$\langle \phi | \psi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x)} \psi(x) dx$$

Os observáveis “posição” e “momento linear” são representados pelos operadores formalmente auto-adjuntos X e $P = -iD$, respetivamente (em unidades de Planck). O princípio de indeterminação é uma consequência do fato que X e P não comutam, e portanto não podem ser “diagonalizados” (para usar uma linguagem que apenas faz sentido em dimensão finita, ou seja, para matrizes) na mesma base. De fato, $[P, D] = I$.

Uma medida natural da “concentração” é a “variância”

$$\text{Var}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx$$

onde o “valor médio” é definido por

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx.$$

(em mecânica quântica, o valor médio do observável posição, ou seja, $\langle \psi | X | \psi \rangle$). Analogamente definimos a variância $\text{Var}(\xi)$ da transformada de Fourier e o valor médio $\bar{\xi}$ da variável conjugada ξ (em mecânica quântica, o valor médio do observável momento linear, ou seja, $\langle \psi | P | \psi \rangle$).

Teorema 10.9 (princípio de indeterminação de Heisenberg). *Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tem norma $\|\psi\|_2 = 1$, e $\widehat{\psi}(\xi)$ é a sua transformada de Fourier, então*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 1/4 \quad (10.12)$$

Demonstração. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos os operadores de destruição e criação deformados $Z_\lambda := \lambda X + D$ e $Z_\lambda^* = \lambda X - D$, respetivamente. Fixado $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, o polinómio quadrático

$$Q(\lambda) := \langle Z_\lambda^* Z_\lambda \psi, \psi \rangle = \lambda^2 \langle X\psi, X\psi \rangle - \lambda \langle \psi, \psi \rangle + \langle D\psi, D\psi \rangle$$

é não-negativo, pois é igual a $\langle Z_\lambda \psi, Z_\lambda \psi \rangle = \|Z_\lambda \psi\|_2^2 \geq 0$. Se $\|\psi\| = 1$, isto implica que

$$\langle X\psi, X\psi \rangle \cdot \langle D\psi, D\psi \rangle \geq 1/4.$$

O primeiro fator é $\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx$. Pelas (10.7) e pelo teorema de Plancherel, o segundo fator é $\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$. Portanto,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 1/4.$$

A desigualdade (10.12) é obtida substituindo $\psi(x)$ por $e^{-2\pi i x \bar{\xi}} \psi(x - \bar{x})$. □

10.3 Aplicações da transformada de Fourier às EDPs

6 dez 2018

Difusão na reta e núcleo do calor. Consideramos o problema de Dirichlet que consiste em resolver a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (10.13)$$

na reta real (ou seja, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$) com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Se $u(x, t)$ é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável x)

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t)$$

com condição inicial

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-2\pi i \xi x} dx = \widehat{f}(\xi)$$

A solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \widehat{f}(\xi)$$

A função $e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$ é a transformada de Fourier do *núcleo do calor* (*heat kernel*)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t},$$

definido por $t > 0$, e portanto $\widehat{u}(x, t) = \widehat{H}_t(\xi) \widehat{f}(\xi)$. De consequência, um candidato para a solução é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (H_t * f)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy \end{aligned}$$

da condição inicial com o núcleo do calor.

Teorema 10.10. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $u(x, t) = (H_t * f)(x)$ é uma solução de classe $\mathcal{C}^\infty$ da equação de calor (10.13) na região $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, que converge uniformemente e na norma L^2 para $f(x)$, i.e.*

$$u(\cdot, t) \rightarrow f \quad \text{e} \quad \|u(\cdot, t) - f\|_2 \rightarrow 0,$$

quando $t \searrow 0$.

Demonstração. A função $u(x, t)$ está no espaço de Schwartz para todo tempo $t > 0$, pois é um produto de convolução de duas funções do espaço de Schwartz, e resolve a equação de calor se $t > 0$, porque o próprio $H_t(x)$ é uma solução da equação de calor.

O núcleo do calor $H_t(x)$ é uma identidade aproximada para $t \rightarrow 0$, logo, pelo teorema 10.5, $(H_t * f)(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente em x quando $t \searrow 0$.

Pela fórmula de Plancherel 10.8, o quadrado da norma L^2 da diferença entre $u(x, t)$ e $f(x)$ é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi, t) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Este último integral tende para 0 quando $t \searrow 0$. De facto, seja $\varepsilon > 0$. Sendo $|e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2$ limitado e $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, é possível arranjar $R > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| \geq R} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, sendo $|\widehat{f}(\xi)|^2$ limitado e sabendo que $|e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1| \rightarrow 0$ quando $t \searrow 0$ uniformemente para $-R \leq \xi \leq R$, é possível arranjar um tempo T tempos suficientemente pequeno tal que $|\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 \leq \varepsilon/2R$ se $t < T$, assim que também o integral

$$\int_{|\xi| \leq R} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi \leq \varepsilon.$$

Isto prova a convergência na norma L^2 □

ex: Calcule a solução $u(x, t) = (H_t * f)(x)$ quando a condição inicial é a função pulso $\text{rect}(x)$ ou a gaussiana $H_1(x)$.

ex: Mostre que se $u(x, t)$ é uma solução da equação de calor (10.13) que está no espaço de Schwartz para todos os tempos $t > 0$, então a “energia”

$$\mathcal{E}(t) := \|u(\cdot, t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx$$

é não-crescente, i.e. satisfaz $d\mathcal{E}/dt \leq 0$.

ex: Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal das equações de calor com convecção ou com dissipação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pm \alpha u$$

(dependendo do sinal do segundo membro) com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ no espaço de Schwartz.

10 dez 2018

Equação de ondas na reta e fórmula de D'Alembert. A transformada de Fourier também pode ser utilizada para determinar a solução formal da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (10.14)$$

na reta real com condições iniciais

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (10.15)$$

por exemplo no espaço de Schwartz. Se $u(x, t)$ é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável x)

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial do oscilador harmónico invertido

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) = (2\pi \xi c)^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

A solução é uma combinação linear

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi c t} + \widehat{g}(\xi) e^{-2\pi i \xi c t}$$

onde $\widehat{f}(\xi)$ e $\widehat{g}(\xi)$ são constantes arbitrárias, parametrizadas pelo vetor de onda ξ . Se estas funções estão no espaço de Schwarz, então são transformadas de Fourier de certas funções $f(x)$ e $g(x)$, também no espaço de Schwartz. Mas a transformada de Fourier inversa de uma modulação é uma translação. O resultado é que a solução é uma sobreposição

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

de duas ondas viajantes, com velocidades $\pm c$. A posteriori é possível observar que esta forma da solução, chamada “solução de D'Alembert”, resolve a equação de ondas (10.14) desde que f e g sejam funções duas vezes diferenciáveis. As condições iniciais (10.15) determinam os perfis das ondas viajantes como soluções do sistema

$$\begin{cases} f(x) + g(x) &= \varphi(x) \\ cf'(x) - cg'(x) &= \psi(x). \end{cases}$$

Integrando a segunda equação e resolvendo o sistema linear, o resultado é a *fórmula de D'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy$$

que representa a solução $u(x, t)$ como soma da média aritmética do deslocamento inicial nos pontos $x \pm ct$ e do integral da velocidade inicial no intervalo $[x - ct, x + ct]$.

ex: Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da *equação do telegrafo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \beta u - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

onde $c^2 = 1/LC$, $\alpha = G/C$ e $\beta = R/L$.

Fórmula integral de Poisson no semi-plano. Consideramos o problema de determinar uma extensão harmónica e limitada $u(x, y)$ no semi-plano superior $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de uma função $f(x)$ definida na fronteira $\partial\mathbb{H} \approx \mathbb{R}$. Se $u(x, y)$ é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável x),

$$\widehat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$-4\pi^2 \xi^2 \widehat{u} + \widehat{u}_{yy} = 0$$

(consequência de $\Delta u = 0$) com condição inicial

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \widehat{f}(\xi).$$

A solução limitada em $y > 0$ é

$$\widehat{u}(\xi, y) = e^{-2\pi|\xi|y} \widehat{f}(\xi).$$

A função $e^{-2\pi|\xi|y}$ é a transformada de Fourier do *núcleo de Poisson* em $\mathbb{H}$, definido por

$$P_y(x) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Então $\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{P_y}(\xi) \widehat{f}(\xi)$. Portanto, um candidato para a extensão harmónica e limitada de $f(x)$ no semi-plano superior $\mathbb{H}$ é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (P_y * f)(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-z)^2 + y^2} f(z) dz \end{aligned}$$

de f com o núcleo de Poisson. O núcleo de Poisson não está no espaço de Schwartz, mas decresce (apenas) como $\leq C/(1+|x|^2)$ quando $|x| \rightarrow \infty$. É possível mostrar que é uma identidade aproximada quando $y \rightarrow 0$.

Teorema 10.11. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $u(x, y) = (P_y * f)(x)$ é uma função harmónica e limitada no semi-plano superior $\mathbb{H}$, que converge uniformemente e na norma L^2 para $f(x)$, i.e.*

$$u(\cdot, y) \rightarrow f \quad \text{e} \quad \|u(\cdot, y) - f\|_2 \rightarrow 0,$$

quando $y \searrow 0$.

ex: Verifique que o núcleo de Poisson $P_y(x)$ em $\mathbb{H}$ é uma identidade aproximada quando $y \searrow 0$.

ex: Prove o teorema 10.11.

ex: Verifique que $u(x, y) = y$ e $v(x, y) = 0$ são funções harmónicas em $\mathbb{H}$ que assume os mesmos valores (triviais) na fronteira $\partial\mathbb{H} \approx \mathbb{R}$. Isto mostra que o problema de Dirichlet na região ilimitada $\mathbb{H}$, sem mais condições, não admite soluções únicas.

ex: [Io05] 5.5

Oscilador harmónico quântico e funções de Hermite. A equação de Schrödinger para a função de onda $\psi(x, t)$ de uma partícula de massa $m = 1$ num potencial $V(x) = x^2/2$ (oscilador harmónico), em unidades tais que a constante de Planck reduzida é $\hbar = 1$, é

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 \psi.$$

As soluções separáveis são $\psi_n(x, t) = e^{-iE_n t} f_n(x)$, onde as $f_n(x)$ são funções próprias do operador de Hermite $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definido por

$$2H := -D^2 - X^2,$$

com valores próprios E_n (umas energias), i.e. $H f_n = E_n f_n$. Os operadores de destruição (*annihilation*) e de criação (*creation*) são os operadores

$$Z := X + D \quad \text{e} \quad Z^* := X - D,$$

respetivamente, definidos, por exemplo, no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. É imediato verificar que $[D, X] = I$ (o operador identidade), e que $2H = Z^*Z + I$. O operador de criação é o “adjunto” do operador de destruição, no sentido em que se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então

$$\langle Zf, g \rangle_2 = \langle f, Z^*g \rangle_2$$

Isto implica que $\langle Z^*Zf, f \rangle_2 = \|Zf\|_2^2 \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ou seja, que $2H \geq I$. O produto $N := Z^*Z$ é chamado operador *número*, e satisfaz a relação de comutação $[N, Z^*] = 2Z^*$. Se f é um vetor próprio de N com valor próprio λ , então Z^*f é um vetor próprio de N com valor próprio $\lambda + 2$. De fato, se $Nf = \lambda f$,

$$N(Z^*f) = (Z^*N + [N, Z^*])f = (Z^*N + Z^*)f = Z^*(N + 2I)f = (\lambda + 2)Z^*f$$

A gaussiana $g(x) = e^{-x^2/2}$ está no núcleo do operador de destruição, ou seja, satisfaz a equação diferencial $Zg = 0$, e portanto $\phi_0 := g/\|g\|_2$ é um vetor próprio unitário do operador N com valor próprio $N\phi_0 = 0$. Então as funções de Hermite, definidas por

$$\phi_n := \frac{1}{\|(Z^*)^n \phi_0\|_2} (Z^*)^n \phi_0$$

se $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, formam uma família ortonormada de vetores próprios do operador número N com valores próprios $2n$ (os ϕ_n com n 's diferentes são ortogonais porque $N^* = N$), e de consequência do operador de Hermite H com valores próprios $E_n = (n + 1/2)$, i.e.

$$H \phi_n = (n + 1/2) \phi_n.$$

ex: Mostre que valor médio minimiza o desvio quadrático $a \mapsto \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |\psi(x)|^2 dx$.

ex: Verifique que o mínimo em (10.12) é atingido quando $\psi(x)$ é uma gaussiana.

Função caraterística e teorema limite central. A função caraterística de uma variável aleatória real X , com lei $\mathbf{P}$, é a média/esperança da variável $e^{i\xi X}$, com $\xi \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\phi_X(\xi) = \mathbf{E} e^{i\xi X} = \int e^{i\xi x} \mathbf{P}(dx).$$

Em particular, se X é absolutamente contínua com lei $\mathbf{P}(X \in A) = \int_A p(x) dx$, então a função caraterística $\phi_X(\xi)$ é a transformada de Fourier da densidade de X , pois

$$\phi_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} p(x) dx = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{p}(\xi).$$

O teorema de Lévy afirma que uma sequência de variáveis aleatórias (X_n) converge “em lei”¹¹ para a variável X quando $n \rightarrow \infty$, i.e. $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$, sse $\phi_{X_n}(\xi) \rightarrow \phi_X(\xi)$ para cada $\xi \in \mathbf{R}$.

¹¹ Convergência em lei: $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$ se, para cada função $f(x)$ contínua e limitada, $\mathbf{E} f(X_n) \rightarrow \mathbf{E} f(X)$, ou seja, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

para cada ponto de continuidade x da função de repartição de X .

ex: Verifique que as derivadas da função característica na origem são

$$\phi_X(0) = 1 \quad \phi'_X(0) = i\mathbf{E}X \quad \phi''_X(0) = -\mathbf{E}X^2 \quad \dots$$

(desde que os momentos da variável X sejam finitos).

ex: Mostre que, se a variável aleatória X tem média $\mathbf{E}X = m$ e variância $\mathbf{V}X = \mathbf{E}(X-m)^2 = \sigma^2$, e se $Y = \frac{X-m}{\sigma}$, então

$$\phi_Y(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + o(\xi^2)$$

numa vizinhança da origem.

ex: Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média m e variância σ^2 , seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, e seja

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - m}{\sigma}$$

Verifique que

$$\phi_{S_n^*}(\xi) = (\phi_Y(\xi/\sqrt{n}))^n$$

onde $Y = \frac{X-m}{\sigma}$, e portanto

$$\phi_{S_n^*}(\xi) \rightarrow e^{-\xi^2/2} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

ex: Deduza o *teorema limite central*, que afirma que a sequência de variáveis (S_n^*) converge em lei para uma variável normal $N(0, 1)$, ou seja,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Transformadas de Fourier

	(espaço do tempo t)	(espaço da frequência angular $\omega = 2\pi\xi$)
	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$
(linearidade ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$))	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(\omega) + \mu G(\omega)$
(conjugação)	$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-\omega)}$
(homotetia ($\lambda \neq 0$))	$f(t/\lambda)$	$\lambda F(\lambda\omega)$
(translação/modulação)	$f(t-a)$	$e^{-ia\omega} F(\omega)$
(modulação/translação)	$e^{ibt} f(t)$	$F(\omega-b)$
(derivação/multiplicação)	$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$
(multiplicação/derivação)	$-it f(t)$	$F'(\omega)$
(convolução/produto)	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(\omega) G(\omega)$
(produto/convolução)	$f(t) g(t)$	$\frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\nu) G(\nu) \frac{d\nu}{2\pi}$
(energia)	$E = \ f\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt$	$E = \ F\ ^2/2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 \frac{d\omega}{2\pi}$
(pulso/sinc)	$\chi_a(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t < a \\ 0 & \text{se } t \geq a \end{cases}$	$\frac{\sin(a\omega)}{\omega/2}$
(sinc/pulso)	$\frac{\sin(bt)}{\pi t}$	$\chi_b(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{se } \omega < b \\ 0 & \text{se } \omega \geq b \end{cases}$
(gaussiana)	$e^{-at^2/2}$	$\sqrt{2\pi/a} e^{-\omega^2/2a}$
(exponencial em t , $a > 0$)	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
(exponencial em ω , $b > 0$)	$\frac{b/\pi}{t^2 + b^2}$	$e^{-b \omega }$

11 Funções harmônicas

11.1 Funções harmônicas

10 dez 2018

Equações de Poisson e Laplace. A equação de Poisson para o campo escalar $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do espaço euclidiano, é

$$\Delta u = \rho, \quad (11.1)$$

onde ρ é uma função dada e o *Laplaciano* é o operador diferencial

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, real ou complexa, é dita *harmônica* se satisfaz a equação de Laplace (a equação de Poisson homogênea)

$$\Delta u = 0 \quad (11.2)$$

nos pontos de Ω . Uma função harmônica real u define um campo vetorial $\mathbf{v} = \nabla u$, e portanto gera um fluxo, solução da EDO autônoma $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. Este fluxo preserva os volumes, pois $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla u = 0$, e tem rotacional nulo, pois $\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \nabla u = 0$.

O problema de Dirichlet consiste em determinar uma solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ de (11.1) ou (11.2) em Ω com condição de fronteira $u|_{\partial\Omega} = f$.

ex: Na reta real, as soluções da equação de Laplace $u'' = 0$ são os polinômio de primeiro grau $u(x) = \alpha + \beta x$. Em particular, satisfazem o “fórmula do valor médio”: para todo x e todo $r \geq 0$ suficientemente pequeno (i.e. tal que os pontos $x \pm r$ estejam no domínio de u)

$$u(x) = \frac{1}{2} (u(x-r) + u(x+r)) \quad (11.3)$$

Mostre que uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a fórmula do valor médio (11.3) é uma função harmônica (e, de consequência, uma função $\mathcal{C}^\infty$).

ex: Verifique que $u(\mathbf{r}) = \log \|\mathbf{r}\|$ é uma função harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

ex: Verifique que $u(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$ é uma função harmônica em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Funções harmônicas no plano. Uma função $u(x, y)$, real ou complexa, definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do plano euclidiano, é dita *harmônica* se é de classe $\mathcal{C}^2$ e satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

nos pontos de Ω , onde o *Laplaciano* é o operador diferencial $\Delta := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Na identificação $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ definida por $(x, y) \approx x + iy$, o Laplaciano Δ é o operador $4\partial\bar{\partial}$. Portanto, pelas condições de Cauchy-Riemann (2.3) se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função holomorfa num domínio $\Omega \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, então u e v são funções harmônicas reais, ditas funções “harmônicas conjugadas”. As curvas de nível de u e v formam duas famílias de curvas ortogonais, pois as condições de Cauchy-Riemann (2.3) implicam que $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ (se $u = c$ são as curvas “equipotenciais”, então $v = c$ são as “linhas de força”).

Vice-versa, seja $u(x, y)$ uma função harmônica real num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Um cálculo mostra que

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

é uma função holomorfa (se u é a parte real de $f = u + iv$, que ainda não sabemos existir!, então $g = f'$). A forma diferencial $g(z) dz = g(z) (dx + i dy)$ pode então ser representada como soma

$$\begin{aligned} g(z) dz &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \\ &= du + i^* du, \end{aligned}$$

do diferencial du e i vezes a forma $^* du$, onde o operador “estrela” de Hodge é definido por $^* dx = dy$ e $^* dy = -dx$. A forma $^* du = -(\partial u / \partial y) dx + (\partial u / \partial x) dy$ é fechada. Se u é definida numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ simplesmente conexa (por exemplo, um disco), então

$$\oint_{\gamma} ^* du = 0$$

para todo contorno $\gamma \subset \Omega$, sendo igual ao integral de $g(z) dz$, com g holomorfa, menos o integral do diferencial exato du . Fisicamente, este integral é o integral $\oint_{\gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n}$ da derivada normal $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ de u , onde o vetor normal à curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é $\mathbf{n} = (\dot{y}, -\dot{x})$. Então é possível definir uma função harmônica v , conjugada de u e definida a menos de uma constante aditiva, por meio do integral de linha

$$v(x, y) = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

onde γ é um contorno arbitrário entre um ponto fixado $p \in \Omega$ e o ponto variável $z = x + iy$. A função $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ é holomorfa em Ω , e a sua derivada é $f' = g$.

Teorema 11.1. *Uma função harmônica u é localmente (em cada região simplesmente conexa) a parte real de uma função holomorfa $f = u + iv$, definida a menos de uma constante aditiva imaginária ic.*

Uma primeira consequência surpreendente é que uma função harmônica é infinitamente diferenciável (e isto acontece também em dimensão superior). Outra consequência útil é que

Teorema 11.2. *Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica e $g : \Omega' \rightarrow \Omega$ é uma função holomorfa, então a composição $u \circ g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica.*

Demonstração. u é localmente a parte real de uma função holomorfa $f = u + iv$. A composição $u \circ g$ é localmente a parte real de $f \circ g$, que é uma função holomorfa. $\square$

ex: Verifique que $\Delta = 4 \bar{\partial} \partial = 4 \partial \bar{\partial}$.

ex: Verifique que, se $f = u + iv$ é holomorfa, então ∇u e ∇v são ortogonais.

ex: Verifique que z^n e $\bar{z}^n$ são funções harmônicas (complexas).

ex: Esboce as curvas de nível das funções harmônicas conjugadas definidas pelas partes real e imaginária das seguintes funções holomorfas

$$f(z) = z^2 \quad f(z) = z^3 \quad f(z) = 1/z \quad f(z) = z + 1/z$$

ex: Determine, em domínios apropriados, umas funções harmônicas conjugadas de

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad u(x, y) = x - xy \quad u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

11.2 Princípio do valor médio

13 dez 2018

Princípio do valor médio. O valor de uma função harmônica num ponto do seu domínio é igual à média aritmética dos seus valores numa circunferência suficientemente pequena à volta deste ponto.

Teorema 11.3 (princípio do valor médio). *Se u é harmônica numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contém o disco fechado $\overline{D_r(p)}$, então*

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta}) d\theta. \quad (11.4)$$

Demonstração. Pelo teorema 11.1, u é a parte real de uma função holomorfa $f = u + iv$ num disco $D_\rho(p)$ com $r < \rho$. Então pela fórmula de Cauchy

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=r} \frac{f(z)}{z-p} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{i\theta}) d\theta.$$

A parte real é a fórmula (11.4). □

Em dimensão arbitrária, a fórmula do valor médio é consequência do teorema da divergência.

Teorema 11.4. *Se u é harmônica numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que contém o disco fechado $\overline{B_r(x)}$, então*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u dx.$$

Demonstração. Pelo teorema da divergência

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} \Delta u dx &= \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial r}(x + ry) dS(y) \\ &= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{\partial B_1(0)} u(x + ry) dS(y) \right) \\ &= r^{n-1} |\partial B_1(0)| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS \right) \end{aligned}$$

Ao dividir pelo volume da bola $B_r(x)$ (se este volume é $\gamma_n r^n$, então a “superfície” da esfera $\partial B_r(x)$ é a derivada $n\gamma_n r^{n-1}$) temos portanto

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u dx = \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS \right)$$

Se u é harmônica o valor médio de u nas esferas $B_r(x)$ é portanto independente do raio r . Por continuidade, este valor médio é o próprio $u(x)$. A segunda igualdade é equivalente à primeira. □

Uma consequência é o

Teorema 11.5 (princípio do máximo). *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é harmônica numa região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Demonstração. Se $\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$, então existe um ponto $x \in \Omega$ onde $u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u$ e tal que u não é constante numa vizinhança de u . Isto contradiz o princípio do valor médio. □

Outra consequência é que as únicas funções harmônicas e limitadas no plano complexo são as constantes (versão do teorema de Liouville para funções harmônicas).

Unicidade da solução do problema de Dirichlet. Uma consequência do princípio do máximo é que uma função harmônica num domínio fechado e limitado Ω é determinada apenas pelos seus valores na fronteira $\partial\Omega$. De fato, a diferença $u = u_1 - u_2$ entre duas funções harmônicas, u_1 e u_2 , que coincidem em $\partial\Omega$ é uma função harmônica igual a zero em $\partial\Omega$, logo identicamente nula pelo princípio do máximo.

Teorema 11.6 (unicidade). *O problema de Dirichlet numa região limitada tem, no máximo, uma solução.*

ex: Uma função $f(t)$ de uma variável real t é harmônica, ou seja, é solução de $f'' = 0$, sse é afim, ou seja, é da forma $f(t) = a + bt$. Enuncie e prove o princípio do valor médio neste contexto.

ex: Look at Nelson's wonderful proof ¹² of Liouville theorem.

ex: [St08] 6.1.

Dirichlet principle. The *Dirichlet energy* of a differentiable real valued function $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ defined in a domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ (which we may assume connected) is

$$\mathcal{E}[u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy$$

You may think that the graph of u describes a surface in $\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. The energy is zero iff u is constant, hence if the surface is flat. More interesting is trying to minimize the Dirichlet energy for fixed “boundary value” $u|_{\partial\Omega} = g$, given some well behaved function $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Consider a one-parameter perturbation of u of the form $u + t\phi$ with $t \in \mathbb{R}$ and $\phi|_{\partial\Omega} = 0$. If u minimizes the Dirichlet energy, then the function of a real variable $t \mapsto \mathcal{E}[u + t\phi]$ must have a minimum at $t = 0$. The derivative of the Dirichlet energy w.r.t. t is

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\phi] = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + t \|\nabla \phi\|^2) dx dy$$

and therefore its value at $t = 0$ is

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\phi] \right|_{t=0} &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi) dx dy \\ &= - \int_{\Omega} (\Delta u) \phi dx dy \end{aligned}$$

where the last line follows integrating by parts and using the vanishing of ϕ on the boundary $\partial\Omega$. Thus, the derivative is zero for all variations ϕ iff $\Delta u = 0$, i.e. the function u is harmonic on Ω .

What is not obvious, and indeed not true (as Weierstrass discovered) for a generic region Ω , is that such a minimum of the Dirichlet energy exists.

11.3 Fórmula de Poisson

Laplaciano em coordenadas polares. A equação de Laplace em coordenadas polares (ρ, θ) , definidas por $\rho e^{i\theta} = x + iy$, é

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (11.5)$$

Em particular, as funções harmônicas que apenas dependem de ρ são

$$a \log(\rho) + b$$

¹²E. Nelson, A proof of Liouville's theorem, *Proceedings of the AMS* **12** (1961), 995.

Por exemplo, em unidades convenientes, o potencial elétrico gerado por uma carga unitária colocada na origem do plano é a função $V(z) = -\log|z|$, harmônica no plano perfurado $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Em uma região simplesmente conexa Ω que não contém a origem é possível definir um logaritmo $\log(z) = \log \rho + i\theta$, e em particular um argumento $\theta(z)$. Então

$$a\theta(z) + b$$

é uma função harmônica em Ω , que não depende de $|z|$ (ou seja, constante nas semi-retas que saem da origem). Por exemplo, o argumento principal $\theta(z)$ é uma função harmônica no semi-plano superior $\mathbb{H}$, com limites $\theta(x + i0^+) = 0$ se $x > 0$ e $\theta(x + i0^+) = \pi$ se $x < 0$.

ex: Verifique a expressão (11.5) para o Laplaciano em coordenadas polares.

ex: Verifique que $\rho^{|n|}e^{in\theta}$, com $n \in \mathbb{Z}$, é uma função harmônica no disco unitário $\mathbb{D}$.

ex: Determine uma função harmônica $u(z)$ no semi-plano superior $\mathbb{H}$ tal que $u(x + iy) \rightarrow 1$ quando $y \rightarrow 0$ e $x > 0$ e tal que $u(x + iy) \rightarrow -1$ quando $y \rightarrow 0$ e $x < 0$.

Funções harmônicas separáveis no disco unitário. Colocamos o problema de determinar uma função harmônica no disco unitário $\mathbb{D}$. Soluções separáveis $u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ da equação de Laplace (11.5) são produtos de duas funções que resolvem as equações diferenciais

$$\Theta'' = -\lambda\Theta \quad \text{e} \quad \rho^2 R'' + \rho R' = \lambda R$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. As soluções não triviais de $\Theta'' = \lambda\Theta$, que devem ser funções periódicas de período 2π , são

$$\Theta(\theta) = c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}$$

se $\lambda = n^2$. Em correspondência de cada $\lambda = n^2$, as soluções de

$$\rho^2 R'' + \rho R' = n^2 R$$

são $R(\rho) = 1$ ou $\log \rho$ se $n = 0$, e $R(\rho) = \rho^{\pm n}$ se $n \neq 0$. As soluções $\log \rho$ e ρ^{-n} , com $n \geq 1$, são ilimitadas numa vizinhança da origem. Portanto, as soluções separáveis e limitadas da (11.5) no disco unitário são

$$u_n(\rho, \theta) = \rho^{|n|} e^{in\theta}$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Pelo princípio de sobreposição, a série

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \rho^{|n|} e^{in\theta},$$

se convergente uniformemente com as suas duas primeiras derivadas, define uma função harmônica no disco unitário. Se a convergência é uniforme também na fronteira do disco, então $u(r, \theta)$ resolve o problema de Dirichlet com condição de fronteira

$$u|_{\partial\mathbb{D}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$$

Fórmula integral de Poisson no disco unitário. Seja $f(e^{i\theta})$ uma função contínua u definida na circunferência unitária $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D} \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, e seja $f(e^{i\theta}) \sim \sum_n c_n e^{in\theta}$ a sua série de Fourier. Uma extensão harmônica de $e^{in\theta}$ no disco unitário é $\rho^{|n|} e^{in\theta}$. Portanto, um candidato para a extensão harmônica de f no interior do disco unitário, i.e. nos pontos $\rho e^{i\theta}$ com $0 \leq \rho < 1$, é a série

$$(\mathcal{P}f)(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^{|n|} e^{in\theta},$$

se convergente. Usando a definição (8.4) dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}f)(\rho e^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi \right) \rho^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta-\phi)} \right) d\phi \end{aligned}$$

é possível representar $\mathcal{P}u$ como um produto de convolução (*fórmula integral de Poisson*)

$$\boxed{(\mathcal{P}f)(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) P_{\rho}(\theta - \phi) d\phi} \quad (11.6)$$

dos valores de u na circunferência unitária com o *núcleo de Poisson* no disco unitário, definido por

$$P_{\rho}(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in\theta}.$$

O núcleo de Poisson admite as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} P_{\rho}(\theta) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \\ &= 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

onde $z = \rho e^{i\theta}$, e portanto

$$\boxed{P_{\rho}(\theta) = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta)}}.$$

A série de Fourier da função contínua $f(e^{i\theta})$ pode não ser convergente na circunferência unitária, mas a série $\sum c_n \rho^{|n|} e^{in\theta}$ é absolutamente convergente se $\rho < 1$. A convergência é uniforme em cada disco $D_r(0)$ com $r < 1$, e portanto a (11.6) define uma função harmônica no disco unitário. Acontece que

Teorema 11.7. *A família dos núcleos de Poisson $(P_{\rho})_{\rho < 1}$ é uma identidade aproximada quando $\rho \rightarrow 1$.*

Demonstração. É imediato ver que $P_{\rho}(\theta) \geq 0$ e que o seu integral é $\int_{-\pi}^{\pi} P_{\rho}(\theta) d\theta = 2\pi$. Seja $0 < \delta < \pi$. O denominador do núcleo de Poisson é

$$1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2 = (1-\rho)^2 + 2\rho(1-\cos(\theta))$$

Se $1/2 < \rho \leq 1$ e $\delta < |\theta| \leq \pi$ então existe uma constante $c = c(\delta)$ tal que

$$(1-\rho)^2 + 2\rho(1-\cos(\theta)) \geq c.$$

De consequência, existe uma constante $C = C(\delta)$ tal que

$$\int_{\delta < |\theta| \leq \pi} P_{\rho}(\theta) d\theta \leq C(1-\rho^2)$$

e portanto este integral $\rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 1$. □

De consequência, pelo teorema 9.10,

Teorema 11.8. *Se $f(e^{i\theta})$ é uma função contínua em $\partial\mathbb{D}$, então $u = \mathcal{P}f$ é uma extensão harmônica de f no disco unitário $\mathbb{D}$, contínua em $\mathbb{D}$.*

Esta extensão é única pelo princípio do máximo, e resolve portanto o problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ em $\mathbb{D}$ com condição de fronteira $u|_{\partial\mathbb{D}} = f$.

ex: Verifique que

$$P_r(\theta) = \Re \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right)$$

ex: [St08] 6.3.

ex: Considere o problema de Dirichlet que consiste em determinar uma função harmônica u na região $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0\} \subset \mathbb{C}$ com condições de fronteira

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

onde $f(x)$ é uma função contínua que se anula nos pontos 0 e π , e cuja série de Fourier é $f(x) \sim \sum c_n \sin(nx)$. Determine as soluções separáveis $u(x, y) = Y(y) \sin(nx)$ da equação de Laplace $\Delta u = 0$ na região Ω tais que $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, e deduza uma fórmula análoga à fórmula de Poisson.

11.4 Potenciais complexos

3 jan 2019

Campos planares e potenciais complexos. ([LC72], Chapitre III, §2, e [Sm03]) Seja $\mathbf{V}(x, y)$ um campo vetorial estacionário (i.e. independente do tempo) definido numa região do plano. Sejam A e B as suas coordenadas, assim que $\mathbf{V} = (A, B)$, ou, na identificação $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, $\mathbf{V} = A + iB$. Exemplos típicos são: o campo de velocidades de um fluido estacionário, um campo de forças, como um campo elétrico ou um campo magnético, um campo térmico, ...

A *circulação* do campo $\mathbf{V}$ ao longo do contorno simples γ é o integral $C := \oint_{\gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$. Se γ é a fronteira da região Ω , então o teorema de Green diz que

$$C = \oint_{\gamma} A dx + B dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \quad (11.7)$$

ou seja, a circulação é o integral do *rotacional* $\nabla \times \mathbf{V} := \partial B / \partial x - \partial A / \partial y$ na região Ω . O campo é *irrotacional*, ou *potencial*, se $\nabla \times \mathbf{V} = 0$. Então a forma $A dx + B dy$ é localmente o diferencial de uma função $u(x, y)$, i.e.

$$du = A dx + B dy.$$

A função u é chamada *potencial* do campo, pois $\mathbf{V} = \nabla u$, e as suas curvas de nível *curvas equipotenciais*.

O *fluxo* de $\mathbf{V}$ através da curva γ é o integral $F := \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal à curva. Se γ é um contorno simples, fronteira da região Ω , então o teorema da divergência de Gauss diz que

$$F = \oint_{\gamma} -B dx + A dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy \quad (11.8)$$

ou seja, o fluxo é o integral da *divergência* $\nabla \cdot \mathbf{V} := \partial A / \partial x + \partial B / \partial y$ na região Ω . O campo é dito *solenoidal* (ou *incompressível*, se representa o campo de velocidade de um fluido) se $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Então a forma $-B dx + A dy$ é localmente o diferencial de uma função $v(x, y)$, i.e.

$$dv = -B dx + A dy.$$

A função v é chamada *função de corrente*, e as suas curvas de nível são chamadas *linhas de corrente* (*streamlines*).

Se o campo vetorial $\mathbf{V}$ é irrotacional e solenoidal (como, por exemplo o campo de velocidades de um “fluido ideal”), então u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, como é possível ver comparando as expressões dos diferenciais du e dv . Portanto,

Teorema 11.9. Num campo planar irrotacional e solenoidal, o potencial $u(x, y)$ e a função corrente $v(x, y)$ são funções harmônicas conjugadas.

Então um campo irrotacional e solenoidal pode ser descrito, localmente (ou seja, numa região simplesmente conexa), por meio de uma função holomorfa

$$f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$$

chamada *potencial complexo*. Em particular, as linhas de corrente $v = c$ e as linhas equipotenciais $u = c$ são ortogonais. A derivada do potencial complexo é $f' = A - iB$. De consequência, o campo é

$$\mathbf{V} = (A, B) \approx A + iB = \overline{f'}.$$

Em geral, uma função holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ define um campo irrotacional e solenoidal $\mathbf{V} = \overline{f'}$ na região $\Omega \subset \mathbb{C}$. O fluxo F e a circulação C , através e ao longo de um contorno γ , são parte real e parte imaginária de um único integral de contorno:

$$F + iC = \oint_{\gamma} f'(z) dz.$$

Estes números não são nulos se a região Ω onde está definido o campo não for simplesmente conexa, por exemplo se o potencial complexo tiver pólos no interior da curva γ .

ex: Para cada potencial complexo $f(z)$, definido em um domínio conveniente, calcule o campo $\mathbf{V}$, e esboce algumas linhas de corrente $v(x, y) = c$ e alguma curvas equipotenciais $u(x, y) = c$.

$$f(z) = z \quad f(z) = (1 + i)z \quad f(z) = z^2 \quad f(z) = z + 1/z$$

ex: Repita o exercício anterior (pode ser útil usar coordenadas polares, ou usar uma calculadora gráfica), e calcule também a circulação e o fluxo ao longo de contornos à volta das singularidades do campo, com os seguintes potenciais complexos.

$$f(z) = \log(z) \quad f(z) = i \log(z) \quad f(z) = (a + ib) \log(z) \quad f(z) = \log(z + 1) \pm \log(z - 1)$$

12 Transformações conformes

12.1 Transformações conformes

3 jan 2019

Comportamento local das funções holomorfas. Os pontos críticos de uma função holomorfa f são os pontos c onde $f'(c) = 0$. Os outros pontos do domínio, onde $f'(p) \neq 0$, são chamados *regulares*. Numa vizinhança de um ponto regular, uma função holomorfa é bem aproximada pela sua parte linear

$$f(z) \simeq c + \lambda(z - p)$$

com $c = f(p)$ e $\lambda \neq 0$, que é um automorfismo afim do plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. Em geral, uma função holomorfa e não constante admite a representação local (6.6)

$$f(z) = c + (z - p)^k g(z)$$

com $g(z)$ holomorfa e diferente de zero numa vizinhança de p , onde $k \geq 1$ é a ordem da função $f(z) - c$ em p .

Teorema 12.1 (teorema da aplicação aberta). *Uma função holomorfa e não constante numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberta (ou seja, envia abertos em abertos).*

Demonstração. Podemos assumir, a menos de translações no domínio e no contradomínio, que o ponto regular é $0 \in \Omega$, e que $f(0) = 0$. Então $f(z) = z^k g(z)$, com $g(z)$ holomorfa e $\neq 0$ numa vizinhança de 0 . Portanto, os valores de $f(z)$ são diferentes de 0 para todo ponto z não nulo mas suficientemente próximo de 0 . Em particular, existem um disco $D = D_\rho(0)$ de raio $\rho > 0$ suficientemente pequeno e um $\varepsilon > 0$ tais que $|f(z)| > 0$ se $z \in D \setminus \{0\}$ e $|f(z)| > \varepsilon$ se $z \in \partial D$. Se $|w| < \varepsilon$, a função $g(z) = f(z) - w$ satisfaz

$$f(z) > \varepsilon > |w| = |f(z) - g(z)|$$

nos pontos da circunferência ∂D . Pelo teorema de Rouché 6.8, a função $g(z)$ tem, no disco D , o mesmo número de zeros da função $f(z)$. Isto quer dizer que para todo w suficientemente pequeno existem k pontos $z \in D$ tais que $f(z) = w$. Em particular, a imagem $f(D)$ contém o disco $D_\varepsilon(0)$. $\square$

Teorema 12.2 (princípio do máximo). *Se o módulo $|f|$ de uma função holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ atinge um máximo num ponto p de uma região aberta Ω , então f é constante.*

Demonstração. Seja $p \in \Omega$, e f não é constante, pelo teorema da aplicação aberta 12.1 existem $\varepsilon > 0$ e um disco $D = D_\rho(p)$ tais que $D_\varepsilon(c) \subset f(D)$, onde $c = f(p)$. Em particular, existem pontos $z \in D$ onde $|f(z)| = |c| + \varepsilon/2 > |c|$, logo p não pode ser um máximo de f . $\square$

Em particular, o máximo módulo de uma função holomorfa definida numa região limitada Ω é atingido na fronteira $\partial\Omega$.

Uma consequência imediata da prova do teorema da aplicação aberta 12.1 (no caso em que $k = 1$) é

Teorema 12.3 (teorema da função inversa). *Uma função holomorfa é localmente invertível numa vizinhança de um ponto regular.*

Ou seja, se p é um ponto regular da função holomorfa f , então existe uma vizinhança aberta (um disco suficientemente pequeno) $D = D_\rho(p)$ de p tal que $f|_D : D \rightarrow f(D)$ é uma função holomorfa e injetiva. A função inversa $g : f(D) \rightarrow D$ é também holomorfa, sendo representada pelo integral de contorno

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz$$

se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno. De fato, a função $h(z) = z f'(z)/(f(z) - w)$ tem um único pólo simples $z = g(w)$ no disco D , e o seu resíduo é

$$\text{Res}(h, g(w)) = \lim_{z \rightarrow g(w)} (z - g(w)) h(z) = \lim_{z \rightarrow g(w)} \frac{z - g(w)}{f(z) - f(g(w))} z f'(z) = g(w)$$

Este é um resultado local. Uma função holomorfa pode não ser (globalmente) invertível numa região sem pontos críticos. Por exemplo, $f(z) = z^2$ não é invertível no plano perfurado $\mathbb{C}^\times$, mas é invertível no semi-plano superior $\mathbb{H}$.

Por outro lado, uma função holomorfa $f(z)$ não pode ser injetiva numa vizinhança de um ponto crítico. A menos de translações (no domínio e no contradomínio), podemos assumir que o ponto crítico é $c = 0$, e que é um zero de ordem $\text{ord}(f, 0) = k \geq 2$ da função f . Então

$$f(z) = a_k z^k (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$$

com $a_k \neq 0$ numa vizinhança da origem, e portanto (usando a fórmula do binômio)

$$f(z) = (bz(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots))^k$$

com $b^k = a_k$, e, em particular, $b \neq 0$. Pelo teorema da função inversa, existe uma função holomorfa $w = g(z)$, invertível numa vizinhança da origem, tal que $f(z) = w^k$. De consequência, a equação $f(z) = \varepsilon$ admite k soluções distintas se $\varepsilon \neq 0$ é suficientemente pequeno.

ex: Dê um exemplo de uma função holomorfa numa região ilimitada $\Omega \subset \mathbb{C}$ que não atinge o máximo na fronteira $\partial\Omega$.

Equivalências conformes. Uma função holomorfa é também conforme (i.e. preserva os ângulos) fora dos pontos críticos. Uma função holomorfa e bijetiva $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, cuja inversa é necessariamente holomorfa pelo teorema da função inversa 12.3, é chamada *equivalência conforme* (ou *isomorfismo analítico*) entre a região Ω e a região $f(\Omega) = \Omega'$.

Um exemplo trivial é a função identidade $f : \Omega \rightarrow \Omega$, definida por $f(z) = z$.

Uma equivalência conforme pode ser pensada com uma mudança de variável conforme, da variável $z \in \Omega$ à variável $w = f(z) \in \Omega'$. Duas regiões equivalentes têm as mesmas funções holomorfas, e portanto as mesmas funções harmônicas, a menos de uma mudança de coordenadas.

Regiões importantes ou interessantes, por razões óbvias, são o próprio plano complexo $\mathbb{C}$, o disco unitário $\mathbb{D}$, o semi-plano superior $\mathbb{H}$, a esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$.

e.g. Potências. Por exemplo, $f(z) = z^2$ define uma equivalência conforme do primeiro quadrante $Q_1 := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$ sobre o semi-plano superior $\mathbb{H}$. As potências $f(z) = z^n$, com n inteiro positivo, definem equivalências conformes dos ângulos $A_{\pi/n} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \pi/n\}$ sobre $\mathbb{H}$, cujas inversas são as raízes $g(z) = z^{1/n}$, definidas usando o ramo principal do logaritmo.

Em geral, as potências fracionárias $f(z) = z^{1/\alpha}$, com $0 < \alpha < 2$ (definidas usando o ramo apropriado do logaritmo), definem equivalências conformes de $A_{\alpha\pi} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \alpha\pi\}$ sobre $\mathbb{H}$.

e.g. Exponencial. A função exponencial $f(z) = e^z$ envia o plano complexo $\mathbb{C}$ no plano perfurado $\mathbb{C}^\times$, a imagem inversa de cada ponto sendo formada por infinitos pontos que diferem por múltiplos inteiros de $2\pi i$. Em particular, define uma equivalência conforme da região $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi\}$ sobre o semi-plano superior $\mathbb{H}$, e da região $B_- = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi \text{ e } \Re(z) < 0\}$ sobre o semi-disco superior $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$. Vice-versa, o ramo principal do logaritmo, $g(z) = \log(z)$, envia $\mathbb{H}$ sobre B e $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ sobre B_- .

ex: Determine regiões simples (ou seja, discos, semi-discos, semi-planos, quadrantes, ângulos, ...) onde as seguintes expressões definem funções injetivas, logo equivalências conformes, e determine as respectivas imagens:

$$iz \quad z^2 \quad e^z \quad \log(z) \quad \sin(z) \quad e^{iz} \quad 1/z$$

ex: Esboce as imagens das famílias de retas ortogonais $x = c$ e $y = c$ pela transformações $f(z) = z^2$ e $f(z) = 1/z$.

ex: Determine uma equivalência conforme entre o primeiro quadrante $Q_1 := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$ e o semi-plano inferior $-\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$,

ex: Determine uma equivalência conforme entre o segundo quadrante $Q_2 := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$ e o semi-plano superior $\mathbb{H}$.

ex: Determine a imagem de $B_+ = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi \text{ e } \Re(z) > 0\}$ pela transformação conforme $f(z) = e^z$.

ex: Deduza do teorema de Liouville 5.8 que não existe uma equivalência conforme $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$.

12.2 Grupo de Möbius

Automorfismos. A composição de duas equivalências conformes $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ e $g : \Omega' \rightarrow \Omega''$ é uma equivalência conforme $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega''$. Em particular, fixada uma região Ω , a família das transformações conformes invertíveis $f : \Omega \rightarrow \Omega$ forma um grupo (o produto sendo a composição e o elemento neutro sendo a transformação identidade), chamado grupo dos *automorfismos* (conformes) da região Ω , e denotado por $\text{Aut}(\Omega)$.

Importante é compreender os automorfismos do próprio plano complexo $\mathbb{C}$, do disco unitário $\mathbb{D}$ e do semi-plano superior $\mathbb{H}$, da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$.

Automorfismos do plano complexo: grupo afim. A região mais simples é o próprio plano complexo $\mathbb{C}$.

Teorema 12.4. O grupo $\text{Aut}(\mathbb{C})$ dos automorfismos do plano complexo é o grupo $\text{Aff}(\mathbb{C})$ das transformações afins, as transformações

$$f(z) = az + b$$

com $a \in \mathbb{C}^\times$ e $b \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Um automorfismo do plano complexo é uma função inteira $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. O ponto $w = 0$ não pode ser uma singularidade essencial de $g(w) := f(1/w)$. De fato, pelo teorema de Casorati-Weierstrass 6.4, $f(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$ seria um subconjunto denso em $\mathbb{C}$, mas também fechado porque f é um homeomorfismo, e portanto necessariamente igual ao próprio $\mathbb{C}$, o que é impossível se f é invertível. Então existe um inteiro $k \geq 0$ tal que $g(w)/w^k$ tem uma singularidade removível em $w = 0$, e portanto $f(z)z^k$ é limitada numa vizinhança de $z = \infty$. A desigualdade de Cauchy (5.5) então implica que $f(z)$ é um polinômio (de grau $\leq k$). Mas os únicos polinômios invertíveis são os polinômios de grau um, ou seja $f(z) = az + b$, com derivada $f'(z) = a$ diferente de zero. $\square$

Automorfismos da esfera de Riemann: grupo de Möbius. O grupo de Möbius é o grupo das transformações $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ do género

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (12.1)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $ad - bc \neq 0$. Cada matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ define uma transformação linear invertível de $\mathbb{C}^2$, que envia (z_0, z_1) em $(z'_0, z'_1) = (az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1)$. Em particular, envia retas que passam pela origem em retas que passam pela origem: as imagens das retas $z_0/z_1 = z$, parametrizadas por $z \in \mathbb{C}$, são as retas $z'_0/z'_1 = f(z)$, e a imagem da reta $z_1 = 0$, que corresponde a $z = \infty$, é a reta $z'_0/z'_1 = a/c$. O espaço $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ das retas que passam pela origem de $\mathbb{C}^2$ é isomorfo à esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. Duas matrizes invertíveis proporcionais, M e λM com $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, induzem a mesma transformação de $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \approx \overline{\mathbb{C}}$, e portanto o grupo de Möbius é isomorfo ao quociente $\text{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$, ou também ao quociente $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) := \text{SL}(2, \mathbb{C})/\pm I$. Em particular, a inversa da transformação de Möbius (12.1) é a transformação induzida por qualquer matriz proporcional a M^{-1} , por exemplo $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, e a composição $f \circ g$ de duas transformações de

Möbius, induzidas pelas matrizes invertíveis M e N , respetivamente, é a transformação induzida pelo produto MN .

Toda transformação de Möbius é uma composição de transformações afins e uma inversão $I(z) = 1/z$. De fato, a transformação (12.1) pode ser obtida como

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}$$

Teorema 12.5. *O grupo $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ dos automorfismos da esfera de Riemann é o grupo de Möbius $\text{Mob} \approx \text{PSL}(2, \mathbb{C})$.*

Demonstração. Seja f um automorfismo da esfera de Riemann, tal que $f(\infty) = d$. Então a composição $h = g \circ f$ de f com a transformação de Möbius $g(z) = 1/(z - d)$ é um automorfismo do plano complexo, pois fixa o ponto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$. Pelo teorema 12.4, h é uma transformação afim $h(z) = az + b$, e portanto $f = g^{-1} \circ h \in \text{Mob}$. $\square$

Uma “circunferência da esfera de Riemann” é uma circunferência ou uma reta euclidiana.

Teorema 12.6. *Uma transformação de Möbius envia circunferência em circunferências (da esfera de Riemann).*

Demonstração. A propriedade é óbvia para transformações afins, portanto é suficiente provar o teorema para a inversão $I(z) = 1/z$. Mas a equação de uma circunferência da esfera de Riemann é

$$a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

com $c \neq 0$ se $b = 0$, ou $b \neq 0$ se $a = 0$. Na variável $w = 1/z$ esta equação é transformada em

$$a + \bar{b}\bar{w} + bw + c|w|^2 = 0,$$

que é também a equação de uma circunferência da esfera de Riemann. $\square$

Razão cruzada e circunferências. Dados três pontos distintos $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$, existe uma única transformação de Möbius $f \in \text{Mob}$ que envia a, b, c em $1, 0, \infty$, nesta ordem (ou seja, $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ e $f(c) = \infty$). Esta transformação é

$$f(z) = \frac{(z - b)(a - c)}{(z - c)(a - b)}$$

(é única porque a única transformação de Möbius que fixa $1, 0$ e ∞ é identidade). Em particular, o grupo de Möbius age “triplamente transitivamente” na esfera de Riemann: para cada $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos e $a', b', c' \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos, existe uma única $f \in \text{Mob}$ tal que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ e $f(c) = c'$.

A *razão cruzada* (*cross-ratio*) dos quatro pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ é a imagem de z_1 pela única $f \in \text{Mob}$ que envia z_2, z_3, z_4 em $1, 0, \infty$, e é denotada por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := f(z_1) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

Em particular, $(z, 1, 0, \infty) = z$. A razão cruzada é invariante pelas transformações de Möbius. Ou seja,

Teorema 12.7. *Se $g \in \text{Mob}$, e $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ são quatro pontos distintos, então*

$$(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Demonstração. Se $f \in \text{Mob}$ envia z_2, z_3, z_4 em $1, 0, \infty$, então fg^{-1} envia $g(z_2), g(z_3), g(z_4)$ em $1, 0, \infty$. Então $(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = fg^{-1}(g(z_1)) = f(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. $\square$

Os três pontos $1, 0, \infty$ determinam uma única reta, a reta real, que deve ser pensada como uma circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$. Um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ pertence a esta circunferência sse $z = (z, 1, 0, \infty) \in \mathbb{R}$.

A imagem da reta real por uma transformação de Möbius arbitrária $f \in \text{Mob}$ é uma circunferência (uma reta ou uma circunferência euclidiana em $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$), e todas as circunferências são assim obtidas. Pela invariância da razão cruzada podemos concluir que

Teorema 12.8. *Quatro pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ estão numa circunferência sse a razão cruzada (z_1, z_2, z_3, z_4) é real.*

De consequência, a (única) circunferência que passa pelos pontos (distintos) a, b e c de $\overline{\mathbb{C}}$ pode ser definida pela equação cartesiana $\Im((z, a, b, c)) = 0$.

ex: Determine uma equação cartesiana da circunferência que passa pelos pontos $1, -1$ e i .

Schwarz lemma. The key to understand conformal isomorphisms of the unit disk is the following application of the maximum modulus principle.

Teorema 12.9 (Schwarz lemma). *Let $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ be a holomorphic function of the unit disk into itself fixing the origin, i.e. such that $f(0) = 0$. Then*

$$|f(z)| \leq |z|$$

for all $z \in \mathbb{D}$, and $|f'(0)| \leq 1$. If, moreover, there exists a point $p \in \mathbb{D}$ where $|f(p)| = |p|$, then the function is a rotation, i.e.

$$f(z) = \lambda z$$

for some constant $\lambda = e^{i\theta}$ of absolute value 1.

Demonstração. The Taylor series of f , which converges in $\mathbb{D}$, is $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$, and therefore $g(z) := f(z)/z = a_1 + a_2z + \dots$ is holomorphic too, if we define $g(0) = f'(0)$. Since $|f(z)| < 1$, we have $|g(z)| < 1/r$ if $|z| = r < 1$. By the maximum modulus principle 12.2, the same holds for all $|z| \leq r$, and therefore, letting $r \rightarrow 1$, we conclude that $|g(z)| \leq 1$. If $|g(p)| = 1$ for some $p \in \mathbb{D}$, again by the maximum modulus principle the function $g(z)$ must be a constant with absolute value 1. $\square$

Automorfismos do disco unitário e do semi-plano superior. Se $\alpha \in \mathbb{D}$, então a transformação de Möbius

$$f_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}$$

define uma transformação invertível $f_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, que envia o ponto α na origem, i.e. $f_\alpha(\alpha) = 0$. A inversa de f_α é a própria f_α , i.e. $f_\alpha \circ f_\alpha$ é a transformação identidade. Um automorfismo do disco $\mathbb{D}$ que fixa a origem é, pelo lema de Schwarz, uma rotação $g(z) = e^{i\theta}z$. De consequência,

Teorema 12.10. *O grupo $\text{Aut}(\mathbb{D})$ dos automorfismos conformes do disco unitário é o grupo das transformações*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z} \quad (12.2)$$

com $\alpha \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

A transformação de Cayley

$$w = h(z) := \frac{z - i}{z + i} \quad (12.3)$$

define uma equivalência conforme $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ do semi-plano superior sobre o disco unitário, cuja inversa é a transformação $h^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$, definida por

$$z = h^{-1}(w) = -i \frac{w + 1}{w - 1} \quad (12.4)$$

Observe que a restrição de h^{-1} à circunferência unitária é $h^{-1}(e^{i\theta}) = \tan(\theta/2)$.

O grupo $\text{Aut}(\mathbb{H})$ dos automorfismos do semi-plano superior é portanto o grupo $h^{-1} \circ \text{Aut}(\mathbb{D}) \circ h \approx \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, grupo das transformações de Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (12.5)$$

com coeficientes reais, i.e. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (e determinante $ad - bc \neq 0$).

ex: Verifique que, se $\alpha \in \mathbb{D}$ e $|z| = 1$ então $|f_\alpha(z)| = 1$.

ex: Verifique que $(f_\alpha \circ f_\alpha)(z) = z$.

ex: Verifique que uma transformação de Möbius (12.5) com coeficientes reais fixa a reta real $\Im(z) = 0$ e envia $\mathbb{H}$ em $\mathbb{H}$.

ex: Determine um automorfismo do semi-plano superior $\mathbb{H}$ que envia o ponto i no ponto $a \in \mathbb{H}$.

ex: Determine uma equivalência conforme do primeiro quadrante Q_1 no disco unitário $\mathbb{D}$.

ex: Verifique que

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

define uma equivalência conforme do semi-disco superior $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ sobre o primeiro quadrante $Q_1 = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$, e calcule a transformação inversa.

12.3 Equivalências conformes

Riemann mapping theorem and Dirichlet problem. Any simply connected region $\Omega \subset \mathbb{C}$ different from $\mathbb{C}$ itself is conformally equivalent to the unit disk. The existence of such a conformal equivalence $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ is the content of the famous *Riemann mapping theorem*, conjectured by Riemann in 1851 and proved by Carathéodory and Koebe sixty years later.

Teorema 12.11 (Riemann mapping theorem). *Let $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ be a simply connected region whose boundary contains at least two points. Then there exists a conformal isomorphism $R : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$. The Riemann map R is unique once we fix the image of 0 and the argument of $R'(0)$.*

Uniqueness follows from Schwarz's lemma. The hard point is existence, and you may find proofs in [Ah78, La03, Ru87, SS03II]. Here is Riemann's idea of the proof when the boundary of Ω is a regular curve, based on his Dirichlet principle. We are looking for a holomorphic function $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (the inverse of R in the theorem) which is continuous on $\overline{\Omega}$, sending $f(p) = 0$ and taking value $f(z) = 1$ if $z \in \partial\Omega$. By the maximum principle, such a map, if it exists, sends Ω inside $\mathbb{D}$. A natural guess, if we want an injective map, is

$$f(z) = (z - p) e^{g(z)}$$

for some holomorphic function $g(z)$. If we write $g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ with u and v real valued, then the boundary condition reads

$$\log |z - p| + u(z) = 0$$

for $z \in \partial\Omega$. Thus, the real part of $g(z)$ must be a harmonic function $u(x, y)$ with prescribed value $\log |z - p|$ on the boundary of the domain. The harmonic function

$$G(p, z) := \log |z - p| + u(z),$$

with a logarithmic singularity at p and vanishing at the boundary, is called “Green function” of the region Ω at the point p . If we believe, with Riemann, that such Dirichlet problem has a

solution, we may then find a conjugated harmonic function v (since Ω is simply connected) and hence the required $g(z)$.

On the other side, the Riemann mapping theorem may be used to solve the Dirichlet problem in a generic simply connected region: find a hamonic extension $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ of a continuous function $h_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. If we assume that the Riemann map extends to a continuous bijection $R : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\Omega$, we may use Poisson formula to extend $H_0 = h_0 \circ R$ to a harmonic function $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ inside the unit disk. The solution of the Dirichlet problem is then $h = H \circ R^{-1}$.

Luas. Uma *lua*, ou *biângulo*, é uma interseção $L = D_1 \cap D_2$ entre dois discos da esfera de Riemann (cada circunferência da esfera de Riemann divide a esfera em dois discos, cujas fronteira comum é a circunferência), ou seja, uma região $L \subset \mathbb{C}$ limitada entre dois arcos de circunferência que formam dois ângulos iguais, de uma certa amplitude $0 \leq \varphi \leq \pi$, nos vértices a e b . Usando uma transformação de Möbius (a transformação $z \mapsto (z-a)/(z-b)$), podemos assumir que os vértices são os pontos 0 e ∞ , e portanto, depois de uma rotação, que L é um ângulo $L = \{0 < \arg(z) < \varphi\}$. Então a transformação conforme $f(z) = z^\alpha$, com $\alpha = \pi/\varphi$, envia L sobre $\mathbb{H}$.

Um caso particular é a lua $A = \mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, limitada pelas circunferências $\Im(z) = 0$ e $|z| = 1$, que é enviada conformemente no semi-plano superior $\mathbb{H}$ pela aplicação de Levi-Civita $J(z) := z + 1/z$.

Um caso limite é quando o ângulo entre as duas circunferência é nulo, ou seja, as circunferências são tangentes. Uma transformação de Möbius envia o ponto de tangência em ∞ , e portanto podemos considerar, depois de uma transformação afim, que $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi\}$. Então a transformação conforme $f(z) = e^z$ envia B sobre $\mathbb{H}$.

Transformação de Levi-Civita/Jukovski. A transformação de Levi-Civita¹³ ¹⁴, ou de Jukovski, é a função racional de grau 2 definida por

$$w = J(z) := z + \frac{1}{z}.$$

A imagem da circunferência unitária é o segmento $[-2, 2]$. Cada ponto w fora do segmento $[-2, 2]$ admite duas pre-imagens, que por simetria estão uma dentro e a outra fora do disco unitário. Ou seja, J é injetiva em $\mathbb{D}$ e em $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, e envia cada uma destas regiões em $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. As circunferências $|z| = \rho$, com $\rho \neq 1$, são enviadas nas “elipses de Jukovski”

$$\frac{\Re(w)^2}{\rho + \rho^{-1}} + \frac{\Im(w)^2}{\rho - \rho^{-1}} = 1$$

centradas em 0 com focos ± 2 e semi-eixos $\rho \pm \rho^{-1}$. Os raios $\arg(z) = \theta$ são enviados nas hipérbolas

$$\frac{\Re(w)^2}{4 \cos^2 \theta} - \frac{\Im(w)^2}{4 \sin^2 \theta} = 1$$

com focos ± 2 .

Em particular, $J(z)$ define uma equivalência conforme de $\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ sobre $\mathbb{H}$, e de consequência as curvas de nível $\Im(z + 1/z) = c$ são as linhas de corrente de um fluido ideal que corre horizontalmente no semi-plano superior quando encontra um obstáculo descrito pela metade superior do disco unitário.

ex: Verifique que $-J(z) = -(z + 1/z)$ define uma equivalência conforme do semi-disco superior $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ sobre o semi-plano superior $\mathbb{H}$.

ex: Observe que $\sin(z)$ é a composição

$$z \mapsto e^{iz} \mapsto ie^{iz} \mapsto -J(ie^{iz})/2$$

Deduza que $\sin(z)$ define uma equivalência conforme de $B_+ = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \Re(z) < \pi/2 \text{ e } \Im(z) > 0\}$ sobre $\mathbb{H}$.

¹³V.I. Arnold, *Huyghens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser, 1990.

¹⁴T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Math.* **42** (1920), 99-144.

13 Avaliação assintótica de integrais

[CH53, Er56, vRB12]

14 jan 2019

Avaliação assintótica de integrais A resolução de muitos problemas de física-matemática (soluções de equações diferenciais, transformadas de Fourier e Laplace, ...) conduz a necessidade de estimar integrais do género

$$\int_{\gamma} g(z) e^{-\lambda f(z)} dz$$

onde γ é um caminho no plano complexo (por exemplo, um intervalo da reta real) e f e g são funções dadas, reais ou complexas. Tipicamente estamos interessados em grandes valores de λ , ou melhor na assintótica da função $L(\lambda) := \int_{\gamma} g(z) e^{-\lambda f(z)} dz$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Funções de partição. O parâmetro real λ pode ser uma “temperatura inversa” $\beta = 1/kT$, como no caso da função de partição

$$Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n} \simeq \int e^{-\beta E(x)} dx$$

em mecânica estatística. Então o limite $\beta \rightarrow \infty$ corresponde a temperaturas próximas do zero.

Path integrals. Em mecânica quântica ou em teoria dos campos, o parâmetro λ é o inverso da “constante de Planck” $\hbar$, como no caso dos integrais de Feynman

$$\int_{\text{paths}} e^{iS[\text{path}]/\hbar} d\text{path}$$

O limite $\hbar \rightarrow 0$ corresponde ao limite semi-clássico.

13.1 Método de Laplace

Integrais tipo Laplace. Quando o argumento do exponencial é uma função real o integral

$$\int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx$$

é dito “integral de Laplace”. É claro que quando λ é grande o integral tende a seleccionar os valores menores de $f(x)$. Se $f(x)$ assume um mínimo global no ponto $c \in (a, b)$, onde $f(c) = m$ e a curvatura $\delta := f''(c) > 0$, então podemos considerar a aproximação $f(x) \simeq m + \frac{1}{2}\delta(x-c)^2$, e estimar

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx &\simeq g(c) e^{-m\lambda} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\lambda\delta(x-c)^2} dx \\ &\simeq g(c) e^{-m\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda\delta(x-c)^2} dx \\ &= g(c) e^{-m\lambda} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta\lambda}} \end{aligned}$$

onde, no último passo, calculamos o integral gaussiano completo. Este argumento pode ser feito rigoroso, ou seja, os erros cometidos podem ser estimados pequenos comparados com o termo principal. O resultado é o seguinte teorema de Laplace ¹⁵

Teorema 13.1 (Laplace). *Se $f(x)$ assume um mínimo absoluto em um único ponto $c \in (a, b)$, onde $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então*

$$\int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx \sim C e^{-\lambda f(c)} \lambda^{-1/2} \quad (13.1)$$

¹⁵P.S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, Oeuvres complètes **7**, Gauthier-Villars, 1886.

quando $\lambda \rightarrow \infty$, onde a constante C é

$$C = \sqrt{2\pi} \frac{g(c)}{\sqrt{f''(c)}}$$

Steepest descent method. Em geral, se $f(z)$ e $g(z)$ são funções holomorfas, a ideia de Riemann¹⁶ e de Debye¹⁷ é usar o teorema de Cauchy para deformar o contorno de integração até poder aplicar o teorema de Laplace (ou seja, encontrar um contorno onde a parte imaginária de $f(z)$ seja constante e onde a parte real assuma um mínimo absoluto).

e.g. Aproximação de Stirling. A função Gama é definida pelo integral impróprio

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (13.2)$$

no semi-plano direito $\Re(z) > 0$ do plano complexo. Uma integração por partes mostra que a função Gama satisfaz a equação funcional

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

com condição inicial $\Gamma(1) = 1$. Isto significa que Γ estende o factorial, ou seja, que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

se $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. A mudança de variável $t = nx$ no integral que calcula $n!$ mostra que

$$n! = n^{n+1} \int_0^\infty e^{-n(x-\log x)} dx.$$

O mínimo da função $f(x) = x - \log x$ no intervalo $(0, \infty)$ é o ponto $x = 1$, onde $f(1) = f''(1) = 1$. A fórmula de Laplace (13.1) implica a *aproximação/fórmula de Stirling*

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, $n!$ cresce como $\exp((n+1/2) \ln n - n)$.

ex: Mostre (por exemplo, usando a substituição $u = \sqrt{t}$ no integral (13.2)), que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

e calcule $\Gamma(3/2)$.

ex: Estime o valor do integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\lambda \cos t} dt$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$.

13.2 Integrais oscilatórios e método da fase estacionária

Integrais oscilatórios. Quando o argumento do exponencial é imaginário puro, podemos pensar que é da forma $i\lambda\varphi(x)$ com $\varphi(x)$ real, uma “fase”, e o integral correspondente (dito de tipo Fourier)

$$\int_a^b a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx \quad (13.3)$$

é “oscilatório”. A função $a(x)$, que representa uma “amplitude”, é uma função teste, por exemplo uma função de Schwartz ou uma função com suporte compacto (e neste caso podemos assumir que os limites de integração são $\pm\infty$).

¹⁶B. Riemann, Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita. Unpublished note, 1863.

¹⁷P. Debye, Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index, *Mathematische Annalen* **67** (1909), 535-558.

Cancelações. Um caso trivial é uma fase constante, por exemplo $\varphi(x) = 1$. Então o integral é simplesmente $e^{i\lambda}$ vezes o integral $\int a(x) dx$ da amplitude $a(x)$ (que assumimos integrável!). Em particular, o seu módulo é imitado pela norma $\|a\|_1$. Se a fase é linear, por exemplo $\varphi(x) = x$, então o integral é a transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda x} dx = (\mathcal{F}a)(\lambda)$$

da amplitude $a(x)$. Pelo lema de Riemann-Lebesgue 8.2, $(\mathcal{F}a)(\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. De fato, se a amplitude é uma função teste $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, então a sua transformada de Fourier decai mais rápido de qualquer potência, ou seja, é $(\mathcal{F}a)(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-n})$ para todo $n \geq 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ (isto significa que para todo $n \geq 0$ o seu módulo é limitado por $|(\mathcal{F}a)(\lambda)| \leq C\lambda^{-n}$, onde a constante $C = C_{a,n}$ depende das primeiras n derivadas de $a(x)$). Mas uma função é praticamente linear numa vizinhança de um ponto que não é crítico. Uma integração por partes mostra que se φ' é diferente de zero no suporte (compacto) de $a(x)$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} (a(x)/\varphi'(x))' e^{i\lambda\varphi(x)} dx$$

Iterando, temos o

Teorema 13.2 (princípio da fase não-estacionária). *Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Se $\varphi(x)$ não tem pontos críticos no suporte de $a(x)$, então para todo $n \geq 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \mathcal{O}(\lambda^{-n})$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Princípio da fase estacionária. De acordo com o princípio da fase não-estacionária 13.2, esperamos que os contributos principais ao integral oscilatório (13.3) sejam devidos aos pontos críticos de $\varphi(x)$, os pontos onde a fase é “estacionária”. Numa vizinhança de um ponto crítico c , onde a fase é $\varphi(x) \simeq \varphi(c) \pm \frac{1}{2}\delta(x-c)^2$ com $\delta = |\varphi''(c)|$, podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx &\sim a(c) e^{i\lambda\varphi(c)} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} e^{\pm i\lambda\delta(x-c)^2/2} dx \\ &\sim a(c) e^{i\lambda\varphi(c)} \sqrt{2/\delta} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\pm i\lambda x^2} dx \end{aligned}$$

O último integral é essencialmente um integral de Fresnel (calculado em (4.3))

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\pm i\lambda x^2} dx \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda x^2/\hbar} dx = \sqrt{\pi/\lambda} e^{\pm i\pi/4}$$

É possível provar que os erros introduzidos por estas aproximações são pequenos comparados com a ordem de grandeza assintótica calculada $\sim \lambda^{-1/2}$. O resultado é o

Teorema 13.3 (princípio da fase estacionária). *Se a amplitude $a(x)$ tem suporte compacto e se a fase $\varphi(x)$ admite um único ponto crítico não degenerado c no suporte de $a(x)$, então*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx \sim C e^{i\lambda\varphi(c)} \lambda^{-1/2}}$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$, onde a constante C é dada por

$$C = \sqrt{2\pi} \frac{a(c)}{\sqrt{|\varphi''(c)|}} e^{\pm i\pi/4}$$

e $\pm$ denota o sinal de $\varphi''(c)$.

e.g. Assimptótica das funções de Bessel. Uma aplicação típica é a assimptótica quando $x \rightarrow \infty$ da função de Bessel $J_0(x)$, que resolve a equação diferencial

$$xy'' + y + xy = 0$$

É possível mostrar (por exemplo, usando a técnica da transformada de Laplace) que $J_0(x)$ é dada pelo integral oscilatório

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$$

O princípio da fase estacionária 13.3 implica que

$$J_0(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cos(x - \pi/4)$$

quando $x \rightarrow \infty$.

Referências

- [Ah78] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [Ap76] T.M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [Ar04] V.I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS, 2004.
- [AS64] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, 1964.
- [Ba09] L. Barreira, *Análise Complexa e Equações Diferenciais*, IST Press, 2009.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Be62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics, Mechanics*, McGraw-Hill, 1962.
- [Bi80] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, MIR, 1980.
- [Ca95] H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Dover, 1995. [*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961]
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [Co73] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer Verlag, 1973.
- [CH53] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, 1953.
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].
- [Er56] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover, 1956.
- [FLS63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Fo92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Society, 1992.
- [Gam01] T.W. Gamelin, *Complex analysis*, Springer, 2001.
- [GdF87] D. Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1987.
- [HC89] D. Hilbert and R. Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, Verlag 1924 [*Methods of mathematical physics*, Wiley-VCH, 1989].
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press, 1959.
- [KF83] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1983.
- [Io05] V. Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [La03] S. Lang, *Complex Analysis*, GTM **103**, Springer Verlag, 2003.
- [LC72] M. Laurentiev et B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Éditions de Moscou MIR, 1972.

- [LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.
- [LN96] A. Lins Neto, *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides IMPA, 1996.
- [McM11] C.T. McMullen, *Complex Analysis*, Course Notes, Harvard University, 2011.
- [MF05] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953 [Feshbach Publishing, 2005].
- [MG14] P. Martins Girão, *Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais*, IST Press, 2014.
- [MH99] J.E. Marsden and M.J. Hoffmann, *Basic complex analysis*, W.H. Freeman, 1999.
- [Na06] P.J. Nahin, *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*, Princeton University Press, 2006.
- [O'N99] P.V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1999.
- [Pi91] M.A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Third Edition, Cambridge University Press, 2006.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Sm03] G. Smirnov, *Análise Complexa e Aplicações*, Escolar Editora, 2003.
- [SS03I] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis I, Princeton University Press, 2003.
- [SS03II] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, 2003.
- [St08] W. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2nd ed, Wiley, 2008.
- [ST71] A.G. Svesnikov and A.N. Tichonov, *The Theory of Functions of a Complex Variable*, MIR, 1971.
- [TS81] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*, MIR, 1981.
- [vRB12] H.J.J. van Roessel and J.C. Bowman, *Asymptotic Methods*, University of Alberta, Edmonton, Canada, 2012.