3/11/2017 1^o teste	Análise Complexa	FIS MIENGFIS

1. *(2 valores)* Calcule e resolva
$$\sqrt{1+i} \qquad \text{e} \qquad e^{-z} = -1\,,$$
respetivamente.
$$\sqrt[4]{2}\, e^{i(\pi/8+k\pi)}\,,\ k=0,1\,, \qquad \text{e} \qquad z = -i\pi + 2\pi i\,\mathbb{Z}\,.$$

2. *(2 valores)* Verifique se a função
$$f(z) = 1/z\,,$$
definida em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, é holomorfa.
É holomorfa, pois $\partial f/\partial y = -i/z^2 = i\,\partial f/\partial x$.

3. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da seguinte série de potências, e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n = \frac{1}{z} \qquad \text{no disco } |z-1|<1\,.$$

4. *(2 valores)* Calcule o segunte integral, ao longo do contorno $\gamma = \{z(t) = 1+t+it^2\ :\ t\in[0,1]\}$,
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz\,.$$
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = \frac{3+i}{5}\,.$$

5. *(2 valores)* Calcule o integral
$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z}\,dz\,.$$
$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}\,dz = 2\pi i\,.$$

6. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p=1$, e o seu disco de convergência, da função
$$f(z) = \frac{z}{2-z}$$
$$f(z) = z\,\frac{1}{1-(z-1)} = (1+(z-1))\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = 1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n. \qquad \text{no disco } |z-1|<1\,.$$

7. *(2 valores)* Determine a série de Laurent no anel $2<|z|<3$ da função
$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}\,.$$
$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1/z}{1-2/z} - \frac{1/3}{1-z/3} = -\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n\right) - \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z/3)^n\right)$$
$$= \cdots - \frac{8}{z^4} - \frac{4}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{3} - \frac{z}{9} - \frac{z^2}{27} - \frac{z^3}{81} - \cdots$$

8. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas da função

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2 + 2z + 1}\,.$$

A função $f(z)$ tem uma singularidade essencial em $p = 0$ e um pólo duplo em $p = -1$.

9. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

10. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)}\,.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

9/1/2018 2^o teste	Análise Complexa

1. *(2 valores)* Determine a solução estacionária (ou seja, independente do tempo t) da equação de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
no intervalo $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 1$ para todo tempo $t \geq 0$.

$$u(x, t) = x/\pi$$

2. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$.
São proporcionais a
$$u_n(x, t) = e^{-n^2 t} \sin(nx) \qquad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

3. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ da função definida, no intervalo $[0, \pi]$, por
$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - \alpha| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \alpha| > \varepsilon \end{cases} ,$$
com $\alpha \in (0, \pi)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.
$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda}{\pi n} \sin(n\alpha) \sin(n\varepsilon) \sin(nx) .$$

4. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira nulas, ou seja, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$, e condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 3).
$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda}{\pi n} \sin(n\alpha) \sin(n\varepsilon) e^{-n^2 t} \sin(nx) .$$

5. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis e limitadas (com valores complexos) da equação de Schrödinger
$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$
na reta real $x \in \mathbb{R}$.
São proporcionais a
$$\psi(x, t) = e^{ip^2 t} e^{ipx} \qquad \text{com } p \in \mathbb{R} .$$

6. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$ da função
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$
$$F(\xi) = e^{-i\pi\xi} \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} .$$

7. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\|F\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 \, d\xi$$

onde $F(\xi)$ é a transformada de Fourier calculada no exercício 6.

$$\|F\|_2^2 = \|f\|_2^2 = 1\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier inversa $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x}\, G(\xi)\, d\xi$ da gaussiana

$$G(\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 k}$$

com $k > 0$.

$$g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-x^2/4k}\,.$$

9. *(2 valores)* Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação de calor com dissipação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$$

na reta real $x \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x,0) = \phi(x)$ no espaço de Schwartz.

Se $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi t} U(\xi,t)\, d\xi$, então

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\xi,t) = -(4\pi^2\xi^2 + 1) U(\xi,t)$$

e portanto

$$U(\xi,t) = U(\xi,0)\, e^{-(4\pi^2\xi^2+1)t}$$

Mas $e^{-(4\pi^2\xi^2+1)t}$ é a transformada de Fourier de $e^{-t} g_t(x)$, portanto

$$u(x,t) = e^{-t}\,(\phi * g_t)(x) = e^{-t} \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\, g_t(x-y)\, dy\,.$$

10. *(2 valores)* Calcule o limite pontual $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ da solução do exercício 9 quando a condição inicial é a gaussiana

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4}\,.$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t}\, g_{t+1}(x) = 0$$