29/01/2018 recurso	Análise Complexa

1. *(2 valores)* Resolva a equação
$$\sin(z) = 2\,.$$

2. *(2 valores)* Verifique se a seguinte função, definida em $\mathbb{C}$, é holomorfa:
$$f(z) = z\,\overline{z}\,.$$

3. *(2 valores)* Calcule o integral
$$\int_\gamma z\,\overline{z}\,dz$$
ao longo do contorno $\gamma = \{z(t) = t + it^2 \,:\, t \in [0,1]\}$.

4. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = 0$, e o respetivo raio de convegência, da função
$$f(z) = \frac{z}{z^2+4}\,.$$

5. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas e calcule os respetivos resíduos da função
$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule o integral
$$\oint_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule o integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de cosenos $a_0/2 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(nx)$ da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por
$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x-\alpha| \le \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x-\alpha| > \varepsilon \end{cases}\,,$$
com $\alpha \in (0,\pi)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

9. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
no intervalo $x \in [0,\pi]$ com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \ge 0$ (condutor isolado), e condição inicial $u(x,0) = \varphi(x)$ (definida no exercício 8).

10. *(2 valores)* Sabendo que a transformada de Fourier da gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ é a gaussiana $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$, calcule a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx$ da função
$$f(x) = x\,e^{-x^2}\,.$$