28/11/2014 1º teste	Análise Complexa

Nome ....**Nº** .... ☐ ENGFIS ☐ FIS

1. *(2 valores)* Resolva

$$z^2 + z + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \sin(z) = 2$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \qquad \text{se} \qquad z = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2\,.$$
$$\sin(z) = 2 \qquad \text{se} \qquad z = -i\log|2 \pm \sqrt{3}| + \pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

2. *(2 valores)* Verifique se a seguinte função, definida em $\mathbb{C}$, é holomorfa:

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy - 7$$

É holomorfa, sendo a função $f(z) = z^2 - 7$.

3. *(2 valores)* Determine o disco de convergência da seguinte série de potências, e, se possível, uma expressão compacta para a função holomorfa que define:

$$\sum_{n\geq 0} nz^n$$

$$\sum_{n\geq 0} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2} \qquad \text{no disco } |z| < 1\,.$$

4. *(2 valores)* Calcule o segunte integral, ao longo do contorno $\gamma = \{z(t) = 2e^{it} \,:\, t \in [0,\pi]\}$,

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz$$

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz = 4\pi i\,.$$

5. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z}\, dz$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z}\, dz = 0\,.$$

6. *(2 valores)* Determine a série de Taylor em torno de $p = 0$, e o seu disco de convergência, da função

$$f(z) = \frac{e^z}{2+z^2}$$

$$f(z) = \left(\sum_{a\geq 0} \frac{z^a}{a!}\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{b\geq 0}(-z^2/2)^b\right) = 1/2 + (1/2)z - (1/6)z^3 + (7/80)z^5 + \dots \qquad \text{no disco } |z| < \sqrt{2}\,.$$

7. *(2 valores)* Determine as série de Laurent em torno de $p = 0$, e os respetivos aneis de convegência, da função

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\sum_{a\geq 0} \frac{z^{-a}}{a!}\right)\left(\sum_{b\geq 0} z^b\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{a\geq \max\{-k,0\}} \frac{1}{a!}\right) z^k \\
&= \cdots + (e-5/2)z^{-3} + (e-2)z^{-2} + (e-1)z^{-1} + e(1+z+z^2+\dots) \qquad \text{no anel } 0<|z|<1 \\
f(z) &= \left(\sum_{a\geq 0} \frac{z^{-a}}{a!}\right)\left(-\sum_{b\geq 1} z^{-b}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{a=0}^{k-1} \frac{1}{a!}\right) z^{-k} \\
&= -z^{-1} - 2z^{-2} - \frac{5}{2}z^{-3} - \frac{8}{3}z^{-4} - \dots \qquad \text{no anel } 1<|z|
\end{aligned}$$

8. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas da função

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$$

A função $f(z)$ tem uma singularidade essencial em $p = 0$ e um pólo simples em $p = 1$.

9. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

10. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin(\theta)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

12/1/2015 2^o teste	Análise Complexa

Nome ....**N^o** ....

☐ ENGFIS
☐ FIS

1. *(2 valores)* Determine a solução da equação de onda $u_{tt} = u_{xx}$ na reta real com condições iniciais $u(x,0) = e^{-\pi x^2}$ e $u_t(x,0) = 0$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi(x-t)^2} + e^{-\pi(x+t)^2}\right)$$

2. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis da equação de calor $u_t = u_{xx}$ no intervalo $x \in [0,\pi]$ tais que $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$.
São proporcionais a
$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t}\sin(nx) \qquad \text{com } n = 1,2,3,\dots$$

3. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por $f(x) = \pi - x$.

$$\pi - x \sim 2\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \dots\right)$$

4. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor $u_t = u_{xx}$ no intervalo $[0,\pi]$ com condições de fronteira nulas, ou seja, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$, e condição inicial $u(x,0) = \pi - x$ se $0 < x < \pi$.

$$2\left(e^{-t}\sin(x) + \frac{e^{-4t}}{2}\sin(2x) + \frac{e^{-9t}}{3}\sin(3x) + \frac{e^{-16t}}{4}\sin(4x) + \dots\right)$$

5. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier inversa $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} F(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$ da função

$$F(\omega) = e^{-k(\omega^2 - i\omega)}$$

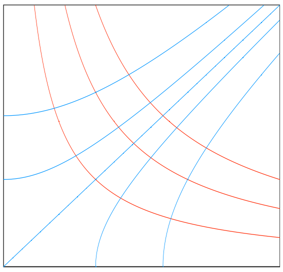
onde $k > 0$.
Observando que $F(\omega) = e^{ik\omega}e^{-k\omega^2}$ e que $G(\omega) = e^{-k\omega^2}$ é a transformada de Fourier de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}}e^{-x^2/4k}$, temos que
$$f(x) = g(x+k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}}e^{-(x+k)^2/4k}$$

6. *(2 valores)* Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal de $u_t = u_{xx} + u_x$ na reta real com condição inicial $u(x,0) = \varphi(x)$ no espaço de Schwartz.
Se $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} U(\omega,t)\, \frac{d\omega}{2\pi}$, então
$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t) = -(\omega^2 - i\omega)U(\omega,t)$$
e portanto
$$U(\omega,t) = U(\omega,0)\, e^{-(\omega^2 - i\omega)t}$$
Mas $H_t(\omega) = e^{-(\omega^2 - i\omega)t}$ é a transformada de Fourier de $h_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x+t)^2/4t}$, portanto
$$u(x,t) = (u(\cdot,t) * h_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(y,0)\, h_t(x-y)\, dy$$

7. *(2 valores)* Determine uma função harmónica conjugada da função $u(x,y) = y - 2xy$.

$$v(x,y) = -x + x^2 - y^2$$

8. *(2 valores)* Esboce algumas linhas de corrente e alguma curvas equipotenciais do potencial complexo $f(z) = z^2$ definido no primeiro quadrante $Q_1 = \{\Re(z) > 0\,,\, \Im(z) > 0\}$, e calcule o campo $\mathbf{V} = \overline{f'}$.



$$\mathbf{V}(x, y) = (2x, -2y)$$

9. *(2 valores)* Determine a imagem da região $B_- = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \Im(z) < \pi \text{ e } \Re(z) < 0\}$ pela transformação conforme $f(z) = e^z$.

$$f(B_-) = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$$

10. *(2 valores)* Sabendo que a transformação de Möbius $h(z) = (z - i)/(z + i)$ define uma equivalência conforme $h : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ entre o semi-plano superior e o disco unitário, determine uma equivalência conforme $g : Q_1 \to \mathbb{D}$ entre o primeiro quadrante e o disco unitário.

$$g(z) = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$$