3/2/2015 recurso

Análise Complexa

Nome ....**N^o** ....

☐ ENGFIS
☐ FIS

1. *(2 valores)* Verifique se a seguinte função, definida em $\mathbb{C}$, é holomorfa:

$$f(x+iy) = e^x \cos(y) - ie^x \sin(y)$$

Não é holomorfa, pois $\partial f/\partial y \neq i\partial f/\partial x$.

2. *(2 valores)* Calcule o seguinte integral, ao longo do contorno $\gamma = \{z(t) = 1 - it \,:\, t \in [0,1]\}$,

$$\int_\gamma (z^3 - iz)\, dz$$

$$\int_\gamma (z^3 - iz)\, dz = \left[\frac{z^4}{4} - i\frac{z^2}{2}\right]_1^{1-i} = -\frac{9}{4} + \frac{1}{2}i\,.$$

3. *(2 valores)* Determine as série de Laurent em torno de $p = 0$, e os respetivos aneis de convegência, da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \qquad \text{no anel } \; 0 < |z| < 1$$
$$f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots \qquad \text{no anel } \; 1 < |z|$$

4. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas e calcule os respetivos resíduos da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

A função $f(z)$ tem um pólo simples em $p = 1$ com $\text{Res}(f,1) = -1$ e um pólo duplo em $p = 0$ com $\text{Res}(f,0) = 1$.

5. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{1}{z^2(1-z)}\, dz$$

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{1}{z^2(1-z)}\, dz = 2\pi i\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx\right) = \frac{\pi}{2e}\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por $f(x) = \pi/2 - x$.

$$\pi/2 - x \ \sim \ \sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{3}\sin(6x) + \dots$$

8. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação da corda vibrante $u_{tt} = u_{xx}$ no intervalo $[0,\pi]$ com condições de fronteira nulas, ou seja, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo t, e condições inicial $u(x,0) = \pi/2 - x$ e $u_t(x,0) = 0$ se $0 < x < \pi$.

$$u(x,t) \sim \cos(2t)\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(4t)\sin(4x) + \frac{1}{3}\cos(6t)\sin(6x) + \dots$$

9. *(2 valores)* Determine uma função harmónica conjugada da função $u(x,y) = e^x \cos(y)$.

$$v(x,y) = e^x \sin(y)\,.$$

10. *(2 valores)* Determine a imagem da região $B_+ = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \Im(z) < \pi \text{ e } \Re(z) > 0\}$ pela transformação conforme $f(z) = e^{-z}$.

$$f(B_+) = \mathbb{D} \cap (-\mathbb{H})\,.$$